Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно- Уральский государственный университет
Факультет математики, механики и компьютерных наук

О.К. Сибагатуллина, М.А. Корытова

МАТЕМАТИКА

Сборник контрольных заданий

Часть I,II

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2015

Одобрено
учебно-методической комиссией
факультета математики, механики и компьютерных наук

Рецензенты:

Математика: сборник контрольных работ для студентов заочной формы обучения экономических направлений / О.К. Сибагатуллина, М.А. Корытова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 45 с.

Учебное пособие содержит контрольные работы, методические указания и теоретический материал, соответствующий программе по математическим дисциплинам 1 и 2 семестра экономических направлений.

Пособие предназначено для студентов заочной формы обучения первого курса экономических направлений и специальностей: 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.03 «Управление персоналом», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление», 38.03.05 «Бизнес-информатика», 38.03.06 «Торговое дело».

Раздел I. Линейная алгебра

Раздел включает в себя задачи на выполнение действий над матрицами (сложение (вычитание), умножение на число, умножение матриц), решение систем методами Жордана – Гаусса и Крамера.

Задача 1.1.

Выполнить действия с матрицами (номер примера соответствует варианту)**:**

1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 14 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix};$

3) $4\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -8 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+8\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};$

5) $2\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix};$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix};$

7) $5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$

8) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix};$

9) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix};$

11) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -3 \end{pmatrix};$

12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix};$

13) $4\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

14) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+7\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

15) $3\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix};$

16) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix};$

17) $5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$

18) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

19) $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; **20)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

Пример 1.1.

Выполнить действия с матрицами: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$**.**

Решение: Для решения данной задачи *студент должен научиться складывать, перемножать матрицы и умножать матрицу на число*. Матрицей A размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m – строк и n – столбцов. Умножение матриц проводится по правилу «строчка на столбец». Перемножать матрицы можно только тогда, когда количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй матрицы. При умножении i – ой строки первой матрицы на j – ый столбец второй матрицы первый элемент строки умножается на первый элемент столбца, второй элемент строки умножается на второй элемент столбца, последний элемент строки умножается на последний элемент столбца, все попарные произведения складываются. Это суммарное число располагается в i – ой строке, j – ом столбце в полученной матрице произведения. Умножение матрицы на число α осуществляем следующим образом: каждый элемент матрицы умножается на число α. Складываем матрицы только одинаковых размеров, причем складываем соответствующие элементы матриц.

Перейдем к решению задачи. Сначала выполним умножение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}=\begin{vmatrix} 1\cdot 4+(-3)\cdot(-2)+7\cdot 9=73 & 1\cdot 2+(-3)\cdot 1+7\cdot 3=20 \\ -2\cdot 4+1\cdot(-2)+4\cdot 9=26 & -2\cdot 2+1\cdot 1+4\cdot 3=9 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 73 & 20 \\ 26 & 9 \end{pmatrix}.$$

Затем умножим матрицу на число:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 7\cdot 2 \\ -5\cdot 2 & 5\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Теперь сложим полученные матрицы:

$$\begin{pmatrix} 73 & 20 \\ 26 & 9 \end{pmatrix}_{2\times 2}+\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{vmatrix} 73+2=75 & 20+14=34 \\ 26+(-10)=16 & 9+10=19 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 75 & 34 \\ 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 75 & 34 \\ 16 & 19 \end{pmatrix}$.

Задача 1.2.

Решить системы методом Жордана – Гаусса и по формулам Крамера (номер примера соответствует варианту)**:**

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -7, \\ 5x_1 - 4x_2 - 8x_3 = -13. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -12, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 4, \\ 2x_1 + 12x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 42. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 - 3x_2 = 5. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 27, \\ 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 36. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 17x_3 = -27, \\ -x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -12. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -3, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 10x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 - x_3 = 14, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -16. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13, \\ 4x_1 + 13x_2 + 10x_3 = 50. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

12) $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -4, \\ -7x_2 - 7x_3 = -14, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4, \\ -3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14, \\ -5x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -18, \\ 4x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 1. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = -11, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 = -3, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$

17) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -12, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 = -6. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = -13, \\ -x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -13. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 19, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$

Пример 1.2.

Решить систему методом Жордана – Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2+12x_3=-5 \\ x_1-x_2+5x_3=-2 \end{cases}$$

Решение: Систему требуется решить двумя способами. Сначала применим формулы Крамера. Для этого *студент должен научиться вычислять определитель третьего порядка*. Определители выделяются прямыми скобками. Определитель третьего порядка для матрицы A размера 3×3 вычисляется следующим образом:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Перейдем к решению задачи. Записываем матрицу системы, $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 12 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, элементами, которой являются коэффициенты при неизвестных x_1, x_2 и x_3. Обозначим Δ – определитель матрицы A, Δ_1– определитель, в котором первый столбец матрицы заменен на столбец свободных членов системы, Δ_2– определитель, в котором второй столбец матрицы A заменен на столбец свободных членов системы, Δ_3– определитель, в котором третий столбец матрицы A заменен на столбец свободных членов системы.

Вычислим их:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 12 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 5+3\cdot(-1)\cdot(-3)+2\cdot 12\cdot 1-1\cdot(-2)\cdot(-3)-3\cdot 2\cdot 5-$$

$$-2\cdot 12\cdot(-1)=-20+9+24-6-30+24=1\neq 0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -5 & -2 & 12 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-2)\cdot 5+(-3)\cdot(-1)\cdot(-5)+2\cdot 12\cdot(-2)-(-2)\cdot(-2)\cdot(-3)-$$

$$-(-1)\cdot 12\cdot(-1)+5\cdot 5\cdot 2=10-15-48+12-12+50=-3,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot(-5)\cdot 5+3\cdot(-2)\cdot(-3)+1\cdot 12\cdot(-1)-1\cdot(-3)\cdot(-5)-3\cdot 5\cdot(-1)-$$

$$=2\cdot 12\cdot(-2)=-50+18-12-15+15+48=4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-2) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot(-5) - 1\cdot(-2)\cdot(-1) - 3\cdot 2\cdot(-2) -$$

$$-2\cdot(-1)\cdot(-5) = 8 + 3 - 10 - 2 + 12 - 10 = 1.$$

По формулам Крамера можем найти неизвестные $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, так как $\Delta \neq 0$:

$x_1 = \dfrac{-3}{1} = -3$; $x_2 = \dfrac{4}{1} = 4$; $x_3 = \dfrac{1}{1} = 1$.

Выполним проверку, подставив найденные значения в исходную систему:

$$\begin{cases} 2\cdot(-3) + 2\cdot 4 - 3\cdot 1 = -1 \\ 3\cdot(-3) - 2\cdot 4 + 12\cdot 1 = -5 \\ -3 - 4 + 5\cdot 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 + 8 - 3 = -1 \\ -9 - 8 + 12 = -5 \\ -3 - 4 + 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -1 \\ -5 = -5 \\ -2 = -2 \end{cases}$$ все верно.

Ответ: $\{-3; 4; 1\}$.

Приступим к решению системы методом Жордана – Гаусса. Для этого *студент должен изучить алгоритм решения данного метода (жорданово исключение) и необходимо уметь складывать, умножать числа.* Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Алгоритм метода Жордана–Гаусса:

1) Выписать матрицу $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$. Она состоит из коэффициентов при неизвестных, дополненная столбцом свободных членов системы, такая матрица называется расширенной матрицей системы.

2) В матрице A выбрать отличный от нуля элемент a_{ij} (удобнее брать единицу), но выбирать в столбце свободных членов нельзя. Этот элемент называется ведущим элементом, i – й столбец матрицы $\tilde{A}$ называется ведущим столбцом, а j – я строка – ведущей строкой.

3) Выполнить жорданово исключение. Жордановым исключением с ведущим элементом a_{ij} называется переход от матрицы $\tilde{A}$ к матрице $\tilde{A}'$ того же размера, осуществляемый по следующим правилам:

– помечается ведущая строка;

– все элементы ведущей строки делятся на a_{ij};

– все остальные элементы ведущего столбца заменяются нулями;

– остальные элементы матрицы $\tilde{A}'$ a'_{kl} $(k \neq i,\ \ l \neq j)$ вычисляются по формуле «правило прямоугольника»

$$a'_{kl} = \frac{a_{ij} a_{kl} - a_{il} a_{kj}}{a_{ij}}.$$

Изобразим это правило схематически. Ведущий элемент будем выделять рамкой $\boxed{a_{ij}}$. Стрелками показаны элементы, которые перемножаются в числителе дроби. Эти элементы расположены на диагоналях прямоугольника, образованного ведущим элементом a_{ij}, пересчитываемым элементом a_{kl} и элементами, которые находятся на пересечении ведущей строки и строки № k, ведущего столбца и столбца № l

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{il} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kl} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

4) Если хотя бы одна строка имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \vdots & b \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, то система решений не имеет. *Ответ.* Система несовместна.

5) Если все ненулевые строки матрицы отмечены, то система, ей соответствующая, является системой с единичным базисом. *Ответ*. Система имеет единственное решение.

6) Выбрать ведущий элемент в любой неотмеченной строке и в любом столбце (кроме последнего). Перейти к пункту 3.

Перейдем к решению задачи. Выпишем расширенную матрицу системы $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 12 & -5 \\ \boxed{1} & -1 & 5 & -2 \end{array}\right)$ и берем за ведущий элемент $a_{31} = 1$ третий строки. Перепишем без изменения ведущую строку (так как, поделив её на ведущий элемент $a_{31} = 1$, ведущая строка не изменилась). Все элементы первого столбца, кроме ведущего элемента, заменим нулями. Применив правило прямоугольника, заполняем до конца матрицу. Рассмотрим некоторые элементы, вычислив по правилу прямоугольника

$$a'_{12} = \frac{a_{31} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{32}}{a_{31}} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)}{1} = 4; \quad a'_{23} = \frac{a_{31} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{33}}{a_{31}} = \frac{1 \cdot 12 - 3 \cdot 5}{1} = -3$$

(в матрице выделены чертой), $\begin{array}{c} \\ \\ \vee \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{4} & -13 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & \underline{-3} & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \end{array}\right)$. В полученной матрице выберем за ведущий элемент $a_{22} = 1$. Перепишем без изменения вторую строку, а все элементы второго столбца, кроме ведущего элемента, заменим нулями. Применив правило прямоугольника, заполняем до конца матрицу $\begin{array}{c} \\ \vee \\ \vee \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$. Ведущие элементы были выбраны в третьей и во второй строках, осталось выбрать в первой строке. Для этого первую строчку умножим на (-1), получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$. Перепишем без изменения первую строку, а все элементы третьего столбца, кроме ведущего элемента, заменим нулями. Применив правило прямоугольника, заполняем до конца матрицу, получаем $\begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \vee \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$. Все ненулевые строки отмечены, значит, полученная расширенная матрица соответствует системе с единичным базисом: $\begin{cases} 0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3=1 \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3=4 \\ 1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=1 \\ x_2=4 \\ x_3=-3 \end{cases}$. Система имеет единственное решение.

Проверка:

$$\begin{cases} 2\cdot(-3)+2\cdot 4-3\cdot 1=-1 \\ 3\cdot(-3)-2\cdot 4+12\cdot 1=-5 \\ -3-4+5\cdot 1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6+8-3=-1 \\ -9-8+12=-5 \\ -3-4+5=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1=-1 \\ -5=-5 \\ -2=-2 \end{cases}, \text{ все верно.}$$

Ответ: $\{-3;4;1\}$.

Раздел II. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
Векторная алгебра
Линейное программирование

В раздел включены задачи, которые рассматриваются в теме «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»: на составление различных уравнений прямых на плоскости и в пространстве; на нахождение точки пересечения прямых на плоскости; на нахождение точки пересечения прямой и плоскости в пространстве. Отметим, что раздел содержит задачи с экономическим содержанием, при решении которых необходимо применить сведения, полученные при изучении данной темы. В теме «Векторная алгебра» рассматриваются задачи, направленные на усвоение понятий вектора, задачи на основные действия с векторами, на нахождение координат вектора, скалярного произведения и косинуса угла между векторами. В теме «Линейное программирование» рассматриваются задачи на составления математических моделей и графический метод.

Задача 2.1.

Даны точки A**,** B**,** C**, которые являются вершинами треугольника** ABC**. Составить уравнения: а) медианы** AM **; б) высоты, проведенной к стороне** AB**; в) найти точку пересечения стороны** AB **с высотой, проведенной к этой стороне; г) используя векторы, найти косинус угла при вершине** B (номер примера соответствует варианту)**:**

1) $A(3;-4)$, $B(2;3)$, $C(-3;5)$
2) $A(-3;4)$, $B(-3;3)$, $C(2;5)$
3) $A(2;5)$, $B(-2;0)$, $C(-3;4)$
4) $A(0;-1)$, $B(2;-5)$, $C(1;7)$
5) $A(0;-1)$, $B(-2;7)$, $C(-3;1)$
6) $A(-3;4)$, $B(2;0)$, $C(-2;-4)$
7) $A(1;-1)$, $B(-2;3)$, $C(3;5)$
8) $A(5;-4)$, $B(-2;1)$, $C(1;3)$
9) $A(1;0)$, $B(-2;-3)$, $C(4;2)$
10) $A(5;-4)$, $B(-4;0)$, $C(3;-1)$
11) $A(-2;1)$, $B(2;2)$, $C(1;-4)$
12) $A(-3;2)$, $B(3;-1)$, $C(-1;-4)$
13) $A(-4;-5)$, $B(1;4)$, $C(6;-3)$
14) $A(-6;2)$, $B(1;7)$, $C(-4;-5)$
15) $A(-6;2)$, $B(1;7)$, $C(6;-3)$
16) $A(-3;2)$, $B(7;3)$, $C(1;-4)$
17) $A(-3;-1)$, $B(4;-2)$, $C(10;1)$
18) $A(-2;-5)$, $B(-1;2)$, $C(12;1)$
19) $A(1;3)$, $B(5;-2)$, $C(-2;-1)$
20) $A(-3;1)$, $B(7;-1)$, $C(1;-2)$.

Пример 2.1.

Даны точки $A(5;3)$**,** $B(-3;4)$**,** $C(0;-5)$**, которые являются вершинами треугольника** ABC**. Составить уравнения: а) медианы** AM **; б) высоты, проведенной к стороне** AB**; в) найти точку пересечения стороны** AB **с высотой, проведенной к этой стороне; г) используя векторы, найти косинус угла при вершине** B**. Изобразить данный треугольник.**

Решение: Решая данные задачи, *студент должен научиться составлять уравнения прямых на плоскости, вычислять координаты векторов, их длины и скалярное произведение.*

а) Медиана AM делит сторону BC пополам. Найдем координаты точки M как середину стороны BC:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4+(-5)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Имеем две точки $A(5;3)$ и $M(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$, следовательно, уравнение медианы, проходящей через данные точки, можно составить по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставив координаты точек, получим

$$\frac{x-5}{-\frac{3}{2}-5}=\frac{y-3}{-\frac{1}{2}-3}$$

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-3}{7}$$

$$7x-13y+4=0.$$

Ответ: уравнение медианы AM имеет вид $7x-13y+4=0$.

б) Высоту, проведенную из точки C к стороне AB, обозначим CH. Вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен высоте CH, а значит, является нормалью. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}=B-A=(-3-5;4-3)=(-8;1)$, из конца вектора вычли начало вектора. Имеем фиксированную точку $C(0;-5)$ и нормаль $AB=(-8;1)$, следовательно, уравнение высоты можно составить по формуле:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Подставим данные, получим

$$-8\cdot(x-0)+1\cdot(y-(-5))=0$$

$$-8x+y+5=0$$

Ответ: уравнение высоты CH имеет вид $-8x+y+5=0$.

в) Точка H является точкой пересечения двух прямых, AB и CH. Найти её координаты, значит решить систему, состоящей из уравнений этих прямых. В предыдущем пункте задачи уравнение CH найдено, осталось составить уравнение стороны AB. Имеем две точки $A(5;3)$ и $B(-3;4)$, следовательно, получим

$$\frac{x-5}{-3-5}=\frac{y-3}{4-3}$$

$$\frac{x-5}{-8}=\frac{y-3}{1}$$

$$x+8y-29=0.$$

Составим систему: $\begin{cases}-8x+y+5=0\\ x+8y-29=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-8x+y=-5\\ x+8y=29\end{cases}$. Решая систему по формулам Крамера (см. пример 1.2.), получим $x=\dfrac{69}{65}$, $y=\dfrac{227}{65}$. Итак, точка $H(\dfrac{69}{65};\dfrac{227}{65})$.

Ответ: $H(\dfrac{69}{65};\dfrac{227}{65})$.

г) Найдем косинус угла при вершине B, используя векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, из формулы скалярного произведения $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC})$. Выразим косинус угла при вершине B,

$$\cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

Сначала, найдём координаты векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (5-(-3); 3-4) = (8;-1),$$

$$\overrightarrow{BC} = (0-(-3); -5-4) = (3;-9).$$

Найдем их длины $\left|\overrightarrow{BA}\right|$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|$:

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{8^2+(-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65},$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3^2+(-9)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10},$$

затем их скалярное произведение в координатах

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 8\cdot 3 + (-1)\cdot(-9) = 24+9 = 33.$$

Теперь найдем $\cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}) = \dfrac{33}{\sqrt{65}\cdot 3\sqrt{10}} = \dfrac{11}{\sqrt{650}}$.

Ответ: $\cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}) = \dfrac{11}{\sqrt{650}}$.

На рис.1 изобразим треугольник ABC, найденную медиану AM и высоту CH.

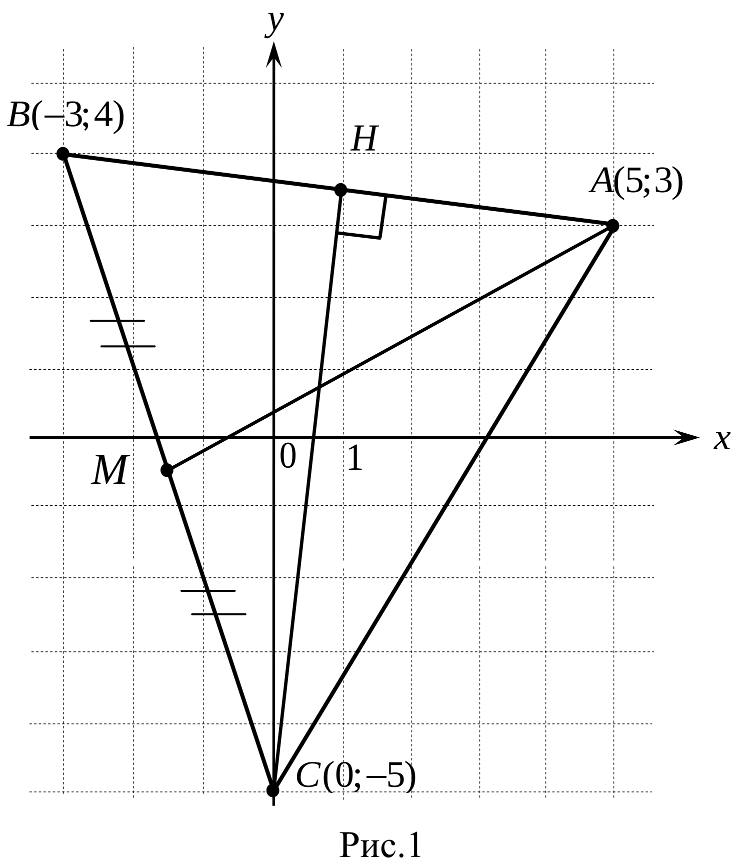

Рис.1

Задача 2.2.

Найти точку пересечения прямой, проходящей через точки A **и** B**, с данной плоскостью** (номер примера соответствует варианту)**:**

1) $A(-3;4;0)$ и $B(3;5;7)$, с плоскостью $3x+4y-z+6=0$;

2) $A(3;5;1)$ и $B(-3;-5;7)$, с плоскостью $x+4y+z-6=0$;

3) $A(3;-1;2)$ и $B(-3;6;4)$, с плоскостью $2x+3y-5z+9=0$;

4) $A(4;5;-1)$ и $B(-3;4;0)$, с плоскостью $3x-y+2z-5=0$;

5) $A(4;-4;1)$ и $B(3;-5;0)$, с плоскостью $3x+4y-z+6=0$;

6) $A(3;-5;1)$ и $B(4;5;2)$, с плоскостью $x+3y-2z+8=0$;

7) $A(2;2;-1)$ и $B(4;-5;1)$, с плоскостью $4x-4y+z-6=0$;

8) $A(3;-4;1)$ и $B(-2;1;0)$, с плоскостью $3x+4y-z+6=0$;

9) $A(1;1;-8)$ и $B(4;-5;2)$, с плоскостью $3x+4y-z+6=0$;

10) $A(2;-7;1)$ и $B(0;2;5)$, с плоскостью $3x+4y-z+6=0$;

11) $A(1;3;-1)$ и $B(3;4;2)$, с плоскостью $2x-y+z-4=0$;

12) $A(2;3;-1)$ и $B(1;2;3)$, с плоскостью $x+2y+3z-14=0$;

13) $A(-1;3;-1)$ и $B(2;-1;4)$, с плоскостью $x+2y-5z+20=0$;

14) $A(1;0;-3)$ и $B(2;0;-1)$, с плоскостью $2x-y+4z=0$;

15) $A(-1;-2;3)$ и $B(-4;0;1)$, с плоскостью $x+3y-5z+9=0$;

16) $A(1;1;-2)$ и $B(3;0;1)$, с плоскостью $4x+2y-z-11=0$;

17) $A(1;8;-5)$ и $B(9;3;7)$, с плоскостью $x-2y-3z+18=0$;

18) $A(1;2;6)$ и $B(8;3;5)$, с плоскостью $4x+y-6z-5=0$;

19) $A(1;3;-5)$ и $B(7;4;-2)$, с плоскостью $3x-2y+5z-3=0$;

20) $A(7;3;-1)$ и $B(10;4;-3)$, с плоскостью $2x+y+7z-3=0$.

<u>Пример 2.2.</u>

Найти точку пересечения прямой, проходящей через точки $A(-1;0;-1)$ **и** $B(-3;0;2)$**, с плоскостью** $x+4y+13z-23=0$**.**

Решение: Найти точку пересечения прямой с плоскостью, значит решить систему из уравнений прямой и плоскости. Для этого *студент должен научиться составлять уравнения прямых в пространстве.* Точку обозначим буквой M. Уравнение плоскости дано, составим уравнение прямой AB, проходящей через две точки $A(-1;0;-1)$ и $B(-3;0;2)$ по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставив координаты точек, получим

$$\frac{x-(-1)}{-3-(-1)}=\frac{y-0}{0-0}=\frac{z-(-1)}{2-(-1)}$$

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}.$$

Составим систему: $\begin{cases} x+4y+13z-23=0 \\ \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{3} \end{cases}$. Уравнение прямой AB приведем к параметрическому виду $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{3}=t \Rightarrow \begin{cases} x=-2t-1 \\ y=0 \\ z=3t-1 \end{cases}$. Параметрические уравнения прямой подставим в уравнение плоскости, получим $1\cdot(-2t-1)+4\cdot 0+13\cdot(3t-1)-23=0$, раскроем скобки, приведем подобные и выразим параметр t: $-2t-1+39t-13-23=0 \Rightarrow 37t-37=0 \Rightarrow 37t=37 \Rightarrow t=1$. Подставляя это значение в параметрические уравнения прямой, получаем координаты точки M $\begin{cases} x=-2\cdot 1-1=-3 \\ y=0 \\ z=3\cdot 1-1=2 \end{cases}$. Итак, точка $M(-3;0;2)$.

Ответ: $M(-3;0;2)$.

Задача 2.3.

Имеется информация о спросе на товар (D) и его предложении (S), представленная в таблицах, где P - цена на товар, Q - количество товара. Необходимо: а) Составить функции спроса и предложения; б) Определить точку рыночного равновесия; в) Сделать чертеж графиков спроса, предложения и указать точку рыночного равновесия. Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	2	7
II	4	1

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	1	2
II	6	7

2)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	10
II	5	2

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	3	10
II	4	12

3)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	8
II	4	2

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	2	3
II	5	6

4)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	14
II	2	13

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	2	7
II	6	15

5)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	10
II	4	4

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	1	5
II	3	11

6)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	15
II	4	6

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	2	7
II	5	13

7)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	2	11
II	5	8

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	1	17
II	2	21

8)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	14
II	5	10

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	2	10
II	5	16

9)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	5	7
II	6	6

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	4	12
II	5	13

10)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	2	12
II	5	3

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	1	3
II	6	8

11)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	5
II	4	2

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	3	5
II	6	8

12)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	6
II	3	4

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	3	7
II	4	9

13)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	2	9
II	4	1

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	1	3
II	5	7

14)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	7
II	5	3

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	3	8
II	6	14

15)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	1	15
II	5	7

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	2	5
II	3	7

16)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	3	8
II	4	4

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	1	8
II	3	16

17)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	3	7
II	5	5

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	1	5
II	3	11

18)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	2	15
II	5	9

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	3	4
II	4	5

19)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	3	6
II	5	4

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	1	5
II	3	9

20)

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	4	3
II	5	1

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	2	4
II	5	7

Пример 2.3.

Имеется информация о спросе (D) на товар и его предложении (S), представленная в таблицах, где P – цена на товар, Q – количество товара. Необходимо: а) Составить функции спроса и предложения; б) Определить точку рыночного равновесия; в) Сделать чертеж графиков спроса, предложения и указать точку рыночного равновесия.

таблица 1

№ периода	Q кол-во	P_D ден. ед
I	3	3
II	4	1

таблица 2

№ периода	Q кол-во	P_S ден. ед
I	1	4
II	3	6

Решение: а) Составим функцию спроса, исходя из предположения, что она линейна. Последнее предположение мы делаем исходя из наличия данных всего об одном изменении цены (и соответственно одном изменении величины спроса). Таким образом, в нашем распоряжении имеется всего 2 точки кривой спроса (см. таблицу 1). Как известно, через 2 точки, не зная характера кривой и вида функции, можно провести только прямую линию. Линейная функция в соответствующих обозначениях имеет вид: $P_D = a + bQ$. Для нахождения неизвестных параметров a и b составим систему линейных уравнений: $\begin{cases} 3 = a + b3 \\ 1 = a + b4 \end{cases}$. Решая систему по формулам Крамера (см. пример 1.2), получим $\begin{cases} a = 9 \\ b = -2 \end{cases}$. Итак, получим вид искомой функции спроса $P_D = -2Q + 9$. Аналогично, составим функцию предложения, которая в соответствующих обозначениях имеет вид: $P_S = a + bQ$. Для нахождения неизвестных параметров a и b составим систему линейных уравнений: $\begin{cases} 4 = a + b \\ 6 = a + b3 \end{cases}$. Решая систему по формулам Крамера, получим $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$. Итак, получим вид искомой функции предложения $P_S = Q + 3$.

Ответ: $P_D = -2Q + 9$ – функция спроса, $P_S = Q + 3$ – функция предложения.

б) Рыночное равновесие достигается из условия $P_Q = P_S$:

$$-2Q + 9 = Q + 3$$
$$-2Q - Q = 3 - 9$$
$$-3Q = -6$$
$$Q = 2$$

Подставив, найденное значение $Q = 2$, либо в функцию спроса, либо в функцию предложения, получим $P = 5$.

Ответ: $M(2;5)$ – точка рыночного равновесия.

в) Итак, сделаем чертеж графиков спроса, предложения и укажем точку $M(2;5)$ рыночного равновесия на рис.2.

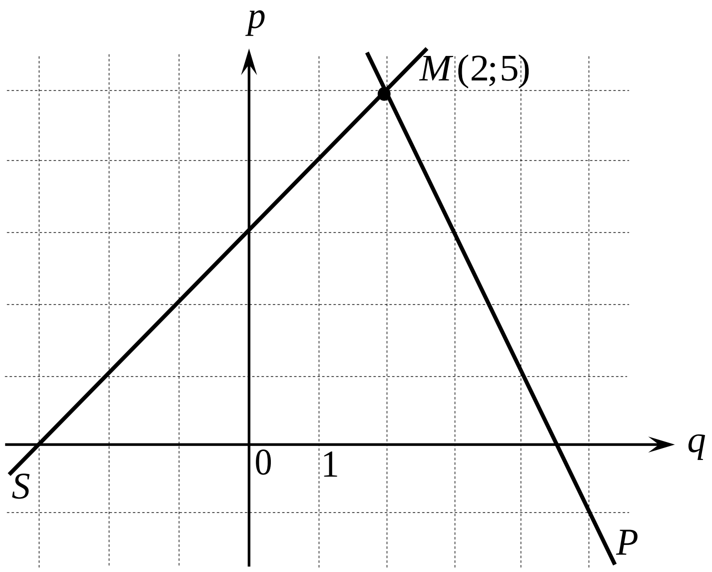

Рис.2

Задача 2.4.

Для изготовления двух видов продукции A и B используют два вида сырья S_1 и S_2. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в таблице. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль. Составить математическую модель задачи и решить графическим методом.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	18	3	1
S_2	42	3	7
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		1	4

2)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	18	3	1
S_2	42	3	7
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		5	1

3)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	10	2	1
S_2	5	1	3
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		2	3

4)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	10	2	1
S_2	5	1	3
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		7	1

5)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	81	9	2
S_2	70	1	7
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		3	4

6)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	28	4	3
S_2	12	1	2
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		1	1

7)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	28	4	3
S_2	12	1	2
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		1	3

8)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	28	4	3
S_2	12	1	2
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		3	1

9)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	126	9	1
S_2	96	3	13
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		5	3

10)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	126	9	1
S_2	96	3	13
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		1	7

11)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	20	4	1
S_2	8	1	1
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		3	2

12)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	20	4	1
S_2	8	1	1
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		1	3

13)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	84	7	4
S_2	22	1	2
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		4	3

14)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	84	7	4
S_2	22	1	2
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		1	4

15)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	90	9	4
S_2	60	1	6
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		5	4

16)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	90	9	4
S_2	60	1	6
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		3	1

17)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	18	3	2
S_2	10	1	2
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		1	1

18)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	18	3	2
S_2	10	1	2
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		1	4

19)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	24	2	1
S_2	90	4	9
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		4	3

20)

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	*B*
S_1	24	2	1
S_2	90	4	9
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		1	3

Пример 2.4.

Для изготовления двух видов продукции A и B используют два вида сырья S_1 и S_2. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в таблице. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль. Составить математическую модель задачи и решить графическим методом.

Виды сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		A	B
S_1	14	1	1
S_2	63	2	7
Прибыль от единицы продукции (в тыс. долл.)		2	3

Решение: Чтобы составить математическую модель задачи ЛП (линейного программирования), *необходимо*:

1. Ввести обозначения переменных;
2. Учитывая ограничения в использовании экономических показателей задачи и их количественные закономерности, записать систему ограничений.
3. Исходя из цели экономических исследований, составить целевую функцию;

Итак, во – первых, введем переменные x_1 – объем производства продукции вида A, т., x_2 – объем производства продукции вида B, т.

Во – вторых, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 14 \\ 2x_1 + 7x_2 \le 63 \end{cases},$$

где по смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

В – третьих, так как цель – увеличение прибыли, то найдем общий доход от реализации 1 т. продукции вида A и 1т. продукции вида B (в тыс. долл.), то есть, составляем целевую функцию вида

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max .$$

Получили математическую модель задачи линейного программирования:

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max \quad (0)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 14 \quad (1) \\ 2x_1 + 7x_2 \le 63 (2) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \qquad (3)$$

$$x_2 \ge 0 \qquad (4)$$

Решим задачу ЛП графическим методом: а) Запишем уравнения прямых, соответствующих ограничениям (1) – (4) и построим их на плоскости X_1OX_2 (см. рис. 3)

$$x_1 + x_2 = 14 \text{ по точкам } (0;14),\ (14;0)$$

$$2x_1 + 7x_2 = 63 \text{ по точкам } (0;9),\ (20;3)$$

$$x_1 = 0 \text{ (ось } OX_2\text{)}$$

$$x_2 = 0 \text{ (ось } OX_1\text{)}$$

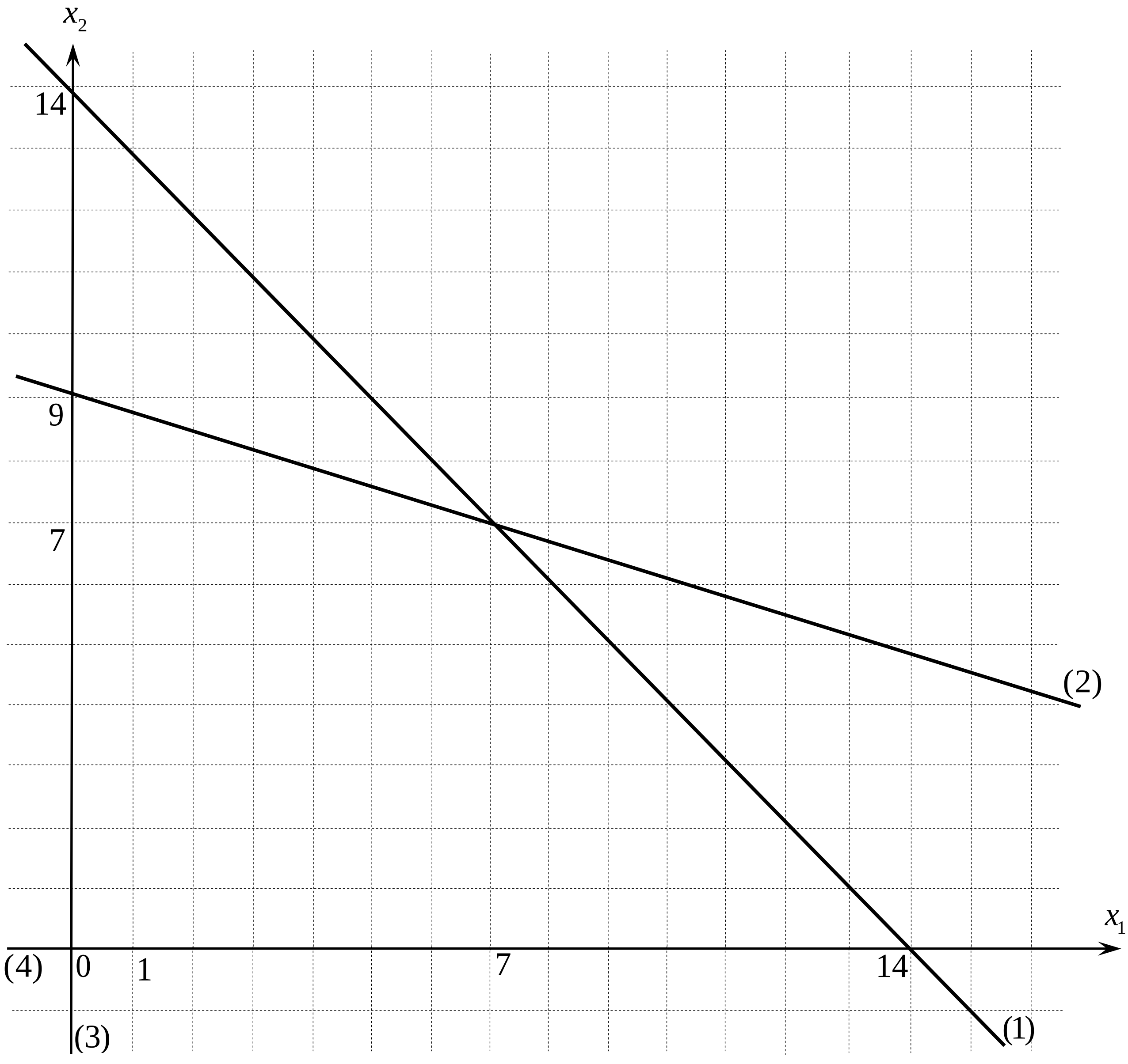

Рис.3

б) Заштрихуем многоугольник, соответствующий ограничениям (1) – (4) (см. рис. 4)

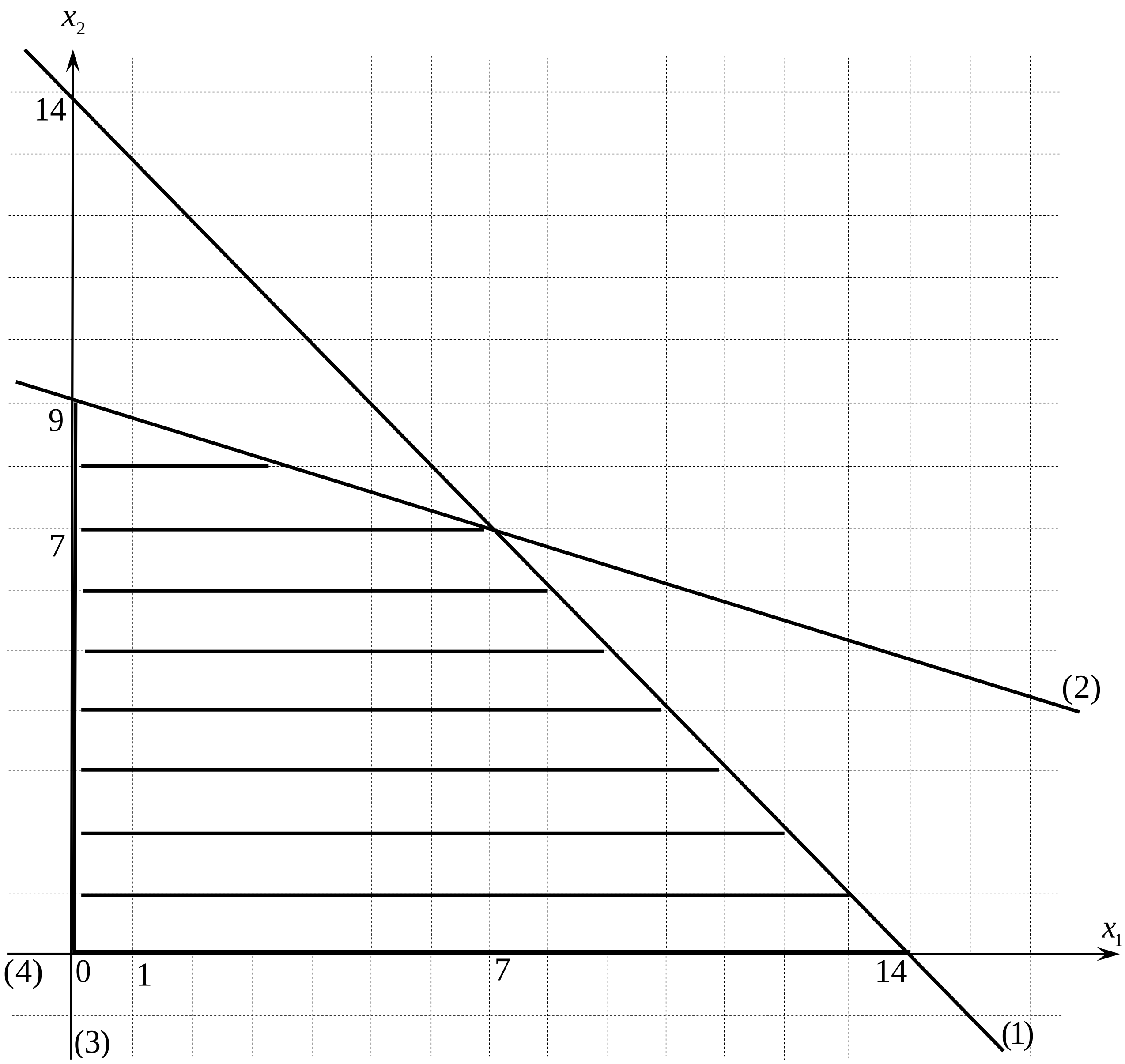

Рис.4

в) Приравняем целевую функцию (0) к нулю и нанесем ее график на рис. 5

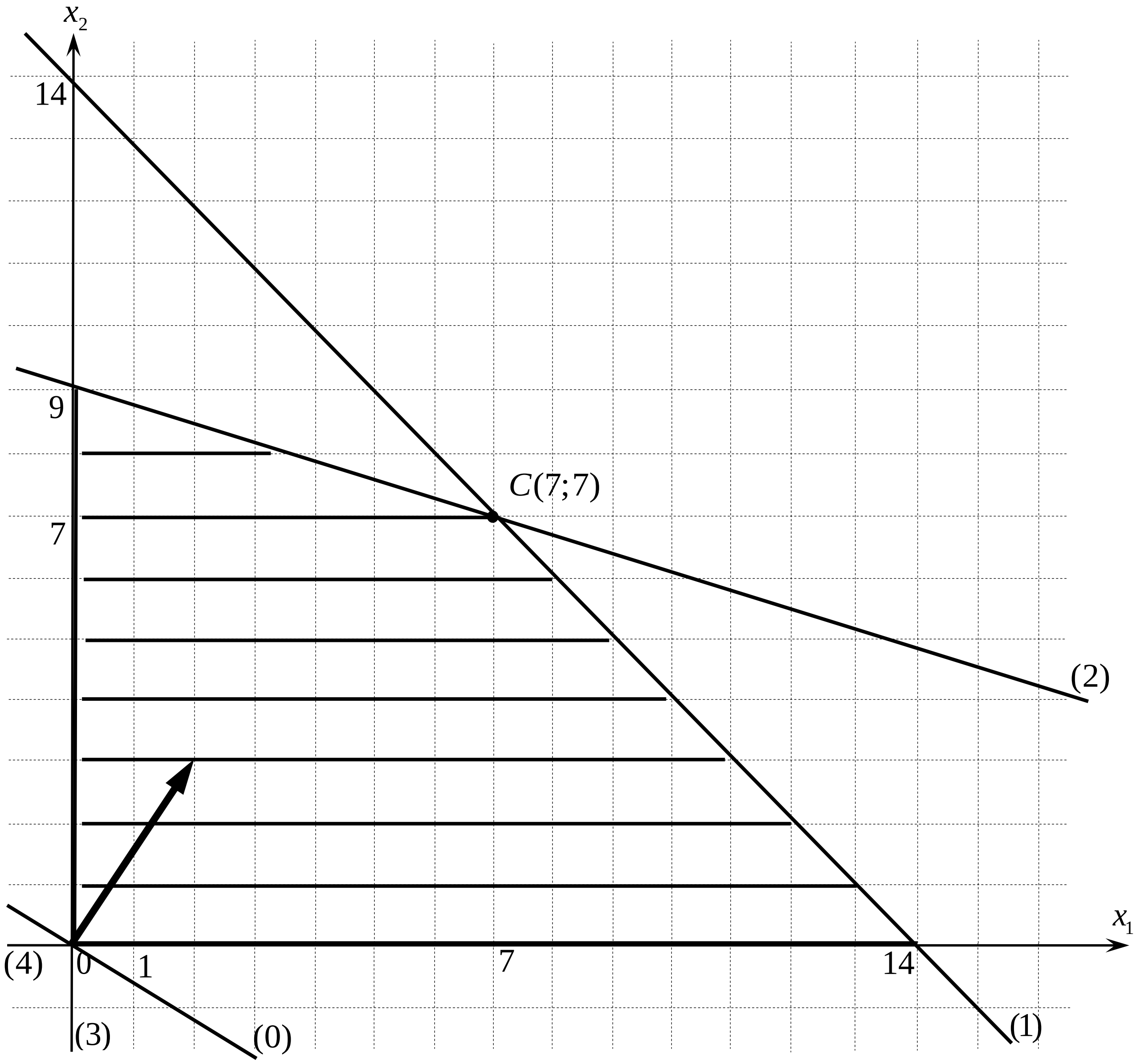

Рис.5

Чтобы найти оптимальное решение, следует перемещать прямую (0), в направлении многоугольника ограничений. Прибыль будет максимальной в той точке многоугольника ограничений, которой прямая (0) коснется последней.

В данном случае это точка C, которая является пересечением прямых, соответствующих ограничениям (1) и (2). Решая систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 \\ 2x_1 + 7x_2 = 63 \end{cases}$ по формулам Крамера (см. пример 1.2), получим координаты точки $C(7;7)$.

Ответ. Объем производства продукций вида A и B должен быть по 7 т. Доход, получаемый в этом случае, составит

$$2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 14 + 21 = 35 \text{ тыс. долл.}$$

Раздел III. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

В данный раздел включены основные типы задач, которые рассматриваются в теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»: вычисление производной явно заданных функций, нахождение наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке, приведены задачи на применение дифференциального исчисления к исследованию функций и текстовым задачам. Отметим, что раздел содержит задачи с экономическим содержанием, при решении которых необходимо применить сведения, полученные при изучении данной темы. При решении задач этого раздела необходимо знать правила дифференцирования и таблицу производных; рекомендуется повторить теоретический материал, рассмотренный на лекциях по данной теме.

Задача 3.1.

Вычислить производные функций (номер примера соответствует варианту):

1.	$y=2^x\cos x$	$y=3-\dfrac{tgx}{3^x}$	$y=\cos 3x+e^{3x}$	$y=\log_2^5 x$
2.	$y=tgx\log_2 x$	$y=\dfrac{\sin x}{3(2x+1)}$	$y=2^{\sin x}+e^{5x}$	$y=(2x+3)^5$
3.	$y=(3x^2+10)\cos x$	$y=\dfrac{2x^2}{\cos x}$	$y=2\cos 3x-2e^{3x}$	$y=(x+8)^8$
4.	$y=(x^2-8)ctgx$	$y=\dfrac{3x^3}{\sin x}$	$y=3\sin 2x-4e^{2x}$	$y=(\sin x)^2$
5.	$y=(3x-5)3^x$	$y=\dfrac{\cos x}{x^2+2}$	$y=tg2x+2e^{4x}$	$y=(\cos x)^2$
6.	$y=ctgxe^x$	$y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$	$y=\sin 6x-2e^{3x}$	$y=(\sin x)^3$
7.	$y=x^2tgx$	$y=\dfrac{x}{1-4x^2}$	$y=3\cos 5x+5e^{4x}$	$y=(\cos x)^3$
8.	$y=3e^x\cos x$	$y=\dfrac{x^2}{1-2x}$	$y=4\cos 2x+5e^{-x}$	$y=(x+3)^{10}$
9.	$y=\cos x\sin x$	$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	$y=2\sin 2x+2e^{-2x}$	$y=(x-3)^9$
10.	$y=tgx(x^3+3)$	$y=\dfrac{1}{\cos x}$	$y=3tg2x+e^{-4x}$	$y=(3x+1)^8$
11.	$y=3^x\sin x$	$y=\dfrac{3x^3}{\cos x}$	$y=4\cos 3x+3e^{5x}$	$y=(2x+1)^{12}$
12.	$y=tgx\cos x$	$y=\dfrac{\sin x}{1-3x^2}$	$y=3ctg5x+5e^{-3x}$	$y=(8-x)^7$

13.	$y=(x^2+1)10^x$	$y=\dfrac{x}{1-5x}$	$y=2tg3x+3e^{5x}$	$y=(5x-1)^2$
14.	$y=(4x+1)\log_3 x$	$y=\dfrac{\sin x}{1+2\cos x}$	$y=5\sin 3x+3e^{\frac{1}{2}x}$	$y=(tgx)^7$
15.	$y=\cos x(4-x^2)$	$y=\dfrac{4x^2}{1+x}$	$y=3^{\cos x}+\sin 7x$	$y=(ctgx)^{10}$
16.	$y=4e^x tgx$	$y=\dfrac{2x-1}{x^3}$	$y=4^{\sin x}+tg\dfrac{x}{2}$	$y=(1-4x)^7$
17.	$y=\log_7 xctgx$	$y=\dfrac{\sin x}{5x+2}$	$y=2\cos 7x+3e^{-2x}$	$y=(7-8x)^3$
18.	$y=\sqrt{x}\sin x$	$y=\dfrac{\cos x}{4-x}$	$y=3\sin 8x-2^{4x}$	$y=(1+4x)^{10}$
19.	$y=\log_5 x\cos x$	$y=\dfrac{x^2-1}{3(2x+1)}$	$y=5^{tgx}+e^{-7x}$	$y=(3x+7)^3$
20.	$y=(\dfrac{x^2}{2}-5)tgx$	$y=\dfrac{1}{\sin x}$	$y=7\sin 2x+8e^{-13x}$	$y=(6x+1)^{12}$

Пример 3.1. **Вычислить производные функций:** $y=x^3\sin x$, $y=\dfrac{1-x}{2x^2}$, $y=10^{tgx}-\cos 5x$, $y=(5-4x)^7$.

Решение: Решая данную задачу, *студент должен знать всю таблицу производных и правила нахождения производной явно заданных функций.* Напомним некоторые формулы и правила нахождения производной:

$$c'=0 \qquad (1)$$

$$(x^n)'=nx^{n-1} \qquad (2)$$

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (3)$$

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad (4)$$

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (5)$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (6)$$

$$(e^x)'=e^x \qquad (7)$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (8)$$

$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (9)$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad (10)$$

$$(uv)'=u'v+uv' \qquad (11)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (12)$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \qquad (13)$$

Найдем производную первой функции в соответствии с формулами (2), (3) и (11):

$$y' = (x^3)'\sin x + x^3(\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x .$$

Найдем производную второй функции в соответствии с формулами (1), (2), (10) и (12):

$$y' = \frac{(1-x)'2x^2 - (1-x)(2x^2)'}{(2x^2)^2} = \frac{-2x^2 - (1-x)4x}{4x^4} = \frac{2x^2 - 4x}{4x^4} = \frac{x-2}{2x^3},$$

вычислив производную, упростили дробь.

Найдем производную третьей функции в соответствии с формулами (4), (6), (10) и (13):

$$y' = (10^{tgx})' - (\cos 5x)' = 10^{tgx}\ln 10 (tgx)' - (-\sin 5x)(5x)' = 10^{tgx}\ln 10 \frac{1}{\cos^2 x} + 5\sin 5x .$$

Найдем производную четвертой функции в соответствии с формулами (1), (2), (10) и (13):

$$y' = ((5-4x)^7)' = 7(5-4x)^6(5-4x)' = 7(5-4x)^6(-4) = -28(5-4x)^6 .$$

Задача 3.2.

Найти наименьшие и наибольшие значения функции на заданном отрезке (номер примера соответствует варианту)**:**

1. $f(x) = x^3 - 12x + 7; [0;3]$

2. $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2; [0;2]$

3. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2; [-3;1]$

4. $f(x) = x^3 - 3x + 1; \left[\frac{1}{2};2\right]$

5. $f(x) = x^4 + 4x; [-2;2]$

6. $f(x) = 32 - x^4; [-1;4]$

7. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x; [0;2]$

8. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1; [0;3]$

11. $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - x^3 + 11; [0;2]$

12. $f(x) = 2x^3 - 24x + 12; [0;3]$

13. $f(x) = 6x^4 - 40x^3 + 21; [-2;1]$

14. $f(x) = 5x^3 - 15x + 3; [-1;2]$

15. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x + 5; [-2;2]$

16. $f(x) = x^4 - 108x - 13; [0;4]$

17. $f(x) = 21x^2 - 14x^3 - 1; [-1;3]$

18. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3; [-1;2]$

9. $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3;[1;3]$

10. $f(x)=4x-\frac{x^3}{3};[-1;3]$

19. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2;[-1;1]$

20. $f(x)=3x-x^3+4;[-1;2]$

Пример 3.2.

Найти наименьшие и наибольшие значения функции на заданном отрезке: $f(x)=x^3-6x^2+9x;[-4;4]$.

Решение: Функция $f(x)=x^3-6x^2+9x$ определена на заданном отрезке $[-4;1]$ по условию задачи. Вычислим производную данной функции: $f'(x)=(x^3)'-(6x^2)'+(9x)'=3x^2-12x+9$, применив формулу (2) из предыдущего примера 1.1. Найдем точки, в которых производная функции равна нулю

$$f'(x)=0,\ 3x^2-12x+9=0:3$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$D=16-4\cdot3=16-12=4=2^2$$

$$x_1=\frac{4-2}{2}=1$$

$$x_2=\frac{4+2}{2}=3.$$

Полученные точки принадлежат заданному отрезку. Следовательно, определим значение функции в найденных точках и на концах заданного отрезка и выберем среди них наибольшее и наименьшее

$$f(-4)=(-4)^3-6(-4)^2+9(-4)=-64-96-36=-196,$$

$$f(1)=1-6+9=4,$$

$$f(3)=3^3-6\cdot3^2+9\cdot3=27-54+27=0.$$

Ответ: $f(-4)=-196$ – наименьшее значение функции, $f(1)=4$ – наибольшее значение функции.

Задача 3.3.

Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график (номер примера соответствует варианту)**:**

1. $y=x^3+\frac{x^4}{4}$

2. $y=x^3+6x^2+9x$

3. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$

4. $y=\frac{x^3}{3}+x^2$

11. $y=4x^3+3x^4$

12. $y=x^3+9x^2+24x$

13. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2$

14. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$

5. $y=\frac{x^5}{5}-x^4+x^3$

6. $y=\frac{x^4}{4}-x^3$

7. $y=1+2x^2-\frac{x^4}{4}$

8. $y=4x-\frac{x^3}{3}$

9. $y=x^5-x^3-2x$

10. $y=x^5-\frac{5}{3}x^3$

15. $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3$

16. $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3$

17. $y=\frac{9}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4$

18. $y=3x-x^3$

19. $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3$

20. $y=\frac{1}{3}x^3+4x^2+15x$

Пример 3.3.

Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график: $y=8x^2-\frac{x^4}{4}$**.**

Решение: Чтоб решить данную задачу, *студенту необходимо знать план полного исследования функции и уметь строить графики в декартовой системе координат в заданном масштабе.*

Проведем полное исследование функции по следующему плану:

1) Область определения

$$D(y)=(-\infty;+\infty).$$

2) Четность и нечетность

Найдем $y(-x)$: $y(-x)=8(-x)^2-\frac{(-x)^4}{4}=8x^2-\frac{x^4}{4}=y(x)$ поскольку $y(-x)=y(x)$, значит, функция является четной. Следовательно, график функции симметричен относительно оси Oy.

3) Точки пересечения с осями координат

С осью Ox: $y=0$, т.е. необходимо решить уравнение

$$8x^2-\frac{x^4}{4}=0$$

$$x^2(8-\frac{x^2}{4})=0$$

$$x_1=0,$$

$$x_2=4\sqrt{2}\approx 5{,}6,$$

$$x_3=-4\sqrt{2}\approx -5{,}6.$$

Три точки пересечения с осью Ox: $(0;0)$, $(-5{,}6;0)$, $(5{,}6;0)$.

С осью Oy: $x=0$, т.е. в уравнение функции вместо аргумента x подставим значение ноль и получим $y=8\cdot 0^2-\dfrac{0^4}{4}=0$. Точка пересечения с осью $Oy:(0;0)$.

4) <u>Промежутки возрастания и убывания, точки экстремума</u>

Найдем производную первого порядка исследуемой функции

$$y'=16x-x^3=x(16-x^2)=x(4-x)(4+x).$$

Найдем точки, в которых производная обращается в ноль, и отметим их на числовой прямой (рис.1)

$$x(4-x)(4+x)=0$$

$$x_1=0,\ x_2=4,\ x_3=-4.$$

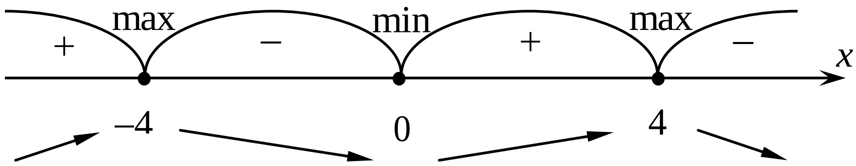

Рис.1

Проверим знак первой производной функции в каждом из полученных промежутков

$$y'(-5)=-5(4-(-5))(4+(-5))=-5(4+5)(4-5)=45>0,$$

$$y'(-1)=-1(4+1)(4-1)=-15<0,$$

$$y'(1)=1(4-1)(4+1)=15>0,$$

$$y'(5)=5(4-5)(4+5)=-45<0.$$

Если значение производной функции на промежутке отрицательно, то функция убывает, если положительно, то функция возрастает. Точка, в которой производная меняет знак, является точкой экстремума. Причем, если производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то эта точка является точкой максимума (точкой минимума). Следовательно

функция убывает при $x\in\left[-4;0\right]\cup\left[4;+\infty\right)$,

функция возрастает при $x\in\left(-\infty;-4\right]\cup\left[0;4\right]$,

$$x_{\min}=0,\ y_{\min}=0,$$

$$x_{\max}=\pm 4,\ y_{\max}=64.$$

Три точки экстремума с координатами: $(0;0)$ – точка минимума, $(-4;64)$, $(4;64)$ – точки максимума.

5) <u>Промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба</u>

Найдем производную второго порядка исследуемой функции

$$y''=16-3x^2.$$

Найдем точки, в которых вторая производная обращается в ноль, и отметим их на числовой прямой (рис.2)

$$16-3x^2=0$$

$$3x^2=16$$

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,4,\; x_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}} \approx -2,4$$

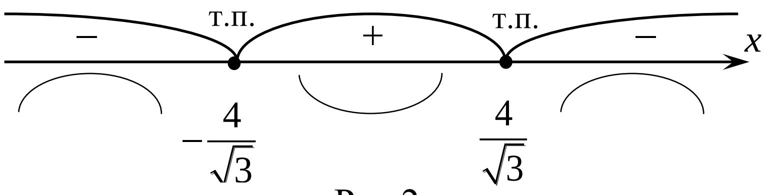

Рис.2

Проверим знак второй производной функции в каждом из полученных промежутков

$$y''(-3) = 16 - 3(-3)^2 = 16 - 27 = -11 < 0,$$

$$y''(1) = 16 - 3 = 13 > 0,$$

$$y''(3) = 16 - 3(3)^2 = 16 - 27 = -11 < 0.$$

Если значение второй производной функции на промежутке отрицательно, то функция выпукла вверх, если положительно, то функция выпукла вниз. Точка, в которой производная меняет знак, является точкой перегиба. Следовательно

функция выпукла вверх при $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{4}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$,

функция выпукла вниз при $x \in \left[-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}\right]$,

$$y(\pm\frac{4}{\sqrt{3}}) = 8(\pm\frac{4}{\sqrt{3}})^2 - \frac{1}{4}(\pm\frac{4}{\sqrt{3}})^4 = 8 \cdot \frac{16}{3} - \frac{64}{9} = \frac{320}{9} \approx 35,6.$$

Две точки перегиба с координатами $(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{320}{9})$ и $(\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{320}{9})$.

6) Асимптоты

Функция определена на всей числовой прямой, значит, вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты находим в виде $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(y(x) - kx\right)$. Если значения этих пределов существуют, то у функции есть наклонные асимптоты, если не существуют, то у функции наклонных асимптот нет.

Найдем k для исследуемой функции, вычислив предел по правилу Лопиталя:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x^2 - \frac{x^4}{4}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{16x - x^3}{1} = \lim_{x\to\pm\infty}(16x - x^3) = \infty.$$

Следовательно, наклонных асимптот нет.

7) График

Согласно проведенному исследованию, построим график функции $y = 8x^2 - \dfrac{x^4}{4}$ (рис.3)

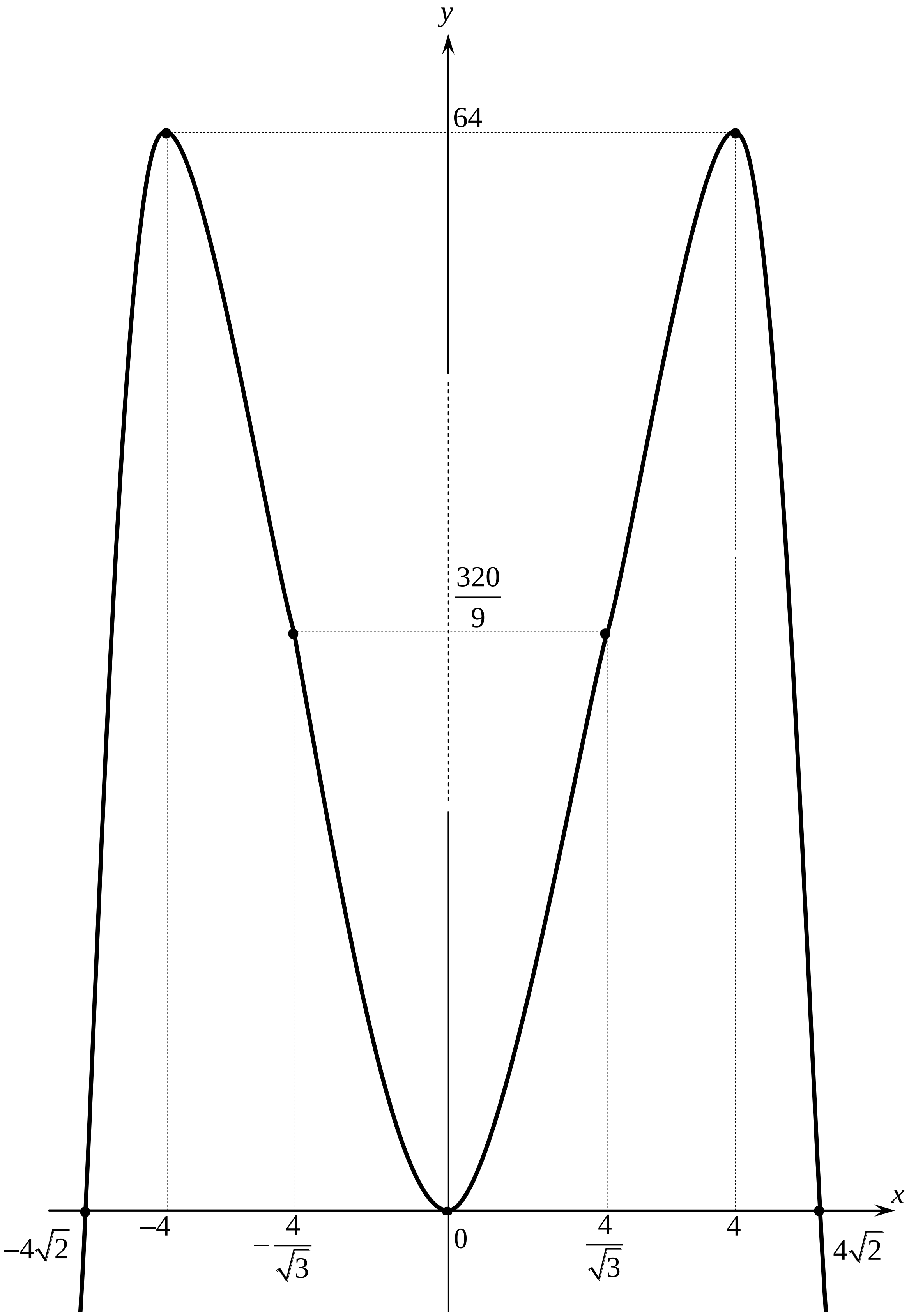

Рис.3

Задача 3.4.

Решить текстовую задачу (номер примера соответствует варианту)**:**

1. Из прямоугольного листа картона размером $2{,}4\times1{,}5$ м^2 требуется изготовить коробку без крышки. Какова должна быть сторона квадратов, вырезанных из четырех углов листа, чтобы объем полученной коробки был максимальным? Чему равен объем такой коробки?

2. Если собрать урожай в начале августа, то с каждой сотки можно получить 200 кг раннего картофеля и реализовать его по 12 руб. за килограмм. Отсрочка уборки на каждую неделю ведет к увеличению урожайности на 50 кг с одной сотки, но цена картофеля за килограмм при этом падает на 2 руб. Когда следует собрать картофель, чтобы доход от его продажи был максимальным, если срок уборки 5 недель?

3. Окно в загородном доме имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 8. При каком радиусе полукруга площадь окна будет наибольшей?

4. Число 204 разложить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:7, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

5. Требуется огородить прямоугольную площадь вдоль уже выстроенной стены. Стоимость ограждения стороны, параллельной стене, равна 60 руб. за один метр; стоимость ограждения двух других сторон составляет 90 руб. за метр. Какая максимальная площадь может быть огорожена, если имеется всего 10800 руб.?

6. Из квадратного листа картона со стороной 36 м требуется изготовить коробку без крышки. Какова должна быть сторона квадратов, вырезанных из четырех углов листа, чтобы объем полученной коробки был максимальным? Чему равен объем такой коробки?

7. Если собрать урожай в начале августа, то с каждой сотки можно получить 400 кг раннего картофеля и реализовать его по 24 руб. за килограмм. Отсрочка уборки на каждую неделю ведет к увеличению урожайности на 50 кг с одной сотки, но цена картофеля за килограмм при этом падает на 2 руб. Когда следует собрать картофель, чтобы доход от его продажи был максимальным, если срок уборки 5 недель?

8. Окно в загородном доме имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 12. При каком радиусе полукруга площадь окна будет наибольшей?

9. Число 120 разложить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:4, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

10. Требуется обустроить прямоугольную площадку так, чтобы с трех сторон она была огорожена сеткой, а четвертой стороной примыкала к длинной каменной стене. Каковы должны быть размеры площадки, чтобы ее площадь была наибольшей, если имеется 200 метров сетки.

11. Из прямоугольного листа картона размером 80×50 м^2 требуется изготовить коробку без крышки. Какова должна быть сторона квадратов, вырезанных из четырех углов листа, чтобы объем полученной коробки был максимальным? Чему равен объем такой коробки?

12. Если собрать урожай в начале августа, то с каждой сотки можно получить 600 кг раннего картофеля и реализовать его по 36 руб. за килограмм. Отсрочка уборки на каждую неделю ведет к увеличению урожайности на 50 кг с одной сотки, но цена картофеля за килограмм при этом падает на 2 руб. Когда следует собрать картофель, чтобы доход от его продажи был максимальным, если срок уборки 6 недель?

13. Окно в загородном доме имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 24. При каком радиусе полукруга площадь окна будет наибольшей?

14. Число 240 разложить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:4, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

15. Требуется обустроить прямоугольную площадку так, чтобы с трех сторон она была огорожена сеткой, а четвертой стороной примыкала к длинной каменной стене. Каковы должны быть размеры площадки, чтобы ее площадь была наибольшей, если имеется 360 метров сетки.

16. Из квадратного листа картона со стороной 72 м требуется изготовить коробку без крышки. Какова должна быть сторона квадратов, вырезанных из четырех углов листа, чтобы объем полученной коробки был максимальным? Чему равен объем такой коробки?

17. Если собрать урожай в начале августа, то с каждой сотки можно получить 100 кг раннего картофеля и реализовать его по 12 руб. за килограмм. Отсрочка уборки на каждую неделю ведет к увеличению урожайности на 50 кг с одной сотки, но цена картофеля за килограмм при этом падает на 2 руб. Когда следует собрать картофель, чтобы доход от его продажи был максимальным, если срок уборки 5 недель?

18. Окно в загородном доме имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 36. При каком радиусе полукруга площадь окна будет наибольшей?

19. Число 360 разложить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:4, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

20. Требуется обустроить прямоугольную площадку так, чтобы с трех сторон она была огорожена сеткой, а четвертой стороной примыкала к длинной каменной стене. Каковы должны быть размеры площадки, чтобы ее площадь была наибольшей, если имеется 240 метров сетки.

Пример 3.4.

Решить текстовую задачу: Окно в загородном доме имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 16. При каком радиусе полукруга площадь окна будет наибольшей?

Решение: Чтоб решить данную задачу, *студенту необходимо знать алгоритм решения текстовых задач с применением производной первого порядка. Алгоритм заключается в следующем: чтобы определить при каком* *радиусе r полукруга площадь S окна будет наибольшей, требуется задать функцию, зависимую от радиуса $S(r)$; найти ее производную; затем найти точки, в которых производная обращается в ноль, и отметить их на числовой прямой. Ответом задачи будет $r_{\max}$.*

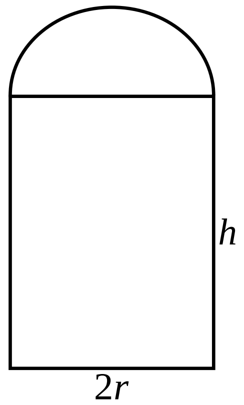

Рис.4

Обозначим высоту окна переменной h, радиус полукруга переменной r, а ширина окна будет равна $2r$ (рис.4).

Периметр окна определяется по формуле

$$P = 2r + h + h + \frac{2\pi r}{2} = 2r + 2h + \pi r .$$

Площадь окна определяется по формуле

$$S = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} .$$

Требуется задать функцию, зависимую от радиуса $S(r)$. Следовательно, переменную h выразим из формулы периметра, причем по условию задачи периметр равен 16. Итак,

$$16 = 2r + 2h + \pi r$$
$$2h = 16 - 2r - \pi r$$
$$h = \frac{16 - 2r - \pi r}{2}$$
$$h = 8 - r - \frac{\pi r}{2} .$$

Выразив h, подставим выражение в формулу площади окна, получим функцию вида

$$S(r) = 2r(8 - r - \frac{\pi r}{2}) + \frac{\pi r^2}{2} = 16r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2} = 16r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2} .$$

Найдем производную первого порядка полученной функции

$$S'(r) = 16 - 4r - \pi r .$$

Найдем точки, в которых первая производная обращается в ноль, и отметим их на числовой прямой (рис.5)

$$16 - 4r - \pi r = 0$$
$$4r + \pi r = 16$$
$$r(4 + \pi) = 16$$

$$r_{\max} = \frac{16}{4+\pi} \approx 2,2$$

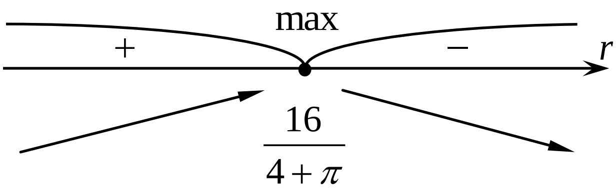

Рис.5

Проверим знак первой производной функции в каждом из полученных промежутков

$$S'(1) = 16 - 4 - 3,14 = 8,86 > 0,$$

$$S'(3) = 16 - 4 \cdot 3 - 3,14 \cdot 3 = 16 - 12 - 9,42 = -5,42 < 0.$$

Значение производной функции на первом промежутке положительно, а на втором промежутке отрицательно. Следовательно, точка r является точкой максимума. Значит, при радиусе $r_{\max} = \dfrac{16}{4+\pi}$ полукруга площадь окна будет наибольшей.

Ответ: $r_{\max} = \dfrac{16}{4+\pi}$.

Раздел IV. Функции нескольких переменных

В раздел включены задачи, которые рассматриваются в теме «Функции нескольких переменных»: нахождение частных производных первого и второго порядка, градиента, вычисление смешанных производных, исследование функции нескольких переменных (ФНП) на экстремум. При решении задач этого раздела необходимо знать правила вычисления частных производных первого, второго порядков и метод наименьших квадратов; рекомендуется повторить теоретический материал, рассмотренный на лекциях по данной теме.

Задача 4.1.

а) Найти экстремум ФНП; б) найти градиент ФНП в заданной точке (номер примера соответствует варианту)**:**

1) а) $z = 2x^2 + xy + y^2 + 2x - 7y + 1$;

б) $z = x^2 + 2xy - 4x + 4y - y^3$ в заданной точке $A(0;1)$.

2) а) $z = 2x^2 + xy + y^2 + 2x - 7y + 1$;

б) $z = x^2 + 2xy - 4x + 4y - y^2 + 5$ в заданной точке $B(-1;1)$.

3) а) $z = 4xy + 2y^2 - 3x^2 + 4x - 7y + 4$;

б) $z = x^2 + 2xy - 4x + 4y$ в заданной точке $C(-2;1)$.

4) а) $z=\frac{x^2}{2}+2xy-4y^2+5x+6y+3$;

б) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2xy+x-4y+8$ в заданной точке $A(0;-2)$.

5) а) $z=2x^2+xy+y^2-\frac{(x+y)}{2}$;

б) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-\frac{xy}{2}+y-2x+2$ в заданной точке $B(-2;1)$.

6) а) $z=(2x-y)^2+x^2-4y+3$;

б) $z=8x^3y-3xy+2$ в заданной точке $C(-1;-1)$.

7) а) $z=x^2+5xy-4y^2+x-7y+5$;

б) $z=x^2y-y^3-x^2-3y^2+3$ в заданной точке $A(-2;-1)$.

8) а) $z=-x^2+4xy-3y^2+5x-3y+2$;

б) $z=2x^3-12x^2y-9x^2+16y^3$ в заданной точке $B(-2;3)$.

9) а) $z=-2x^2+xy+4y^2-x+5y+4$;

б) $z=8x^3-12xy-y^3-1$ в заданной точке $C(-1;3)$.

10) а) $z=(x-3y)^2-2(x+y)-2$;

б) $z=3x^4y-5xy^3+y-x-xy$ в заданной точке $A(2;-1)$.

11) а) $z=7x^2-6xy+3y^2-4x+7y-12$;

б) $z=\cos x+3x^2y-4y^3x$ в заданной точке $B(0;1)$.

12) а) $z=x^2-xy+y^2-1$;

б) $z=\ln(3x^2-4)+x^3y^5$ в заданной точке $C(1;1)$.

13) а) $z=x^2-2xy+2y^2+2x$;

б) $z=\frac{1}{2}x^2y^3+\frac{1}{4}xy^4-\frac{1}{3}x^3y-7x-8y$ в заданной точке $A(1;-1)$.

14) а) $z=x^3-3xy+y^3$;

б) $z=\ln y-y^2+x^2$ в заданной $B(2;1)$.

15) а) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$;

б) $z=x^2\sin y-y^3\cos x$ в заданной точке $C(\pi;\frac{\pi}{2})$.

16) а) $z=3-2x^2-xy-y^2$;

б) $z=yx^2-arctgx^2$ в заданной точке $A(1;1)$.

17) а) $z=2x^2-xy+y^2+2y$;

б) $z=4x^2y-y^3x$ в заданной точке $B(1;2)$.

18) а) $z=x^2+xy+4y^2-2x$;

19) б) $z=\dfrac{x^2}{\cos^2 y}$ в заданной точке $C(\pi;1)$.

20) а) $z=-6x^2+2xy-y^2+3y$;

б) $z=xtgy-x^4y$ в заданной точке $A(1;\dfrac{\pi}{4})$.

21) а) $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$;

б) $z=3x-7y-8x^2y^3+7y^5x^3$ в заданной точке $B(1;1)$.

Пример 4.1.

а) Найти экстремум ФНП $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$**;**

б) найти градиент ФНП $z=\dfrac{1}{2}xy^2-arctg(x^3+y^2)$ **в заданной точке** $A(1;1)$**.**

Решение:

а) Исследование функции на экстремум проведем по следующей схеме:

1. Находим частные производные первого порядка заданной функции (см. формулы в примере 1.1.)

$$z'_x,\ z'_y.$$

При дифференцировании функции $z=z(x;y)$ по переменной x считаем постоянной величину y

$$z'_x=|y-const|=15-4x-y.$$

При дифференцировании функции $z=z(x;y)$ по переменной y считаем постоянной величину x

$$z'_y=|x-const|=-x-4y.$$

2. Находим критические точки функции из системы

$$\begin{cases} z'_x(x;y)=0, \\ z'_y(x;y)=0. \end{cases}$$

Решая систему

$$\begin{cases} 15-4x-y=0, \\ -x-4y=0. \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} x=4, \\ y=-1, \end{cases}$$

т. е. функция имеет одну критическую точку с координатами (4;–1).

3. Находим частные производные второго порядка заданной функции

$$z''_{xx},\ z''_{yy},\ z''_{xy}.$$

$$z''_{xx}=|y-const|=(15-4x-y)'_x=-4,$$

$$z''_{yy}=|x-const|=(-x-4y)'_y=-4,$$

$$z''_{xy}=\left|x-const\right|=(15-4x-y)'_y=-1.$$

Введем обозначения $A=z''_{xx}=-4$, $B=z''_{xy}=-1$, $C=z''_{yy}=-4$. Составим выражение $\Delta=AC-B^2$.

4. Находим значение Δ в найденной критической точке. Если значение Δ в исследуемой точке отрицательно, то в данной точке нет экстремума, если значение Δ в исследуемой точке положительно, то точка является точкой экстремума, а именно при A<0 – точка максимума, при A>0 – точка минимума. Таким образом,

$$\Delta(4;-1)=-4(-4)-(-1)^2=16-1=15>0,$$

т. е. в точке (4;–1) функция имеет экстремум. Следовательно, точка с координатами (4;–1) является точкой максимума, так как $A<0$,

$$z_{\max}=z(4;-1)=1+15\cdot 4-2\cdot 4^2-4\cdot(-1)-2\cdot(-1)^2=1+60-32+4-2=31.$$

Ответ: $z_{\max}=z(4;-1)=31$.

б) Для нахождения градиента функции $z=z(x;y)$ в заданной точке $A(x_0;y_0)$ используем формулу

$$\left(gradz\right)_A=(z'_x)_A\cdot\vec{i}+\left(z'_y\right)_A\cdot\vec{j}, \text{ где } \vec{i},\vec{j} \text{ – единичные вектора.}$$

1. Находим частные производные первого порядка заданной функции (см. формулы в <u>примере 1.1.</u>)

$$z'_x=\left|y-const\right|=\frac{1}{2}y^2-\frac{3x^2}{1+(x^3+y^2)^2},$$

$$z'_y=\left|x-const\right|=xy-\frac{2y}{1+(x^3+y^2)^2}.$$

2. Вычисляем частные производные функции в заданной точке $A(1;1)$

$$(z'_x)_A=\frac{1}{2}-\frac{3}{1+(1+1)^2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{10},$$

$$(z'_y)_A=1-\frac{2}{1+(1+1)^2}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

3. Подставляем найденные значения в формулу, находим градиент

$$\left(gradz\right)_A=-\frac{1}{10}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}.$$

Ответ: $\left(gradz\right)_A=\left\{-\frac{1}{10};\frac{3}{5}\right\}.$

Задача 4.2.

Пусть в результате, какого – либо процесса (экономического) получены пять значений искомой функции y при пяти значениях аргумента x. Необходимо установить функциональную зависимость между переменными величинами x и y, в предположении, что она является линейной. Например, между кредитными вложениями банков и их

прибылью. Задачу решить методом наименьших квадратов. Сделать чертеж, указав погрешности δ_i. Данные занесены в таблицу:

Вариант 1					
x	1	3	6	13	20
y	-2,1	-1,1	-1,2	0,2	2,1

Вариант 2					
x	3	10	15	16	19
y	-1,1	0	1,2	1	1,6

Вариант 3					
x	1	12	16	18	20
y	-2,1	0,7	1	1,6	2,2

Вариант 4					
x	2	8	9	15	18
y	-1,6	-0,2	0,1	1,2	1,6

Вариант 5					
x	8	9	11	16	20
y	-0,2	0,1	0,6	1	2,2

Вариант 6					
x	4	8	9	16	19
y	4,4	7,9	8,9	14,7	16,7

Вариант 7					
x	1	3	6	13	20
y	1,3	3,3	5,8	10,3	16,7

Вариант 8					
x	3	10	15	18	19
y	2,7	7,9	11,9	14,7	15,2

Вариант 9					
x	1	5	9	12	18
y	1,3	5,2	7,9	10,3	15,2

Вариант 10					
x	5	6	16	17	20
y	5,2	5,8	13,3	14,7	16,7

Вариант 11					
x	1	8	9	16	18
y	1,3	-6,8	-8,3	-17	-19,2

Вариант 12					
x	4	8	9	16	19
y	-2,7	-6,8	-8,3	-17	-20,1

Вариант 13					
x	1	3	6	12	19
y	1,3	-0,7	-4,3	-11,8	-20,1

Вариант 14					
x	3	10	15	16	19
y	-0,7	-9,4	-15,2	-17	-20,1

Вариант 15					
x	1	4	9	16	18
y	1,3	-2,7	-8,3	-17	-19,2

Вариант 16					
x	5	9	11	13	18
y	4,5	1,5	-0,6	-2,2	-7,3

Вариант 17					
x	2	6	9	11	16
y	7,6	3,9	1,5	-0,6	-4,9

Вариант 18					
x	4	8	9	16	19
y	6	1,9	1,5	-4,9	-8

Вариант 19					
x	1	3	6	13	20
y	8,5	6,6	3,9	-2,2	-8

Вариант 20					
x	3	10	13	14	19
y	6,6	0,2	-2,2	-3,3	-8

Пример 4.2.

Пусть в результате, какого – либо процесса (экономического) получены пять значений искомой функции y при пяти значениях аргумента x. Необходимо установить функциональную зависимость между переменными величинами x и y, в предположении, что она является линейной. Например, между кредитными вложениями банков и их прибылью. Задачу решить методом наименьших квадратов. Сделать чертеж, указав погрешности δ_i. Данные занесены в таблицу:

x	1	5	8	11	16
y	1,1	3,3	3,8	5	7,5

Решение: Чтоб решить данную задачу, *студенту необходимо вспомнить метод Крамера, построение прямой в декартовой системе координат и знать алгоритм решения задачи.* Алгоритм заключается в следующем. Требуется заполнить таблицу; составить нормальную систему метода наименьших квадратов вида

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$, по условию задачи $n = 5$

и решить ее. Промежуточные вычисления производить с двумя знаками после запятой, в результате значения a и b округлить до одного знака, записать уравнение искомой прямой $y = ax + b$; изобразить в одной системе координат прямую $y = ax + b$ и все точки с координатами $(x_i; y_i)$. Единица масштаба должна соответствовать двум клеткам; показать на чертеже погрешности δ_i, вычислив по формуле $\delta_i = y_i - (ax_i + b)$, $i = 1,2,3,4,5$.

Итак, значения x заносятся в таблицу в порядке возрастания. Будем искать зависимость между x и y в виде линейной функции $y = ax + b$. Для составления нормальной системы метода наименьших квадратов заполним следующую таблицу

n	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	1	1,1	1,1	1
2	5	3,3	16,5	25
3	8	3,8	30,4	64
4	11	5	55	121
5	16	7,5	120	256
Сумма	41	20,7	223	467

Нормальная система имеет вид

$$\begin{cases} 467a + 41b = 223, \\ 41a + 5b = 20,7. \end{cases}$$

Эту систему решим по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 467 & 41 \\ 41 & 5 \end{vmatrix} = 2335 - 1681 = 654,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 223 & 41 \\ 20,7 & 5 \end{vmatrix} = 1115 - 848,7 = 266,3,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 467 & 223 \\ 41 & 20,7 \end{vmatrix} = 9666,9 - 9143 = 523,9\,.$$

Ее решение $a = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{266,3}{654} = 0,41 \approx 0,4,\ \ b = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{523,9}{654} \approx 0,8$. Найдя числа a и b, и затем, подставляя их в уравнение $y = ax + b$, получаем уравнение искомой прямой $y = 0,4x + 0,8$.

Строим прямую $y = 0,4x + 0,8$ по двум точкам, например, $(0;0,8)$ и $(20;8,8)$ (см. рис.6). Изобразим все точки $(x_i; y_i)$, а именно данные точки с координатами $(1;1,1)$, $(5;3,3)$, $(8;3,8)$, $(11;5)$ и $(16;7,5)$. Вычисляем δ_i по формуле $\delta_i = y_i - (ax_i + b)$:

$$i = 1:\ \delta_1 = 1,1 - (0,4 \cdot 1 + 0,8) = 1,1 - 1,2 = -0,1$$
$$i = 2:\ \delta_2 = 3,3 - (0,4 \cdot 5 + 0,8) = 3,3 - 2,8 = 0,5$$
$$i = 3:\ \delta_3 = 3,8 - (0,4 \cdot 8 + 0,8) = 3,8 - 4 = -0,2$$
$$i = 4:\ \delta_4 = 5 - (0,4 \cdot 11 + 0,8) = 5 - 5,2 = -0,2$$
$$i = 5:\ \delta_5 = 7,5 - (0,4 \cdot 16 + 0,8) = 7,5 - 7,2 = 0,3$$

и покажем найденные погрешности на чертеже (см. рис.6) в виде вертикальных отрезков (изображенных от точек до прямой).

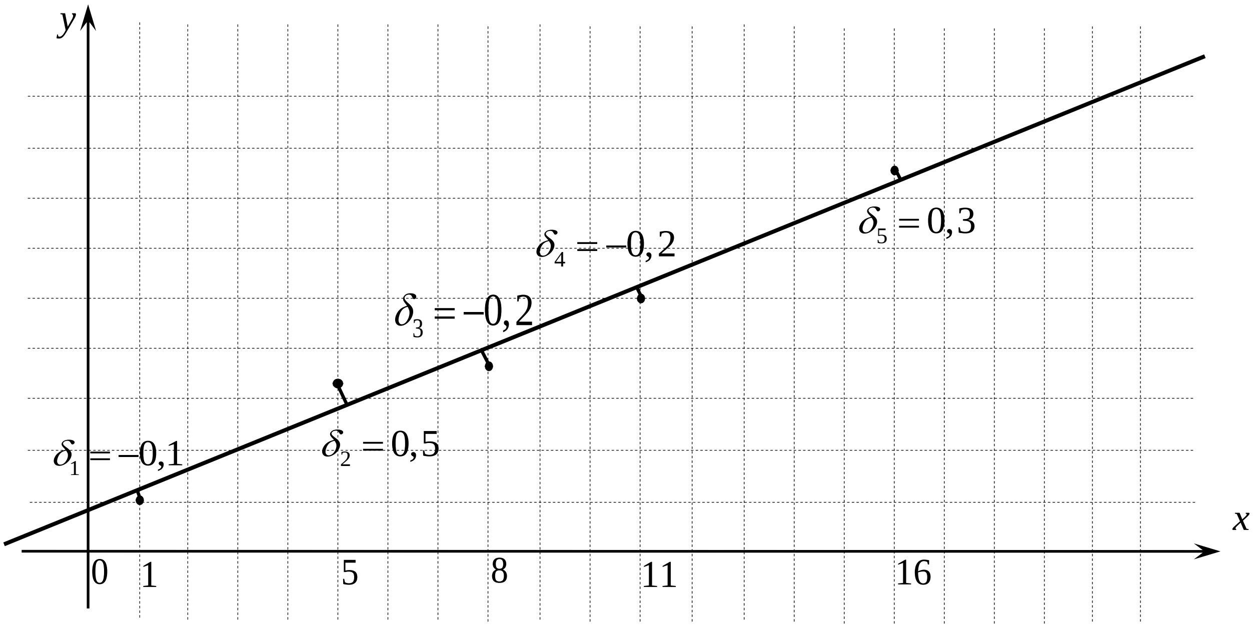

Рис.6

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер и др.; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

2. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов по экон. специальностям / Н.Ш. Кремер и др.; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИ-ТИ-ДАНА, 2010. – 478 с.

3. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2001. – 688 с.

4. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник для вузов по экономическим специальностям / Б.М. Рудык и др.; под ред. В.И. Ермакова. – М.:ИНФРА-М, 2010. – 655 с.

5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для вузов по направлению «Экономика» и экономическим специальностям / В.И. Ермаков и др., под ред. В.И. Ермакова; Рос. экон. акад. им. Г.В. Плеханова. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 573 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ