ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Южно-уральский государственный университет (научно-исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

для направлений 09.03.02.,09.03.03 (1 и 2 семестры), 38.03.01, 38.03.02 (2 и 3 семестры)

Составитель: старший преподаватель

Абдрахимова Дина Исмагиловна

г. Челябинск, 2017

Оглавление

ЧАСТЬ 1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача 1. Составить уравнение нормали (в вариантах 2.1 – 2.12) или уравнение касательной (в вариантах 2.13 – 2.31) к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

1. $y=\left(4x-x^2\right)/4, \quad x_0=2.$

2. $y=2x^2+3x-1, \quad x_0=-2.$

3. $y=x-x^3, \quad x_0=-1.$

4. $y=x^2+8\sqrt{x}-32, \quad x_0=4.$

5. $y=x+\sqrt{x^3}, \quad x_0=1.$

6. $y=\sqrt[3]{x^2}-20, \quad x_0=-8.$

7. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x_0=4.$

8. $y=8\sqrt[4]{x}-70, \quad x_0=16.$

9. $y=2x^2-3x+1, \quad x_0=1.$

10. $y=\left(x^2-3x+6\right)/x^2, \quad x_0=3.$

11. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}, \quad x_0=64.$

12. $y=\left(x^3+2\right)/\left(x^3-2\right), \quad x_0=2.$

13. $y=2x^2+3, \quad x_0=-1.$

14. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1}, \quad x_0=1.$

15. $y=2x+\dfrac{1}{x}, \quad x_0=1.$

16. $y=-2\left(x^8+2\right)/\left(3\left(x^4+1\right)\right), \quad x_0=1.$

17. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}, \quad x_0=1.$

18. $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}, \quad x_0=1.$

19. $y=3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right), \quad x_0=1.$

20. $y=1/\left(3x+2\right), \quad x_0=2.$

21. $y=x/\left(x^2+1\right), \quad x_0=-2.$

22. $y=\left(x^2-3x+3\right)/3, \quad x_0=3.$

23. $y=2x/\left(x^2+1\right), \quad x_0=1.$

24. $y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right), \quad x_0=1.$

25. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}, \quad x_0=1.$

26. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2, \quad x_0=1.$

27. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}, \quad x_0=1.$

28. $y=\left(3x-2x^3\right)/3, \quad x_0=1.$

29. $y=x^2/10+3, \quad x_0=2.$

30 $y=\left(x^2-2x-3\right)/4, \quad x_0=4.$

31. $y = 6\sqrt[3]{x} - 16\sqrt[4]{x}/3, \quad x_0 = 1.$

Задача 2. Найти дифференциал dy.

1. $y = x\arcsin(1/x) + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|, \quad x > 0.$

2. $y = \operatorname{tg}\left(2\arccos\sqrt{1 - 2x^2}\right), \quad x > 0.$

3. $y = \sqrt{1 + 2x} - \ln\left|x + \sqrt{1 + 2x}\right|.$

4. $y = x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}.$

5. $y = \arccos\left(1/\sqrt{1 + 2x^2}\right), \quad x > 0.$

6. $y = x\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 3}\right| - \sqrt{x^2 + 3}.$

7. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x)\operatorname{lnch} x.$

8. $y = \arccos\left(\left(x^2 - 1\right)/\left(x^2\sqrt{2}\right)\right).$

9. $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}\right).$

10. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \sqrt{1 + x^2}\operatorname{arctg} x.$

11. $y = \dfrac{\ln|x|}{1 + x^2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1 + x^2}$

12. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right) + \operatorname{arcsine}^x.$

13. $y = x\sqrt{4 - x^2} + a\arcsin(x/2).$

14. $y = \ln\operatorname{tg}(x/2) - x/\sin x.$

15. $y = 2x + \ln|\sin x + 2\cos x|.$

16. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}/3.$

17. $y = \ln\left|\dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x}\right|.$

18. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x + 2}{x - 2}}.$

19. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2 - 1}{x}.$

20. $y = \ln\left|x^2 - 1\right| - \dfrac{1}{x^2 - 1}.$

21. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 1\right).$

22. $y = \ln\left|2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1\right|.$

23. $y = \ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}.$

24. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x).$

25. $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x).$

26. $y = \left(\sqrt{x - 1} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}.$

27. $y = \cos x \cdot \operatorname{lntg} x - \operatorname{lntg} \dfrac{x}{2}.$

28. $y = \sqrt{3+x^2} - x \ln \left| x + \sqrt{3+x^2} \right|.$

29. $y = \sqrt{x} - (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$

30. $y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}.$

31. $y = x\sqrt{x^2-1} + \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right|.$

Задача 3. Вычислить значение функции в точке приближенно:

1. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76.$

2. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1,012.$

3. $y = \left(x + \sqrt{5 - x^2} \right) \Big/ 2, \quad x = 0,98.$

4. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27,54.$

5. $y = \arcsin x, \quad x = 0,08.$

6. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0,97.$

7. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26,46.$

8. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1,97.$

9. $y = x^{11}, \quad x = 1,021.$

10. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,21.$

11. $y = x^{21}, \quad x = 0,998.$

12. $y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1,03.$

13. $y = x^6, \quad x = 2,01.$

14. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,24.$

15. $y = x^7, \quad x = 1,996.$

16. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,64.$

17. $y = \sqrt{4x-1}, \quad x = 2,56.$

18. $y = 1 \Big/ \sqrt{2x^2 + x + 1}, \quad x = 1,016.$

19. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,36.$

20. $y = 1 \Big/ \sqrt{x}, \quad x = 4,16.$

21. $y = x^7, \quad x = 2,002.$

22. $y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 1,78.$

23. $y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0,98.$

24. $y = x^5, \quad x = 2,997.$

25. $y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1,03.$

26. $y = x^4, \quad x = 3,998.$

27. $y = \sqrt{1 + x + \sin x}, \quad x = 0,01.$

28. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}, \quad x = 0,01.$

29. $y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x/2)}, \quad x = 1,02.$

30. $y = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x = 1,97.$

31. $y = 1 \Big/ \sqrt{2x+1}, \quad x = 1,58.$

Задача 4. Найти производную частного:

1. $y=\dfrac{2\left(3x^3+4x^2-x-2\right)}{15\sqrt{1+x}}$.

2. $y=\dfrac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.

3. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2\left(x^2-4\right)}$.

4. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

5. $y=\dfrac{\left(1+x^8\right)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.

6. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

7. $y=\dfrac{\left(x^2-6\right)\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{120x^5}$.

8. $y=\dfrac{\left(x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

9. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}$.

10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{\left(1+x^{3/4}\right)^2}{x^{3/2}}}$.

11. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

12. $y=\dfrac{\left(x^2-2\right)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

13. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

14. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}\left(3x+2\right)}{4x^2}$.

15. $y=\dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$.

16. $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$.

17. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}\left(x-2\right)}{x^2}$.

18. $y=\left(1-x^2\right)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}$.

19. $y=\dfrac{\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

20. $y=\dfrac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}$.

21. $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

22. $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

23. $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$.

24. $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$.

25. $y=3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2}}$.

26. $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$.

27. $y=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$.

28. $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

29. $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$.

30. $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$.

31. $y=\dfrac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 5. Найти производную степенно-показательной функции, используя логарифмическое дифференцирование:

1. $y=(\operatorname{arctg}x)^{(1/2)\ln(\operatorname{arctg}x)}$.

2. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}$.

3. $y=(\sin x)^{5e^x}$.

4. $y=(\arcsin x)^{e^x}$.

5. $y=(\ln x)^{3^x}$.

6. $y=x^{\arcsin x}$.

7. $y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x}$.

8. $y=x^{e^{\operatorname{tg}x}}$.

9. $y=(\operatorname{tg}x)^{4e^x}$.

10. $y=(\cos 5x)^{e^x}$.

11. $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$.

12. $y=(x-5)^{\operatorname{ch}x}$.

13. $y=\left(x^3+4\right)^{\operatorname{tg}x}$.

14. $y=x^{\sin x^3}$.

15. $y=\left(x^2-1\right)^{\operatorname{sh} x}$.

16. $y=\left(x^4+5\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

17. $y=(\sin x)^{5x/2}$.

18. $y=\left(x^2+1\right)^{\cos x}$.

19. $y=19^{x^{19}}\,x^{19}$.

20. $y=x^{3^x}\cdot 2^x$.

21. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\mathrm{e}^{1/x}}$.

22. $y=x^{\mathrm{e}^{\operatorname{ctg} x}}$.

23. $y=x^{\mathrm{e}^{\cos x}}$.

24. $y=x^{2^x}\cdot 5^x$.

25. $y=x^{\mathrm{e}^{\sin x}}$.

26. $y=(\operatorname{tg} x)^{\ln(\operatorname{tg} x)/4}$.

27. $y=x^{\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}}$.

28. $y=\left(x^8+1\right)^{\operatorname{th} x}$.

29. $y=x^{29^x}\cdot 29^x$.

30. $y=(\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4}$.

31. $y=x^{\mathrm{e}^x}x^9$.

Задача 6. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрически, в точке с параметром $t=t_0$.

1. $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t, \quad t_0=\pi/3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin t, \quad t_0=\pi/3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=a\left(t-\sin t\right), \\ y=a\left(1-\cos t\right), \quad t_0=\pi/3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3, \quad t_0=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3}, \quad t_0=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0=-1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = t\left(t\cos t - 2\sin t\right), \\ y = t\left(t\sin t + 2\cos t\right), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2\ln\left(\operatorname{ctg} t\right) + \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{4}t^4, \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3+2\ln t}{t}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = a\left(t\sin t + \cos t\right), \\ y = a\left(\sin t - t\cos t\right), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t\left(1 - \sin t\right), \\ y = t\cos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = -\pi/3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{tg}\, t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x = 2\mathrm{e}^t, \\ y = \mathrm{e}^{-t}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

ЧАСТЬ 2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$):

1. $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$
2. $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$
3. $a_n = \dfrac{7n+4}{2n+1}, \quad a = \dfrac{7}{2}.$
4. $a_n = \dfrac{2n-5}{3n+1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$
5. $a_n = \dfrac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$
6. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}, \quad a = \dfrac{4}{3}.$
7. $a_n = \dfrac{9-n^3}{1+2n^3}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$
8. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$
9. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$
10. $a_n = -\dfrac{5n}{n+1}, \quad a = -5.$
11. $a_n = \dfrac{n+1}{1-2n}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$
12. $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$
13. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}, \quad a = -2.$
14. $a_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2}, \quad a = -3.$
15. $a_n = \dfrac{n}{3n-1}, \quad a = \dfrac{1}{3}.$
16. $a_n = \dfrac{3n^3}{n^3-1}, \quad a = 3.$
17. $a_n = \dfrac{4+2n}{1-3n}, \quad a = -\dfrac{2}{3}.$
18. $a_n = \dfrac{5n+15}{6-n}, \quad a = -5.$
19. $a_n = \dfrac{3-n^2}{1+2n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$
20. $a_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}, \quad a = -\dfrac{2}{3}.$
21. $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}, \quad a = \dfrac{3}{5}.$
22. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$
23. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$
24. $a_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}, \quad a = \dfrac{1}{2}.$
25. $a_n = \dfrac{2-2n}{3+4n}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$
26. $a_n = \dfrac{23-4n}{2-n}, \quad a = 4.$
27. $a_n = \dfrac{1+3n}{6-n}, \quad a = -3.$
28. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+5}, \quad a = 2.$

29. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \dfrac{3}{4}.$

30. $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{5}.$

31. $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2.$

Задача 2. Вычислить предел числовой последовательности, используя формулы сокращенного умножения:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}.$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}.$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$.

Задача 3. Вычислить предел числовой последовательности, используя умножение на сопряженное выражение:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right]$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right]$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right]$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}\right)$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right]$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n\left(n^5+9\right)}-\sqrt{\left(n^4-1\right)\left(n^2+5\right)}}{n}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\ (n+5)}-n\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(n^3+1\right)\left(n^2+3\right)}-\sqrt{n\left(n^4+2\right)}}{2\sqrt{n}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2\right)}-\sqrt{\left(n^2-1\right)\left(n^2-2\right)}\right]$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(n^5+1\right)\left(n^2-1\right)}-n\sqrt{n\left(n^4+1\right)}}{n}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(n^4+1\right)\left(n^2-1\right)}-\sqrt{n^6-1}}{n}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-\sqrt{n\ (n-1)}\right]$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt[3]{n^2\left(n^6+4\right)}-\sqrt[3]{\left(n^8-1\right)}\right)$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sqrt{n}\ -\sqrt{n\ (n+1)(n+2)}\right]$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n\ +2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right)$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(n^2+5\right)\left(n^4+2\right)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}$.

Задача 4. Вычислить предел числовой последовательности, применяя формулы арифметической и геометрической прогрессий или определение факториала:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right]$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+..+n}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-3+5-7+9-11+\ldots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+2}{1+2+3+\ldots n}-\frac{2}{3}\right]$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-5+4-7+\ldots+2n-(2n+3)}{n+3}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n-n^2+3}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+..+(5n-3)}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1+2^n}{4^n}\right)$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+..+(2n-1)}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+5+9+13+\ldots+(4n-3)}{n+1}-\frac{4n+1}{2}\right]$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\ldots+\frac{2^n+5^n}{10^n}\right)$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+\ldots+2n}{n+3}-n\right)$.

Задача 5. Вычислить предел числовой последовательности по второму замечательному пределу:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{n/6+1}$.

31. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{4n^2 + 4n - 1}{4n^2 + 2n + 3} \right)^{1-2n}$.

Задача 6. Доказать по определению предела (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

1. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7.$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$

3. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = -7.$

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10.$

5. $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -5.$

6. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{6x^2 - x - 1}{x - 1/2} = 5.$

7. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{x + 1/3} = -6.$

8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$

9. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1/3} = -4.$

10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6.$

11. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$

12. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1/2} = 5.$

13. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{6x^2 - 5x + 1}{x - 1/3} = -1.$

14. $\lim\limits_{x \to -7/5} \dfrac{10x^2 + 9x - 7}{x + 7/5} = -19.$

15. $\lim\limits_{x \to -7/2} \dfrac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7} = -\dfrac{1}{2}.$

16. $\lim\limits_{x \to 5/2} \dfrac{2x^2 - 9x + 10}{2x - 5} = \dfrac{1}{2}.$

17. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{6x^2 + x - 1}{x - 1/3} = 5.$

18. $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{6x^2 - 75x - 39}{x + 1/2} = -81.$

19. $\lim\limits_{x \to 11} \dfrac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23.$

20. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26.$

21. $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13.$

22. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10.$

23. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = -\dfrac{5}{3}.$

24. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8.$

25. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8} = 8.$

26. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49.$

27. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1/2} = -3.$

28. $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6} = -19.$

29. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{3x^2 + 17x - 6}{x - 1/3} = 19.$

30. $\lim\limits_{x \to -1/5} \dfrac{15x^2 - 2x - 1}{x + 1/5} = -8.$

31. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} = 8.$

Задача 7. Вычислить предел функции:

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\left(x^3 - 2x - 1\right)\left(x + 1\right)}{x^4 + 4x^2 - 5}.$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}.$

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\left(x^2 + 3x + 2\right)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\left(2x^2 - x - 1\right)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$

5. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\left(x^2 + 2x - 3\right)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}.$

6. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\left(x^3 - 2x - 1\right)^2}{x^4 + 2x + 1}.$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(1 + x\right)^3 - (1 + 3x)}{x + x^5}.$

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}.$

9. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}.$

10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}.$

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$

12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}.$

13. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}.$

14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}.$

15. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

16. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

17. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.

18. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$.

19. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.

20. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

21. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.

22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

23. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

24. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

25. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

26. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

27. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

29. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

30. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

31. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Задача 8. Вычислить предел функции, используя умножение на сопряженное выражение:

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

2. $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

5. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

6. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

7. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

13. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

15. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

16. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

17. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

18. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

19. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$.

20. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$.

21. $\lim\limits_{x \to 1/4} \dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$.

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

26. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

27. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$.

28. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

29. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$.

30. $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.

31. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

Задача 9. Вычислить предел функции, используя таблицу эквивалентностей, где необходимо:

1. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.

3. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2\left(\pi/4+x\right)}$.

5. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\cos x\right)^{x+3}$.

6. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}4x}{x}\right)^{2+x}$.

9. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$.

12. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{6/(1+x)}$.

13. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$.

14. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^{x+2}$.

15. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$.

16. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\sin\left(x+2\right)\right)^{3/(3+x)}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$.

18. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x^4+5}{x+10}\right)^{4/(x+2)}$.

19. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$.

20. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{2/(x+1)}$.

21. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\right)^{3/(x+8)}$.

22. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\cos\dfrac{x}{\pi}\right)^{1+x}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{2/(x+5)}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{x}\right)^{x+2}$.

25. $\lim\limits_{x \to 0}\left(e^x+x\right)^{\cos x^4}$.

26. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{1/(x+6)}$.

27. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\left(e^x-1\right)/x}$.

28. $\lim\limits_{x \to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

29. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1+8x}{2+11x}\right)^{1/\left(x^2+1\right)}$.

30. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{2x+1}$.

31. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x^3+4}{x^3+9}\right)^{1/(x+2)}$.

Задача 10. Вычислить предел функции, используя таблицу эквивалентностей:

1. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg} 3x}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$.

3. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg} x+x^3}$.

6. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg} x-x^2}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{3^{5x}-2^x}{x-\sin 9x}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg} x-\sin x}$.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{12^x - 5^{-3x}}{2\arcsin x - x}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{5x} - 2^{7x}}{\arcsin 2x - x}$.

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - e^{x}}{\arcsin x + x^3}$.

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x - x}$.

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}$.

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{10^{2x} - 7^{-x}}{2\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$.

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{x}}{\sin 3x - \sin 5x}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7^{3x} - 3^{2x}}{\operatorname{tg} x + x^3}$.

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - e^{2x}}{2\operatorname{tg} x - \sin x}$.

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x} - 7^{x}}{\arcsin 3x - 5x}$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-5x}}{2\sin x - \operatorname{tg} x}$.

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^{5x} - 9^{-2x}}{\sin x - \operatorname{tg} x^3}$.

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^{2x} - 2^{3x}}{\sin x + \sin x^2}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$.

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9^{x} - 2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x - 7x}$.

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-2x}}{x + \sin x^2}$.

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x}$.

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{x}}{\sin 2x - \sin x}$.

29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{x}}{x + \operatorname{tg} x^2}$.

30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}$.

31. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{3x} - 3^{5x}}{\sin 7x - 2x}$.

Задача 11. Вычислить предел функций с помощью замены:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$.

3. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$.

4. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$.

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$.

6. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

7. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x - \pi)^4}$.

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$.

9. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$.

10. $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}$.

11 . $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

12. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}$.

13. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$.

14. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2 - \pi^2}{\sin x}$.

15. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}$.

16. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2^x - 16}{\sin \pi x}$.

17. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin(5x/2) \cos x}$.

18. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

19. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{e^{\pi} - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}$.

20. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$.

21. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - 2^{4 - x^2}}{2(\sqrt{2x} - \sqrt{3x^2 - 5x + 2})}$.

22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

23. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$.

24. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 - \sin(x/2)}{\pi - x}$.

25. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$.

26. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$.

27. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

28. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$.

29. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$.

30. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

31. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

Задача 12. Вычислить предел функции, применяя замену, второй замечательный предел, и если необходимо, то таблицу эквивалентностей:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3x-1}{x+1} \right)^{1/\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$.

2. $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)}$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2x-1}{x} \right)^{1/\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$.

4. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2} \right)^{1/(x-2)}$.

5. $\lim\limits_{x \to 8} \left(\dfrac{2x-7}{x+1} \right)^{1/\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}$.

6. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \left(\operatorname{tg} x\right)^{1/\cos(3\pi/4 - x)}$.

7. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2x-1}{x} \right)^{1/\left(\sqrt[5]{x}-1\right)}$.

8. $\lim\limits_{x \to a} \left(2 - \dfrac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

9. $\lim\limits_{x \to 2\pi} \left(\cos x\right)^{\operatorname{ctg} 2x / \sin 3x}$.

10. $\lim\limits_{x \to 2\pi} \left(\cos x\right)^{1/\sin^2 2x}$.

11. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

12. $\lim\limits_{x \to 4\pi} \left(\cos x\right)^{\operatorname{ctg} x / \sin 4x}$.

13. $\lim\limits_{x \to 1} \left(3 - 2x\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

14. $\lim\limits_{x \to 4\pi} \left(\cos x\right)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}$.

15. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

16. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(\sin x\right)^{6\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{x/(x-1)}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x-\pi/2)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{(3x-1)/(x-1)}$.

20. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(1+\cos 3x\right)^{\sec x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2e^{x-2}-1\right)^{(3x+2)/(x-2)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(2-x)}$.

24. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/\cos x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-x\right)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{1/(x-3)}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$.

28. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\sin x\right)^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg}x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$.

30. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}\right)^{1/\cos(x/2)}$.

31. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$.

Задача 13. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя:

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{tg}x}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{\operatorname{tg}x}$.
2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln \operatorname{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right)$.
3. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{0{,}5-\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.
4. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.
5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\ln x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)^{x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\operatorname{ctg}\pi x\right)$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\ln x\right)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right)$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{\operatorname{tg}x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}7x}{\ln\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{-\frac{1}{1-x}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^x}{1-3^x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\left(x-\pi\right)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\sin x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x\right)^{2\cos x}$.

23.а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{3x}$.

24.а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

25.а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} x-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

26.а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{\operatorname{tg} x}$.

27.а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right)$.

28.а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{0{,}5-\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

29.а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

30.а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$.

31.а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Задача 14. Исследуйте функции на непрерывность. Постройте схематически графики, укажите горизонтальные асимптоты (если они существуют):

1. а) $y=\dfrac{x^2+2x}{x+2}$; б) $y=\begin{cases} -x, & x\le 1,\\ \dfrac{2}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

2. а) $y=\dfrac{2}{(x-1)^3}$; б) $y=\begin{cases} \dfrac{2}{x^2-2x+1}, & x<1,\\ 1-2x, & x\ge 1.\end{cases}$

3. а) $y=\dfrac{x^3-4x}{x}$; б) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{5}\left(2x^2+5\right), & x\le 1,\\ x-3, & x>1.\end{cases}$

4. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5-x}$; б) $y=\begin{cases} x^2+1, & x<2,\\ 2-x, & x\ge 2.\end{cases}$

5. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{-x-8}$; б) $y=\begin{cases} x+2, & x<2, \\ x^2-1, & x\ge 2. \end{cases}$

6. а) $y=\dfrac{5x^2+3}{x-4}$; б) $y=\begin{cases} x^3-1, & x\le 1, \\ x-3, & x>1. \end{cases}$

7. а) $y=\dfrac{x^2-4x}{x+3}$; б) $y=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ x^2+5, & x\ge 0. \end{cases}$

8. а) $y=\dfrac{x^3+1}{x+1}$; б) $y=\begin{cases} e^{x-2}, & x\le 1, \\ x^2, & x>1. \end{cases}$

9. а) $y=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$; б) $y=\begin{cases} 1, & x\le 3, \\ x^2-8, & x>3. \end{cases}$

10. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$; б) $y=\begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x\le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$

11. а) $y=\dfrac{x-8}{x^2}$; б) $y=\begin{cases} 4\cdot 3^x, & x<0, \\ 2+x, & x\ge 0. \end{cases}$

12. а) $y=\dfrac{x+2}{x(x-1)}$; б) $y=\begin{cases} e^{-x}, & x<0, \\ x^2+1, & x\ge 0. \end{cases}$

13. а) $y=\dfrac{x^2+3x}{x+3}$; б) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x<-1, \\ x, & x\ge -1. \end{cases}$

14. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$; б) $y=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\ge 0, \\ x-1, & x<0. \end{cases}$

15. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+4}$; б) $y=\begin{cases} \dfrac{4}{x^2-2x+1}, & x<1, \\ 2x+1, & x\ge 1. \end{cases}$

16. а) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$; б) $y=\begin{cases} (x-1)^2, & x<0, \\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 0. \end{cases}$

17. а) $y=\dfrac{|x-3|}{x-3}$; б) $y=\begin{cases} x, & x\le 1, \\ \dfrac{2}{x-1}, & x>1. \end{cases}$

18. а) $y=\dfrac{2}{(1-x)^3}$; б) $y=\begin{cases} 1-x, & x<1, \\ \ln x, & x\ge 1. \end{cases}$

19.а) $y=\dfrac{x^2+5x}{x-5}$; б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\left(2x^2+5\right), & x\le 1,\\ 3-x, & x>1.\end{cases}$

20.а) $y=\dfrac{x^2-1}{x+5}$; б) $y=\begin{cases}2x-5, & x<3,\\ x^2-7, & x\ge 3.\end{cases}$

21.а) $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$; б) $y=\begin{cases}2-x, & x<2,\\ x^2-1, & x\ge 2.\end{cases}$

22.а) $y=\dfrac{x-4}{|x-4|}$; б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x<2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$

23.а) $y=\dfrac{7x+9}{x+2}$; б) $y=\begin{cases}4\left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & x>0,\\ 2-x, & x\le 0.\end{cases}$

24.а) $y=\dfrac{x^2-x^3}{x-1}$; б) $y=\begin{cases}3x+1, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

25.а) $y=\dfrac{5x^2-3x}{x}$; б) $y=\begin{cases}e^x, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1.\end{cases}$

26.а) $y=\dfrac{x+2}{x(x-1)}$; б) $y=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2+1, & x\ge 0.\end{cases}$

27.а) $y=\dfrac{x^2+3x}{x+3}$; б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x<-1,\\ x, & x\ge -1.\end{cases}$

28.а) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$; б) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\ge 0,\\ x-1, & x<0.\end{cases}$

29.а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+4}$; б) $y=\begin{cases}\dfrac{4}{x^2-2x+1}, & x<1,\\ 2x+1, & x\ge 1.\end{cases}$

30.а) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$; б) $y=\begin{cases}(x-1)^2, & x<0,\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 0.\end{cases}$

31.а) $y=\dfrac{|x-3|}{x-3}$;

б) $y=\begin{cases} x, & x\le 1, \\ \dfrac{2}{x-1}, & x>1. \end{cases}$

Задача 15. Вычислите асимптоты графика функции (вертикальные и наклонные), если они существуют:

1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2-1}$.
2. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.
3. $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$.
4. $y=\dfrac{4x^2}{4-x^2}$.
5. $y=\dfrac{12x}{9-x^2}$.
6. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.
7. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$.
8. $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$
9. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.
10. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.
11. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.
12. $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$.
13. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2-4}$.
14. $y=\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2+2x-3}$.
17. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.
18. $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.
19. $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$.
20. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$
21. $y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$.
22. $y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$.
23. $y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+3x-4}$.
24. $y=\dfrac{1}{x^4-1}$.
25. $y=-\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$.
26. $y=\dfrac{4x^2}{4-x^2}$.
27. $y=\dfrac{12x}{9-x^2}$.
28. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.
29. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$.
30. $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$

15. $y = -\dfrac{8x}{x^2 - 4}$.

16. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

31. $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

ЧАСТЬ 3. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача 1. Вычислите частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$, а также дифференциалы до второго порядка включительно

1. $z = \sin^2(2x + y)$.
2. $z = \cos^2(3x + 5y)$.
3. $z = tg(x + 7y)$.
4. $z = e^{xy}$.
5. $z = x\sin^2 y$.
6. $z = y\cos^2 x$.
7. $z = \sin^2(x - y)$.
8. $z = \ln(x^2 - y^2)$.
9. $z = \ln(xy)$.
10. $z = \operatorname{arctg}(xy)$.
11. $z = (x - y)e^{xy}$.
12. $z = y\ln\frac{x}{y}$.
13. $z = \operatorname{arctg}(x + 2y)$.
14. $z = \arcsin(xy)$.
15. $z = \sin(xy)$.
16. $z = arctg\frac{y}{x}$.
17. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$.
18. $z = \sqrt{x^2 + 2y}$.
19. $z = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
20. $z = x\ln\frac{y}{x}$.
21. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.
22. $z = (x + y)e^{xy}$.
23. $z = \operatorname{arctg}(3x - y)$.
24. $z = e^y \sin x$.
25. $z = e^x \sin y$.

Задача 2. Исследуйте на экстремум функцию $z = f(x, y)$.

1. $z = xy - 2x^2 + 6y - y^2 + 3$.
2. $z = 2x^2 + 3y - xy + 4$.
3. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.
4. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 4y$.
5. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
6. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
7. $z = 3x^2 + y^2 + 3x - 4y + 1$.
8. $z = 8x - 6x^2 + 12y - y^2 + 3$.
9. $z = 6 - 3x^2 - 4y^2 + x - y$.
10. $z = x - x^2 + 3y - 4y^2$.
11. $z = xy - 3x^2 - y^2 + x - 12$.
12. $z = 2xy - 6x^2 - y^2 + 4y$.
13. $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$.
14. $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$.
15. $z = 3x^2 + 18xy + 18y - 8x + 8$.
16. $z = 2x^2 + 4y^2 + y - xy$.
17. $z = x^2 + 18xy + y - x$.
18. $z = (x - 1)^2 - 2y^2$.
19. $z = (x - 2)^2 + 2y^2$.
20. $z = (y - 1)^2 + 2x^2$.
21. $z = x^4 + 4xy - 2y^2$.
22. $z = x^2 + 6xy + 6y - 4x + 8$.

23. $z = 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

24. $z = 2x^3 - xy$.

25. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

Задача 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на множестве D, ограниченном данными линиями.

1. $z = (x-2)^2 + 2y^2$, D: $x = 0$, $y = 2 - x$, $y = 0$, $y = 1$.

2. $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$, D: $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$.

3. $z = 2x^2 + 4xy - 2y^2$, D: $x = 2$, $y = 2$, $x + y = 2$.

4. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$, D: $x = 2$, $y = 1$, $x + y = 2$.

5. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$, D: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 3$.

6. $z = 2x^3 - xy$, D: $y = 2x$, $y = x$, $x = 1$.

7. $z = 3\ln x + xy^2 - y^3$, D: $y = 0$, $y = 2$, $x = 1$, $x = 3$.

8. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$, D: $y = x$, $y = 3x$, $x = 2$.

9. $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$, D: $x = 3$, $y = 0$, $y = x$.

10. $z = 3x^2 + 18xy + 18y - 8x + 8$, D: $y = 2$, $y = x$, $x = 0$.

11. $z = (x-1)^2 + 2y^2$, D: $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

12. $z = (x-1)^2 - 2y^2$, D: $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

13. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$, D: $x = 3$, $y = 3$, $x + y = 3$.

14. $z = x^2 + y^2 - 3y^3$, D: $x^2 + y^2 = 4$.

15. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 4y = 0$, D: $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$.

16. $z = x^2 + y^2 + 4y^3 + 1$, D: $x^2 + y^2 = 6$.

17. $z = 2x^2 + 3y - xy + 4$, D: $x = 0$, $y = 0$, $y = x + 1$.

18. $z = x^2 + y^2 + 2y^3 - 6y$, D: $x^2 + y^2 = 9$.

19. $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$, D: $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

20. $z = 2 - x^2 - y^2 - 4y - \frac{4}{3}y^3$, D: $x^2 + y^2 = 3$.

21. $z = xy - 3x^2 + x + 1,\ D:\ x = 1,\ y = 2,\ xy = 1.$

22. $z = 6 - 3x^2 + x - 3xy,\ D:\ x = 2,\ y = 2,\ xy = 2.$

23. $z = 18 - x^2 - 6y^3 - y^2,\ D:\ x^2 + y^2 = 1.$

24. $z = 4x - 2x^2 + 6yx + 1,\ D:\ y = \frac{2}{x},\ y = 2x,\ y = \frac{x}{2}.$

25. $z = 4x - x^2 + 12y - y^2 + 3x^3,\ D:\ (x-2)^2 + (y-6)^2 = 1.$

Задача 1. Вычислите неопределенные интегралы.

1.
а) $\int \frac{\sin x\,dx}{9+\cos^2 x}$; б) $\int \frac{1-3x}{3+2x}dx$; в) $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$;
г) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$; д) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$; е) $\int \frac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x}dx$;
ж) $\int \frac{3x-2}{x(x+1)}dx$.

2.
а) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}dx$; б) $\int \frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x}$; в) $\int 3xe^{-x^2}\,dx$;
г) $\int \sin 7x \sin 3x\,dx$. д) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; е) $\int \frac{2+\cos 2x}{\cos^2 x}dx$;
ж) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$.

3.
а) $\int x^2\sqrt{1+2x^3}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$; в) $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2(x+1)}$;
г) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos 2x}}dx$; д) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2-3x+2}$; е) $\int \frac{4^x\,dx}{\sqrt[5]{3+4^x}}$;
ж) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

4.
а) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$; б) $\int \frac{2x\,dx}{4-9x^2}$; в) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$;
г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; д) $\int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2+1)}$; е) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$;
ж) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

5.
а) $\int 3x^2(1-x^3)^8 dx$; б) $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx$; в) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$;
г) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$; д) $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$; е) $\int \frac{(x+4)dx}{x^2(x-1)}$;
ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

6.

а) $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx;$ б) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{1-4x^2}};$ в) $\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}dx;$

г) $\int \frac{\ln^2 x + \sqrt[4]{x}}{x}dx;$ д) $\int \frac{(1+2x)dx}{\sqrt{1+x-x^2}};$ е) $\int \frac{\cos^3 x + 5}{\cos^2 x}dx;$

ж) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}.$

7.

а) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos 2x}dx;$ б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}};$ в) $\int \cos^3 x\, dx;$

г) $\int \frac{x^2 dx}{e^{2x^3}};$ д) $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx;$ е) $\int \frac{x+4}{x(x^2+1)}dx;$

ж) $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$

8.

а) $\int \frac{2x+5}{3x^2-2}dx;$ б) $\int \sin^5 x\, dx;$ в) $\int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2+4)};$

г) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx;$ д) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx;$ е) $\int \frac{1+3\mathrm{tg}^2 x}{2\sin^2 x}dx;$

ж) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-4}dx.$

9.

а) $\int \frac{x^2\,dx}{3+x^2};$ б) $\int xe^{-2x^2}\,dx;$ в) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+6x+1}};$

г) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx;$ д) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x};$ е) $\int \frac{1+2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx;$

ж) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$

10.

а) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x};$ б) $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+1)};$ в) $\int \frac{x-1}{x+2}dx;$

г) $\int \sin^4 3x\, dx;$ д) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2+8x+7}};$ е) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt[5]{9+3^x}};$

ж) $\int x^3\sqrt{4-x^4}\,dx.$

11.

а) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx;$ б) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx;$ в) $\int \cos^3 x \sin 2x\, dx;$

г) $\int \frac{x-3}{x^3+3x^2+2x}dx$; д) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{8x-4x^2-3}}$; е) $\int \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$;

ж) $\int 2^x \sqrt[4]{3+2^x}\,dx$.

12. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$; б) $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx$; в) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$;

г) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\ln x}{x}dx$; д) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$; е) $\int \frac{(x-1)dx}{x\left(x^2+4\right)}$;

ж) $\int \cos 2x \sin\frac{x}{2}dx$.

13. а) $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{x^5}dx$; б) $\int \frac{(2x-3)dx}{3x^2-7x+11}$; в) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos x-\sin x}$;

г) $\int \frac{x+3}{x^2(x+2)}dx$; д) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+4}}$; е) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\arcsin x}}$.

14. а) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx$; б) $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+2}dx$; в) $\int \frac{2\,dx}{x\ln x}$;

г) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$; е) $\int \frac{(x+1)dx}{x\left(x^2+9\right)}$;

ж) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$.

15. а) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\,dx$; б) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{4-4x-x^2}}$; в) $\int \frac{x^3\,dx}{e^{1-x^4}}$;

г) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; д) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2+4x+2}$; е) $\int \cos^5 x\,dx$;

ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$.

16. а) $\int \frac{dx}{3x^2+5}$; б) $\int \frac{\cos 2x}{3+\sin^2 2x}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x+4}}$;

г) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; е) $\int e^{2x}\left(e^{2x}+5\right)^{11}dx$;

ж) $\int \frac{(x-1)dx}{x\left(x^2+1\right)}$.

17.

а) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2-4}}$; б) $\int \frac{x^2-x+1}{x(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

г) $\int \frac{(4x+1)dx}{x^2+5x+8}$; д) $\int \left(1-2e^{2x}\right)^4 e^{2x}dx$; е) $\int \frac{\cos^3 x-1}{\cos^2 x}dx$;

ж) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

18.

а) $\int x^3\sqrt{2+x^4}\,dx$; б) $\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{16+25x^2}$;

г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; д) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$; е) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\cos^2 3x}dx$;

ж) $\int \frac{x\,dx}{x^2+5x+6}$.

19.

а) $\int \frac{x^2+x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{3x^2\,dx}{x^2+2}$; в) $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin x}dx$;

г) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos^2 x}}$; д) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2-5x+7}$; е) $\int \cos 2x \cos 5x\,dx$;

ж) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+3)(x+5)}$.

20.

а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; б) $\int \frac{x^2+3}{x^2+5}dx$; в) $\int \frac{(2x-3)dx}{x\left(x^2-5x+6\right)}$;

г) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2+8x+7}}$; д) $\int \frac{3\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$; е) $\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$;

ж) $\int \sin^2 3x \cos^2 3x\,dx$.

21.

а) $\int \frac{\sqrt[6]{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$; б) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-4x+5}$; в) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$;

г) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$; е) $\int \frac{x^2-x+3}{x^3+1}dx$;

ж) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$.

22.

а) $\int e^{3x}\sqrt{e^{3x}-9}\,dx$; б) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; в) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-4}$;

г) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+7x+13}$; д) $\int \frac{(x-3)dx}{x^3+3x^2}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$;

ж) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

23.
а) $\int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$; в) $\int \sin 4x \sin 5x\,dx$;
г) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; д) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+5}$; е) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{3\sin x}$;
ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-8x^2}}$.

24.
а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$; б) $\int \frac{3x-2}{x^3-x}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$;
г) $\int \sin^3 x \sin 2x\,dx$; д) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-2x-2}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;
ж) $\int \sin 3x \cos 2x\,dx$.

25.
а) $\int \frac{3x\,dx}{2x^2-5}$; б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}$; в) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+x-12}$;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+3}}$; д) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x}}$; е) $\int \frac{(x-3)dx}{x^2(x-1)}$;
ж) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{1-\cos 2x}$.

Задача 2. Вычислите интегралы с помощью интегрирования по частям.

1. $\int (2-x)e^{2x}\,dx$.
2. $\int (x+4)\ln x\,dx$.
3. $\int \lg x\,dx$.
4. $\int (2x+3)\cos 4x\,dx$.
5. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.
6. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.
7. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$.
8. $\int (3x+1)e^{-x}\,dx$.
9. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$.
10. $\int x\ln(x-1)dx$.
11. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.
12. $\int \ln(3x^2-1)dx$.
13. $\int \operatorname{arctg} 5x\,dx$.
14. $\int (7x-2)e^{-3x}\,dx$.
15. $\int \arcsin x\,dx$.
16. $\int (4x+3)\sin 2x\,dx$.
17. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.
18. $\int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx$.
19. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.
20. $\int (1-x)e^{-5x}\,dx$.
21. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$.
22. $\int (5x+1)e^{x}\,dx$.
23. $\int \arccos x\,dx$.
24. $\int x^3\ln x\,dx$.
25. $\int (3x+1)\cos 2x dx$.

Задача 3. Вычислите определённые интегралы.

1. а) $\int_1^{e^2} \frac{1+2x\ln x}{x^2}dx$; б) $\int_1^{e} \sqrt[3]{x}\ln x\,dx$; в) $\int_0^{2} \sqrt[3]{1+x^2}\,xdx$; г) $\int_1^{2} \frac{2^x dx}{1-4^x}$.

2. а) $\int_0^{1} \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$; б) $\int_1^{e} \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$; в) $\int_1^{2} x\sqrt{x^2-1}\,dx$; г) $\int_0^{1} x\operatorname{arctg} x\,dx$.

3. а) $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$; в) $\int_0^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx$; г) $\int_0^{1} \arcsin x\,dx$.

4. а) $\int_0^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+4}}$; б) $\int_0^{1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$; в) $\int_1^{2} \frac{dx}{x+x^2}$; г) $\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$.

5. а) $\int_0^{2} (3-2x)e^{-3x}\,dx$; б) $\int_0^{4} \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}+1}$; в) $\int_0^{1} 3x\sqrt{1-x^2}\,dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$.

6. а) $\int_0^{1} \frac{x^2}{x^6-25}dx$; б) $\int_1^{4} \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$; в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$; г) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$.

7. а) $\int_{-2}^{2} (1-x)\sin\pi x\,dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 4x\,dx$; в) $\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$; г) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$.

8. а) $\int_0^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\sin 2x\,dx$; в) $\int_1^{4} x\log_2 x\,dx$; г) $\int_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

9. а) $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; б) $\int_1^{3} 2^x\left(1+2^x\right)dx$; в) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\,dx}{\cos^2\left(x^2\right)}$; г) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2\,dx}{1-4x^3}$.

10. а) $\int_1^{e} \left(1+\sqrt{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$; б) $\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}\,dx$; в) $\int_{\sqrt{3}}^{2} x\sqrt{1+x^2}\,dx$; г) $\int_0^{1} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

11. а) $\int_0^{1} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{16+\sin^2 x}$; в) $\int_0^{1} \frac{x\,dx}{1+x^4}$; г) $\int_2^{3} (3-x)e^x\,dx$.

12. а) $\int_3^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+16}}$; в) $\int_4^{9} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$; г) $\int_1^{2} x^3\ln x\,dx$.

13. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$; в) $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}\,dx$; г) $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$.

14. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+3}{x-2}dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$; г) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

15. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 12^{\sin x}\cos x\,dx$; в) $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int\limits_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2+7}\,dx$; г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

17. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; б) $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$; г) $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1+9^x}dx$.

18. а) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$; в) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$; г) $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$.

19. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$; г) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

20. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$; б) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$; в) $\int\limits_2^3 \frac{x^2dx}{\left(4+x^3\right)^2}$; г) $\int\limits_1^2 \log_2 x\,dx$.

21. а) $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{(1-2x)^3}$; б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$; г) $\int\limits_1^e \frac{x-\ln^2 x}{x}dx$.

22. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{5}} \frac{dx}{\sqrt{\pi^2-25x^2}}$; б) $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx$; в) $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$; г) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

23. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)dx$; б) $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,xdx$; в) $\int\limits_1^{\sqrt[3]{3}} \sqrt{1+x^3}\,x^2dx$; г) $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$

.

24. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 x^3e^{x^4}\,dx$; в) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$; г) $\int\limits_{100}^{1000} 3^{\lg x}\frac{dx}{x}$.

25. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$; в) $\int\limits_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx$; г) $\int\limits_0^5 xe^x\,dx$.

26. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{5}} \frac{dx}{\sqrt{\pi^2-25x^2}}$; б) $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx$; в) $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$; г) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

27. а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int\limits_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2+7}\,dx$; г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

28. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$; в) $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}\,dx$; г) $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$

29. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 x^3e^{x^4}\,dx$; в) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$; г) $\int\limits_{100}^{1000} 3^{\lg x}\,\frac{dx}{x}$.

30. а) $\int\limits_1^{e^2} \frac{1+2x\ln x}{x^2}dx$; б) $\int\limits_1^e \sqrt[3]{x}\ln x\,dx$; в) $\int\limits_0^2 \sqrt[3]{1+x^2}\,xdx$; г) $\int\limits_1^2 \frac{2^x\,dx}{1-4^x}$.

31. а) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$; б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$; в) $\int\limits_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx$; г) $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$.

Задача 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболами. Постройте чертеж.

1. $y=\frac{1}{2}x^2-x+1;\ y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$.
2. $y=x^2-3x-1;\ y=-x^2-2x+5$.
3. $y=\frac{1}{3}x^2-2x-4;\ y=-\frac{2}{3}x^2-x-2$.
4. $y=2x^2-6x+3;\ y=-2x^2+x+5$.
5. $y=\frac{1}{2}x^2+x;\ y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$.
6. $y=2x^2-6x+1;\ y=-x^2+x-1$.
7. $y=x^2-5x-3;\ y=-3x^2+2x-1$.
8. $y=x^2-3x-4;\ y=-x^2-x+8$.
9. $y=\frac{1}{3}x^2-x+2;\ y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$.
10. $y=x^2-2x-4;\ y=-x^2-x+2$.
11. $y=x^2-2x-5;\ y=-x^2-x+1$.
12. $y=3x^2+3x;\ y=-x^2-2x+9$.
13. $y=2x^2+6x-3;\ y=-x^2+x+5$.
14. $y=\frac{1}{2}x^2-3x-2;\ y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3$.
15. $y=\frac{1}{4}x^2-2x-5;\ y=-\frac{3}{4}x^2-x+1$.
16. $y=2x^2+4x-7;\ y=-x^2-x+1$.
17. $y=2x^2-6x-2;\ y=-x^2+x-4$.

18. $y=\frac{1}{2}x^2+3x-2;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-x+3.$

19. $y=x^2-6x-2;\ \ y=-2x^2+x-4.$

20. $y=3x^2-5x-1;\ \ y=-x^2+2x+1.$

21. $y=2x^2+x-7;\ \ y=-x^2-4x+1.$

22. $y=\frac{1}{2}x^2-3x-1;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-x+2.$

23. $y=x^2-2x-1;\ \ y=-x^2-x+5.$

24. $y=2x^2+2x+1;\ \ y=-2x^2-3x+9.$

25. $y=\frac{1}{2}x^2-x-2;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-5x+3$

26. $y=\frac{1}{2}x^2-3x-2;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3.$

27. $y=\frac{1}{4}x^2-2x-5;\ \ y=-\frac{3}{4}x^2-x+1.$

28. $y=2x^2+4x-7;\ \ y=-x^2-x+1.$

29. $y=2x^2-6x-2;\ \ y=-x^2+x-4.$

30. $y=\frac{1}{2}x^2+3x-2;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-x+3.$

31. $y=x^2-6x-2;\ \ y=-2x^2+x-4$

Задача 5. Вычислите несобственный интеграл и сделайте вывод:

1. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3x}\left(x+1\right)dx$.
2. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.
3. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\log_2 x}{x^3}dx$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+6}$.
5. $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x}\left(3x-1\right)dx$.
6. $\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-8x+17}$.
7. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{x^2+3}$.
8. $\int\limits_{6}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x-10}$.
9. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$.
10. $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{\log_2 x}{x}dx$.
11. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+3}}$.
12. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$.
13. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.
14. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+5}$.
17. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.
18. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}$.
19. $\int\limits_{0,5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$.
20. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$.
21. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$.
22. $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-2x}\left(x+1\right)dx$.
23. $\int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.
24. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$.
25. $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{\sqrt{\log_3 x}}{x}dx$.
26. $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x}\left(3x-1\right)dx$.
27. $\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-8x+17}$.
28. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{x^2+3}$.
29. $\int\limits_{6}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x-10}$.
30. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$.

15. $\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

16. $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

31. $\int_{4}^{+\infty} \frac{\log_2 x}{x} dx$.

ЧАСТЬ 5. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Задача 1. Исследуйте ряды на сходимость:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{\pi}{2^{n}}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+3)^{3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n}\right)^{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2n+1}{n^{2}+2}\right)^{2}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{2}}{n\cdot 3^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^{2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n+2}{4n^{2}+1}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{3n^{2}+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n}\cdot n}{3^{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+3}{(3n+2)^{2}}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{6n+2}\right)^{5n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{\sqrt{4n^{3}+1}}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^{2} n}{3^{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n^{2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n-1}{3n+2}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^{3}+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n-1}{\sqrt{9n^{3}+1}}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{\frac{n}{n^{6}+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n}\cdot\sqrt[3]{n^{2}}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{2n}}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2} n^{2}}{\sqrt{n}(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2n+3}{3n^{2}-2}\right)^{2}$.

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+3}{n^{3}\left(2+(-1)^{n}\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\cdot\sqrt[4]{16n+3}}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^{2}+3n+1}{4n^{3}+5n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot n}{\sqrt{n^{3}+4}}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+1}{\sqrt[3]{n^{7}+3n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{n^{2}+n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n+1)}{3n^{2}+5}$.

14.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n(2n+7)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$.

15.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n^3-1}$.

16.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+7}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)}{n^2+n+5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

17.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(\sqrt{n}+1)^5}$.

18.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4^{n-1}}{n^4+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n^3+5}$.

19.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3n}{3n+1}$.

20.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

21.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^4+n^2+1}$.

22.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+8}{n^2\cdot 2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

23.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+3}{3n^4-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$.

24.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)2^n}{(n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+4}{n(5n+1)}$.

25.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)(n+1)!}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n-2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^3+n-1}$.

26.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{\frac{n}{n^6+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{2n}}$.

27.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n^2}{\sqrt{n}(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{3n^2-2}\right)^2$.

28.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3\left(2+(-1)^n\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot\sqrt[4]{16n+3}}$.

29.а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+1}{4n^3+5n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^3+4}}$.

30.а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt[3]{n^7+3n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{n^2+n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3n^2+5}$.

31.а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n(2n+7)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$.

Задача 2. Найдите область сходимости функционального ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{2n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\cdot 4^n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n^2\cdot 2^n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+5)^n}{\sqrt{n+1}}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n\cdot n}{(n+1)!}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^n}{n}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 2^n}$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{(n+1)!}$.
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$.
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5(x+5)^n}{(n+1)!}$.
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3(x+3)^n}{2n+3}$.
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}$.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{4^n(2n-1)}$.
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$.
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$.
21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 4^n}$.
22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{3n+8}$.
23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{(2n^2+5)\cdot 4^n}$.
24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-2)^n\cdot\sin\frac{1}{2^n}$.
25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$.
26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n\cdot n}{n^2+2n+3}$
27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-3)^n\cdot\sin\frac{1}{3^n}$
28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n^2\cdot 2^n}$
29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+3)^n\cdot\ln(1+\frac{1}{2^n})$
30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$
31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\sin\frac{1}{n}$.

Задача 3. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}\,dx$.

2. $\int_0^{0,1} \sin\left(100x^2\right)dx$.

3. $\int_0^{1} \cos x^2 dx$.

4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

5. $\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}\,dx$.

6. $\int_0^{1} \frac{\ln\left(1+x/5\right)}{x}\,dx$.

7. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

8. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}\,dx$.

9. $\int_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right)dx$.

10. $\int_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right)dx$.

11. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$.

12. $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$.

13. $\int_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+x/2\right)}{x}\,dx$.

14. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

15. $\int_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx$.

16. $\int_0^{0,4} \sin\left(5x/2\right)^2 dx$.

17. $\int_0^{0,2} \cos\left(25x^2\right)dx$.

18. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

19. $\int_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x}\,dx$.

20. $\int_0^{0,1} \frac{\ln\left(1+2x\right)}{x}\,dx$.

21. $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

22. $\int_0^{0,4} e^{-3x^2/4}dx$.

23. $\int_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right)dx$.

24. $\int_0^{0,4} \cos\left(5x/2\right)^2 dx$.

25. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$.

26. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

27. $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$.

28. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

29. $\int_0^{0,5} e^{-3x^2/25}dx$.

30. $\int_0^1 \sin x^2 dx$.

31. $\int_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)dx$.

ЧАСТЬ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача 1. Найдите общее решение дифференциального уравнения.

1. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$.
2. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$.
3. $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$.
4. $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy$.
5. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-3xy^2dx$.
6. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$.
7. $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0$.
8. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$.
9. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$.
10. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$.
11. $y\left(4+e^x\right)dy-e^xdx=0$.
12. $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0$.
13. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}yy'=0$.
14. $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$.
15. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx$.
16. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$.
17. $\left(e^x+8\right)dy-ye^xdx=0$.
18. $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$.
19. $\left(1+e^x\right)yy'=e^x$.
20. $y\ln y+xy'=0$.
21. $\left(1+e^x\right)y'=ye^x$.
22. $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0$.
23. $6xdx-2ydy=2yx^2dy-3xy^2dx$.
24. $y\left(1+\ln y\right)+xy'=0$.
25. $\left(3+e^x\right)yy'=e^x$
26. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-3xy^2dx$.
27. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$.
28. $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0$.
29. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$.
30. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$.
31. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$.

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+4\dfrac{y}{x}+2.$
2. $xy'=\dfrac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}.$
3. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}.$
4. $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y.$
5. $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{y}{x}+3.$
6. $xy'=\dfrac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}.$

7. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$.

8. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y$.

9. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$.

10. $xy' = \dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$.

11. $y' = \dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$.

12. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y$.

13. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$.

14. $xy' = \dfrac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$.

15. $y' = \dfrac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$.

16. $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$.

17. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8$.

18. $xy' = \dfrac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$.

19. $y' = \dfrac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$.

20. $xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y$.

21. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12$.

22. $xy' = \dfrac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}$.

23. $y' = \dfrac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$.

24. $xy' = 2\sqrt{3x^2+y^2} + y$.

25. $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$.

26. $xy' = \dfrac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$.

27. $y' = \dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$.

28. $xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y$.

29. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10$.

30. $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$.

31. $y' = \dfrac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$.

Задача 3. Найдите частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$
2. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
3. $y' + y\cos x = \cos x, \quad y(0) = 0.$
4. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$
5. $y' + \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}.$
6. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
7. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$
8. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$
9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$
10. $y' + \frac{2x}{1+x^2} \cdot y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$
11. $y' - \frac{2y}{x} = 5, \quad y(2) = 4.$
12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}, \quad y(1) = e.$
13. $y' - \frac{y}{x} = 2\ln x, \quad y(1) = 1.$
14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{8}{x^2}, \quad y(1) = 4.$
15. $y' + \frac{2}{x}y = x^3, \quad y(1) = -\frac{5}{6}.$
16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$
17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$
18. $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 1, \quad y(1) = 1.$
19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x}, \quad y(1) = 1.$
20. $y' + 2xy = -2x, \quad y(0) = 1.$
21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$
22. $y' + 2xy = e^{-x^2}\sin x, \quad y(0) = 1.$
23. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$
24. $y' + xy = -x, \quad y(0) = 3.$
25. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \; y(0) = 1$
26. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
27. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$
28. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$
29. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$
30. $y' + \frac{2x}{1+x^2} \cdot y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$
31. $y' - \frac{2y}{x} = 5, \quad y(2) = 4.$

Задача 4. Найдите решение задачи Коши.

1. $y''-3y'+2y=e^{-x},\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$
2. $y''-y'-2y=2x+2,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$
3. $y''-y'-2y=-2x-1,\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
4. $y''+2y'+y=xe^{x},\ y(0)=2,\ y'(0)=0.$
5. $2y''+8y=5x^{2}-2x-1,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$
6. $y''+y'-2y=\sin x-2\cos x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$
7. $y''+2y'+y=6xe^{x},\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$
8. $y''-y=(2x+1)e^{2x},\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$
9. $y''-6y'+9y=2x^{2}-x+3,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$
10. $y''+2y'+y=(3x+2)e^{x},\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$
11. $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$
12. $y''-3y'+2y=\cos x-\sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$
13. $y''-9y=(4x+2)e^{x},\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$
14. $y''-y=5x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$
15. $y''+2y'+y=(9x+6)e^{2x},\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$
16. $y''-y=e^{2x},\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
17. $y''-3y'+2y=\sin x-3\cos x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$
18. $y''-2y'-3y=\cos x+2\sin x,\ y(0)=2,\ y'(0)=0.$
19. $y''-4y=2e^{x},\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$
20. $y''-y=3e^{-x},\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
21. $y''-4y=4e^{2x},\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
22. $y''-y'=1+2x,\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
23. $y''-2y'-3y=2\sin x-4\cos x,\ y(0)=2,\ y'(0)=0.$
24. $y''-3y'+2y=\cos x-\sin x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$
25. $y''-y=-2e^{-x},\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
26. $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$
27. $y''-3y'+2y=\cos x-\sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$
28. $y''-9y=(4x+2)e^{x},\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$
29. $y''-y=5x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$
30. $y''+2y'+y=(9x+6)e^{2x},\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

31. $y'' - y = e^{2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$