МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.И. Назарова, А.В. Келлер

МАТЕМАТИКА

Сборник контрольных заданий
Часть 3

Челябинск
2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического моделирования

МАТЕМАТИКА

Сборник контрольных заданий
Часть 3

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2014

Одобрено
учебно-методической комиссией факультета
Математики, механики и компьютерных наук

Рецензент:

Математика: сборник контрольных заданий / составители Е.И. Назарова, А.В. Келлер. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – Ч. 3. – 58 с.

В сборник включены задачи по темам: «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Дифференциальные уравнения», а также задания, формирующие умения использовать методы математики для решения профессиональных задач. Сборник содержит образцы решения и оформления всех приведенных задач.

Целью сборника заданий является систематизация знаний студентов в соответствии с изучаемыми разделами дисциплины «Математика» третьего семестра укрупненной группы направлений подготовки 38.00.00 – Экономика и управление; предназначен для самостоятельной работы студентов в течение семестра, а также при подготовке к экзамену (зачету).

ВВЕДЕНИЕ

Расчетно-графическая работа (РГР) является одним из видов самостоятельной работы студентов, входит в учебный план дисциплины «Математика» как обязательный элемент учебной деятельности.

Данный сборник заданий включают подборку задач по темам, соответствующим дисциплине «Математика» третьего семестра укрупненной группы направлений подготовки 38.00.00 – Экономика и управление, а именно «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Дифференциальные уравнения».

Для выполнения работы студент должен знать перечень заданий, которые необходимо выполнить, и номер своего варианта.

Набор заданий, которые будут включены в РГР студентов каждого из направлений подготовки, определяет преподаватель.

Номер варианта определяется порядковым номером студента в списке, представленном в журнале группы. Номер каждого задания состоит из двух частей: первое число определяет номер раздела, к которому относится задание, второе число – порядковый номер задания в данном разделе.

Работа выполняется в отдельной тетради (12–18 листов) в клеточку.

Обложка тетради оформляется в печатном виде в соответствии с образцом, представленном в приложении 1. В местах пропусков должны быть внесены соответствующие данные выполнившего работу студента и преподавателя, который будет проверять семестровое задание. Регистрационные данные вносятся секретарем кафедры при поступлении работы.

На последнюю страницу тетради (обложку) клеится лист проверки, представленный в приложении 2. На листе проверки необходимо указать данные студента, а также номера заданий, которые были включены в семестровую работу.

Требования при выполнении работы:

- условие каждой задачи вклеивается в тетрадь в печатном виде (или пишется от руки разборчивым почерком),
- приводится полное решение с необходимыми пояснениями, вычислениями и расчетами,
- после решения записывается ответ (если задание содержит несколько пунктов, то ответ необходимо записывать для каждого пункта решения),
- графические построения выполняются карандашом,
- текст решения всех задач должен быть в письменном виде,
- для отметок и замечаний преподавателя должны быть оставлены поля (3–4 см),
- решение задач должно быть представлено по порядку.

РГР сдается на кафедру до указанного преподавателем срока и регистрируется секретарем кафедры. Работа принимается на проверку только в том случае, если содержит все задания, которые были включены в РГР, и удовлетворяет требованиям к оформлению.

На проверку РГР преподавателю необходимо не менее 7 дней со дня сдачи работы.

Результаты проверки РГР преподаватель заносит в списки, находящиеся на кафедре, по мере проверки работ.

Если РГР содержит все задания, удовлетворяет предъявляемым требованиям к оформлению и выполнена без серьезных ошибок, то она считается допущенной к экзамену (зачету), иначе возвращается на доработку. Для чего РГР следует взять у преподавателя (или у секретаря кафедры) выполнить в течение 2–3 дней работу над ошибками в этой же тетради и сдать для повторной проверки на кафедру.

Рекомендуется выполнение заданий РГР по мере изучения соответствующих тем, поскольку это способствует более глубокому усвоению полученных знаний и своевременному формированию умений. Необходимо отметить, что правильное своевременное выполнение РГР является одним из основных параметров, определяющих успешность освоения предмета.

Раздел I. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРМЕННОЙ

В разделе «Интегральное исчисление функции одной переменной» рассматриваются задачи на вычисление неопределенного и определенного интегралов от функций одной переменной (рациональных, тригонометрических, иррациональных) различными методами: непосредственное интегрирование, метод замены переменной, метод интегрирования по частям. Более того, рассматриваются задачи экономического содержания, при решении которых применяется интегральное исчисление.

Основные типы интегралов и методы их вычисления представлены в учебной литературе следующих авторов: Н. Ш. Кремер, В.А. Малугин, Д.Т. Письменный, В.И. Малыхин, М.С. Красс и Б.П. Чупрынов. Следует отметить, что теоретический материал разных авторов отличается последовательностью изложения материала и структурой методов, поэтому основой должен выступать лекционный материал. Несмотря на это, в учебных пособиях рассматривается более широкий круг задач, что поможет как при выполнении семестровой работы, так и при самостоятельной подготовке к занятиям. Практикумы и задачники В.И. Ермакова, Г.Н. Бермана и Н. Ш. Кремера содержат все рассматриваемые типы интегралов и помогут сориентироваться при выборе методов решения задач.

Задача 1.1. Вычислить неопределенные интегралы.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int \frac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x}dx$;

2) $\int \frac{2dx}{9+16x^2}$;

3) $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\cos x - \sin x}$;

4) $\int \frac{1+3\mathrm{tg}^2 x}{2\sin^2 x}dx$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$;

6) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos 2x}dx$;

7) $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$;

8) $\int \frac{2+\cos 2x}{\cos^2 x}dx$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$;

10) $\int \frac{\cos^3 x+5}{\cos^2 x}dx$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x+4}}$;

12) $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$;

13) $\int \frac{dx}{3x^2+5}$;

14) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\, dx$;

15) $\int \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx$;

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$;

17) $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}dx$;

18) $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{4-6x}}$;

19) $\int \frac{1+\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$;

20) $\int \frac{dx}{16+25x^2}$;

21) $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin x}dx$;

22) $\int \frac{x^2 + x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

23) $\int \sqrt[4]{(2-3x)^3} dx$;

24) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$;

25) $\int \frac{1 + 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$;

26) $\int \frac{dx}{4 + 9x^2}$;

27) $\int \left(e^{-2x} + 1\right)^2 dx$;

28) $\int \frac{dx}{7x^2 - 8}$;

29) $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$;

30) $\int \frac{dx}{3 - 5x^2}$.

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int x^3 \sqrt{x^4 - 5}\, dx$;

2) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}}$;

3) $\int \frac{\sin x\, dx}{9 + \cos^2 x}$;

4) $\int 3x e^{-x^2} dx$;

5) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 1}}$;

6) $\int \frac{4^x dx}{\sqrt[5]{3 + 4^x}}$;

7) $\int \frac{\cos x\, dx}{4 + \sin^2 x}$;

8) $\int \frac{2x\, dx}{4 - 9x^2}$;

9) $\int 3x^2 \left(1 - x^3\right)^8 dx$;

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$;

11) $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$;

12) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}$;

13) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;

14) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos 2x}} dx$;

15) $\int x^3 \sqrt[4]{3 - 5x^4}\, dx$;

16) $\int \frac{\sin 3x\, dx}{3 + \cos 3x}$;

17) $\int 3x e^{2 - 3x^2} dx$;

18) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2 - x^4}}$;

19) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{1 + \cos x}}$;

20) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + e^x}}$;

21) $\int x e^{-2x^2} dx$;

22) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$;

23) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt[5]{9 + 3^x}}$;

24) $\int \frac{3\sin x\, dx}{\sqrt{81 + \cos^2 x}}$;

25) $\int x^3 \sqrt{4 - x^4}\, dx$;

26) $\int \frac{\cos x\, dx}{3 - \sin^2 x}$;

27) $\int e^x \sin e^x dx$;

28) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1 + 2\cos x}}$;

29) $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^2 x}$;

30) $\int \frac{3e^x dx}{1 + e^{2x}}$.

в) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$;

2) $\int \sin 7x \sin 3x\, dx$;

3) $\int \cos^4 x\, dx$;

4) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$;

5) $\int \cos^3 x\, dx$;

6) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$;

7) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$;

8) $\int \sin^5 x\, dx$;

9) $\int \sin 4x \sin 5x\, dx$;

10) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$;

11) $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$;

12) $\int \cos^3 (x + 1) dx$;

13) $\int \sin^2 3x \cos^2 3x\, dx$;

14) $\int \cos 7x \cos 2x\, dx$;

15) $\int \cos x \sin 2x\, dx$;

16) $\int \cos^3 x \sin 2x\, dx$;

17) $\int \cos 2x \cos 5x\, dx$;

18) $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^4 x}$;

19) $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$;

20) $\int \cos^5 x\, dx$;

21) $\int \sin^3 x \sin 2x\, dx$;

22) $\int \sin^2 2x \cos^2 x\, dx$;

23) $\int \sin 7x \cos 3x\, dx$;

24) $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$;

25) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$;

26) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$;

27) $\int \sin x \cos^2 x\, dx$;

28) $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$;

29) $\int \sin^3 2x\, dx$;

30) $\int \cos 9x \cos 5x\, dx$.

г) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int \frac{3x-2}{x(x+1)} dx$;

2) $\int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2+1)}$;

3) $\int \frac{(x-3)dx}{x(x+1)(x+2)}$;

4) $\int \frac{(x+4)dx}{x^2(x-1)}$;

5) $\int \frac{x-1}{x^2(x+1)} dx$;

6) $\int \frac{x+4}{x(x^2+1)} dx$;

7) $\int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2+4)}$;

8) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx$;

9) $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+1)}$;

10) $\int \frac{x-3}{x^3+3x^2+2x} dx$;

11) $\int \frac{(x-1)dx}{x(x^2+4)}$;

12) $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{x^3+2x} dx$;

13) $\int \frac{x+3}{x^2(x+2)} dx$;

14) $\int \frac{x^2-x+1}{x(x+1)^2} dx$;

15) $\int \frac{x^2-x+3}{x^3+1} dx$;

16) $\int \frac{x\, dx}{(x-1)(x+3)(x+5)}$;

17) $\int \frac{2x-7}{x(x^2-1)} dx$;

18) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4} dx$;

19) $\int \frac{(2x-3)dx}{x(x^2-5x+6)}$;

20) $\int \frac{(x-3)dx}{x^3+3x^2}$;

21) $\int \frac{3x-2}{x^3-x} dx$;

22) $\int \frac{(x-3)dx}{x^2(x-1)}$;

23) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+4x} dx$;

24) $\int \frac{(x-3)dx}{x(x+3)(x+2)}$;

25) $\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)} dx$;

26) $\int \frac{x-8}{x^3-6x^2+9x} dx$;

27) $\int \frac{(x-3)dx}{x(x^2-3x+2)}$;

28) $\int \frac{(x-3)dx}{x^3-5x^2}$;

29) $\int \frac{x\, dx}{(x-1)(x-5)}$;

30) $\int \frac{x^2-x+3}{x^3+8x} dx$.

д) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int \frac{\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} dx$;

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$;

3) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x+1}}$;

4) $\int \frac{\sqrt{x+1}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

5) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2+x}}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

7) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}}{1+\sqrt{x}}dx$;

8) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+2}}$;

9) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}-16}dx$;

10) $\int \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x}}dx$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+7\sqrt[3]{x}}$;

12) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$;

13) $\int \frac{(x-1)dx}{x\sqrt{2x+1}}$;

14) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$;

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+1}$;

17) $\int \frac{xdx}{1+\sqrt[3]{x}}$;

18) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+8\sqrt{x}}$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$;

20) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;

21) $\int \frac{4dx}{\sqrt{x+3}+1}$;

22) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x+2}}$;

23) $\int \frac{2\sqrt{x}}{5+\sqrt[4]{x}}dx$;

24) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$;

25) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[4]{x+1}}dx$;

26) $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{3+x}}$;

27) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt{x+5}}dx$;

28) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+2}dx$;

29) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}}dx$;

30) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x}}$.

е) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int (2x+1)e^{2x}dx$;

2) $\int x\cos 4x\,dx$;

3) $\int xe^{-2x}dx$;

4) $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$;

5) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

6) $\int x^2\ln x\,dx$;

7) $\int \mathrm{arctg}\,5x\,dx$;

8) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$;

9) $\int (x-1)\ln x\,dx$;

10) $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$;

11) $\int (2x-1)\sin x\,dx$;

12) $\int (x+3)e^{3x}dx$;

13) $\int 2x\cos 2x\,dx$;

14) $\int (x+4)\ln x\,dx$;

15) $\int x\cos 4x\,dx$;

16) $\int 2x^3\ln x\,dx$;

17) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;

18) $\int x\ln(x-1)\,dx$;

19) $\int xe^{-3x}dx$;

20) $\int \arcsin 3x\,dx$;

21) $\int 4x\sin 2x\,dx$;

22) $\int \sqrt[3]{x^2}\,\ln x\,dx$;

23) $\int \mathrm{arctg}\,4x\,dx$;

24) $\int (5x+1)\,e^x dx$;

25) $\int (x+2)\sin 3x\,dx$;

26) $\int (x^3-x)\ln x\,dx$;

27) $\int \mathrm{arcctg}\,3x\,dx$;

28) $\int \arccos 2x\,dx$;

29) $\int (x+1)e^{-3x}dx$;

30) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

Пример 1.1

Вычислить неопределенные интегралы.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

Решение

Данный интеграл не является табличным. Преобразуем выражение, стоящее под знаком интеграла путем умножения числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное знаменателю

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \int \frac{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)dx}{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)} = \int \frac{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)dx}{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)dx}{x+9-x} = \frac{1}{9}\int \left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)dx.$$

Таким образом, интеграл от суммы функций, распишем на сумму интегралов от степенных функций

$$\frac{1}{9}\int \left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)dx = \frac{1}{9}\left(\int \sqrt{x+9}\,dx + \int \sqrt{x}\,dx\right) = \frac{1}{9}\left(\int (x+9)^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(x+9)^{\frac{3}{2}}}{3/2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right) = \frac{2}{27}\left(\sqrt{(x+9)^3}+\sqrt{x^3}\right).$$

Ответ: $\frac{2}{27}\left(\sqrt{(x+9)^3}+\sqrt{x^3}\right)$.

б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\ln x}{x}dx$.

Решение

Выполним эквивалентные преобразования выражения, стоящего под знаком интеграла: каждое слагаемое в числителе разделим на знаменатель, а затем, согласно свойствам неопределенного интеграла, полученный интеграл от суммы распишем на сумму интегралов

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+\ln x}{x}dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx. \qquad (*)$$

Выражение под знаком первого интеграла можно упростить, и интеграл вычисляется как интеграл от степенной функции.

Второй интеграл выпишем отдельно и вычислим методом замены переменной. На новую переменную заменим $\ln x$, найдем dx, тогда интеграл примет вид

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t, \\ (\ln x)' dx = dt, \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int t\,dt,$$

таким образом, полученный интеграл – табличный, вычислим его и осуществим обратную замену

$$\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Возвращаясь к выражению (*), вычислим первый интеграл, а вместо второго подставим его значение

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}dx + \frac{\ln^2 x}{2} + C = 3\sqrt[3]{x} + \frac{\ln x}{2} + C.$$

Ответ: $3\sqrt[3]{x} + \frac{\ln x}{2} + C$.

в) $\int \sin 2x \sin 3x dx$.

Решение

Под знаком интеграла произведение синусов. Преобразуем произведение в сумму с помощью формулы (1.1)

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right). \qquad (1.1)$$

$$\int \sin 2x \sin 3x dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(-x) - \cos(5x)\right)dx.$$

Распишем последний интеграл на сумму интегралов и вычислим их как табличные, учитывая $\cos x = \cos(-x)$ и формулу (1.2)

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C \qquad (1.2)$$

$$\int \frac{1}{2}\left(\cos(-x) - \cos(5x)\right)dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\sin 5x + C = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C$.

г) $\int \frac{2x^5 + x^3 + 3x - 4}{(x^2+1)(x-1)}dx$.

Решение

Степень числителя подынтегральной функции больше степени знаменателя, поэтому необходимо выделить целую часть, путем деления столбиком числителя на знаменатель, предварительно раскрыв скобки в знаменателе.

$$
\begin{array}{r|l}
{}_{-}\,2x^5+0x^4+x^3+0x^2+3x-4 & x^3-x^2+x-1 \\
\cline{2-2}
2x^5-2x^4+2x^3-2x^2 \qquad\qquad & 2x^2+2x+1 \\
\cline{1-1}
{}_{-}\,2x^4-x^3+2x^2+3x-4 & \\
2x^4-2x^3+2x^2-2x \quad & \\
\cline{1-1}
{}_{-}\,x^3+0x^2+5x-4 & \\
x^3-x^2+x-1 & \\
\cline{1-1}
x^2+4x-3 &
\end{array}
$$

Согласно проведенному делению, получим

$$\frac{2x^5+x^3+3x-4}{(x^2+1)(x-1)}=2x^2+2x+1+\frac{x^2+4x-3}{(x^2+1)(x-1)}. \qquad (**)$$

Поскольку знаменатель дроби $\frac{x^2+4x-3}{(x^2+1)(x-1)}$ разложен на множители, то ее можно разложить на сумму простейших дробей, т.е.

$$\frac{x^2+4x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}. \qquad (***)$$

Найдем коэффициенты A, B и C методом неопределенных коэффициентов. Приведем дроби справа от знака равенства к общему знаменателю

$$\frac{x^2+4x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Дроби равны, их знаменатели также равны, значит, должны быть равны и их числители. Выпишем числители, раскрыв все скобки

$$x^2+4x-3=Ax^2+Bx-Ax-B+Cx^2+C.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^2:\quad 1=A+C$,

$x^1:\quad 4=B-A$,

$x^0:-3=-B+C$.

Решив данную систему, получим

$$A=0,\ B=4,\ C=1.$$

Подставим в выражение (***) найденные значения A, B и C

$$\frac{x^2+4x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{4}{x^2+1}+\frac{1}{x-1},$$

исходя из этого, выражение (**) можно записать в виде

$$\frac{2x^5+x^3+3x-4}{(x^2+1)(x-1)}=2x^2+2x+1+\frac{4}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим

$$\int\frac{2x^5+x^3+3x-4}{(x^2+1)(x-1)}dx=\int\left(2x^2+2x+1+\frac{4}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+x+4\operatorname{arctg}x+\ln|x-1|+C.$$

Ответ: $=\dfrac{2x^3}{3}+x^2+x+4\operatorname{arctg}x+\ln|x-1|+C$.

д) $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$**.**

Решение

Для нахождения данного интеграла воспользуемся методом замены переменной, заменим на новую переменную корень, выразим x и найдем dx

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=t,\\ x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2},\\ dx=\dfrac{4tdt}{(1-t^2)^2}\end{array}\right|=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}=4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)(1-t^2)}.$$

Выпишем подынтегральное выражение и разложим дробь на простейшие аналогично рассмотренному выше примеру

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1-t)(1+t)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{C}{1-t}+\frac{D}{1+t}.$$

Найдем коэффициенты A, B, C и D.

$$t^2=(At+B)(1-t^2)+C(1+t)(1+t^2)+D(1-t)(1+t^2),$$

раскрыв скобки, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$t^3:\qquad 0=-A+C-D,$

$t^2:\qquad 1=-B+C+D,$

$t^1:\qquad 0=A+C-D,$

$t^0:\qquad 0=B+C+D,$

откуда,

$$A=0,\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{4},\ D=\frac{1}{4}.$$

Тогда,

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1-t)(1+t)}=\frac{-1/2}{1+t^2}+\frac{1/4}{1-t}+\frac{1/4}{1+t}.$$

Искомый интеграл распишем на сумму интегралов

$$4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)(1-t^2)}=-\frac{1}{2}\cdot 4\int\frac{dt}{1+t^2}+\frac{1}{4}\cdot 4\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{4}\cdot 4\int\frac{dt}{1+t}=$$

$$=-2\operatorname{arctg} t+\ln|1-t|+\ln|1+t|+C=-2\operatorname{arctg} t+\ln|1-t^2|+C,$$

выполнив обратную замену, получим

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}^2\right|+C=$$

$$=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left|\frac{2}{x+1}\right|+C=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\ln|x+1|+C$$

Ответ: $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\ln|x+1|+C$.

е) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Решение

Подобного типа интегралы вычисляются методом интегрирования по частям

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{1.4}$$

Согласно формуле, один из множителей под знаком интеграла обозначают за u, остальные за dv, далее находят du и v, затем расписывают по формуле (1.4), вновь получившийся интеграл вычисляют. Таким образом,

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln x\Rightarrow du=(\ln x)'dx=\frac{dx}{x},\\ dv=\frac{dx}{\sqrt{x}}\Rightarrow v=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\end{array}\right|=$$

$$=\ln x\cdot 2\sqrt{x}-\int 2\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{x}=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C.$$

Ответ: $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$.

Задача 1.2. Вычислить определенные интегралы.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; 2) $\int\limits_0^{3/4}\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; 3) $\int\limits_3^{3\sqrt{3}}\frac{dx}{9+x^2}$;

4) $\int_{1}^{8} \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx$;

5) $\int_{0}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{81-(9x)^2}}$;

6) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$;

7) $\int_{-\pi/4}^{0} \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$;

8) $\int_{4\pi/5}^{\pi} \sin\frac{5x-\pi}{4}\,dx$;

9) $\int_{1}^{2}\left(e^{2x}-\frac{1}{x}\right)dx$;

10) $\int_{0}^{\pi/4} \mathrm{tg}^2 x\,dx$;

11) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-1}$;

12) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos x}$;

13) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x-\sin^4 x}$;

14) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}\,dx}{9-2x^2}$;

15) $\int_{0}^{\pi/6} \sin 5x\cos 7x\,dx$;

16) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{9-x^2}$;

17) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{-\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$;

18) $\int_{0}^{\pi/10} \frac{dx}{\sqrt{\pi^2-25x^2}}$;

19) $\int_{5}^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$;

20) $\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$;

21) $\int_{2}^{e} \frac{e\,dx}{e^4-e^4x^2}$;

22) $\int_{-1}^{-1/2} \frac{\sin(\pi-x)}{\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}\,dx$;

23) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$;

24) $\int_{0}^{1}\left(e^{-x}-\mathrm{tg}^2 x\right)dx$;

25) $\int_{0}^{1,5} \frac{dx}{9+4x^2}$;

26) $\int_{5\pi/6}^{\pi} \sin x\sin 4x\,dx$;

27) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \mathrm{ctg}^2 x\,dx$;

28) $\int_{0}^{1}\left(\sin x-e^x\right)dx$;

29) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)dx$;

30) $\int_{0}^{\pi/4} \sin^2 x dx$.

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int_{1}^{e} \frac{2+2x\ln x}{x^2}\,dx$;

2) $\int_{0}^{\pi/3} e^{\cos x}\sin x\,dx$;

3) $\int_{1}^{2} \frac{2^x\,dx}{1-4^x}$;

4) $\int_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

5) $\int_{1/3}^{0,5} x\sqrt{1-x^2}\,dx$;

6) $\int_{2}^{3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+4}}$;

7) $\int_{5\pi/6}^{\pi} 12^{\sin x}\cos x\,dx$;

8) $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$;

9) $\int_{4}^{9} \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$;

10) $\int_{0}^{0,5} x\sqrt[4]{1-x^2}\,dx$;

11) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

12) $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$;

13) $\int_{-1/2}^{0} \frac{4^x}{\sqrt{1-16^x}}\,dx$;

14) $\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$;

15) $\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$;

16) $\int_{1}^{2} \frac{x^2}{x^6-25}\,dx$;

17) $\int_{0}^{1} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$;

18) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\cos^2(\pi-\ln x)}$;

19) $\int_{1}^{2} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

20) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$;

21) $\int_{-0,5}^{0} \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^{4x}}$;

22) $\int_{1}^{4} \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}+1}$;

23) $\int_{-3}^{-2} x\sqrt{x^2-1}\,dx$;

24) $\int_{1}^{2} \frac{x^2 dx}{1-4x^3}$;

25) $\int_{0}^{\sqrt{\pi/3}} \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx$;

26) $\int_{-2}^{0} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$;

27) $\int_{\pi/2}^{5\pi/6} \frac{\cos x\,dx}{16+\sin^2 x}$;

28) $\int_{e}^{e^2} \frac{1+\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$;

29) $\int_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

30) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

в) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int_{1/3}^{1/2} \arcsin x\,dx$;

2) $\int_{1}^{e} \sqrt[3]{x}\ln x\,dx$;

3) $\int_{0}^{\pi/4} x\sin 2x\,dx$;

4) $\int_{-1}^{1/2} (1-x)\sin\pi x\,dx$;

5) $\int_{0}^{1} \mathrm{arcctg}(x+1)\,dx$;

6) $\int_{-1/3}^{0} (3-2x)e^{-3x}\,dx$;

7) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

8) $\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx$;

9) $\int_{2}^{3} \mathrm{arctg}(x-1)\,dx$;

10) $\int_{0}^{\pi/3} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$;

11) $\int_{2}^{3} \mathrm{arctg}(x+1)\,dx$;

12) $\int_{0}^{\pi/4} (x-\pi)\cos 2x\,dx$;

13) $\int_{1}^{e^3} x^3\ln x\,dx$;

14) $\int_{0}^{\pi/4} (x+1)\sin 2x\,dx$;

15) $\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}\,dx$;

16) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}(2x-1)\cos x\,dx$;

17) $\int\limits_{e^2}^{e^4}\ln\sqrt{x}dx$;

18) $\int\limits_{-1/2}^{-1/4}\arccos x\,dx$;

19) $\int\limits_{0}^{1}e^{2x}(2x+1)\,dx$;

20) $\int\limits_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx$;

21) $\int\limits_{1}^{e^2}\left(x^2+1\right)\ln x dx$;

22) $\int\limits_{-1}^{0}(x-1)e^{-x}dx$;

23) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}3x\sin x\,dx$;

24) $\int\limits_{1}^{e}(x-1)\ln x\,dx$;

25) $\int\limits_{0}^{1}xe^{3x}dx$;

26) $\int\limits_{-\pi/4}^{0}(x+1)\cos 4x\,dx$;

27) $\int\limits_{0}^{1}(3-x)e^{x}dx$;

28) $\int\limits_{e}^{e^2}x\ln x\,dx$;

29) $\int\limits_{-1}^{0}(3-2x)e^{x}dx$;

30) $\int\limits_{1}^{3}x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$.

г) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int\limits_{1}^{2}\frac{3x^4+3x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$;

2) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{2x^4-4x^3-3}{x(x-1)^2}dx$;

3) $\int\limits_{-0,5}^{0,5}\frac{x^4+1}{(x-1)\left(x^2-1\right)}dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x^4-2x^2-2x}{x^3-x^2}dx$;

5) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^3-x^2}{(x+2)(x-1)}dx$;

6) $\int\limits_{1}^{3}\frac{4x^4+8x^3-3}{x^3+2x^2+x}dx$;

7) $\int\limits_{1}^{2}\frac{x^3-2x+1}{4x^2-1}dx$;

8) $\int\limits_{-3}^{-2}\frac{4x^4+8x^3-2}{x(x+1)^2}dx$;

9) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-3x+2}dx$;

10) $\int\limits_{1}^{2}\frac{3x^4-x^2+x}{x^2(x+1)}dx$;

11) $\int\limits_{2}^{3}\frac{4x^4+8x^3-1}{\left(x^2+x\right)(x+1)}dx$;

12) $\int\limits_{2}^{4}\frac{x^4+1}{x^3-x^2}dx$;

13) $\int\limits_{-3}^{-2}\frac{x^5-4x^2+2x}{x^3-x^2}dx$;

14) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3+x^2}{(x-2)(x+1)}dx$;

15) $\int\limits_{2}^{3}\frac{2x^5-2x+1}{1-x^4}dx$;

16) $\int\limits_{3}^{4}\frac{x^3-2x^2+x}{2x^2-5x+2}dx$;

17) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x^4+x^3+1}{x^3-2x^2}dx$;

18) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x^5-2x^3+x}{x\left(x^2-x\right)}dx$;

19) $\int\limits_{2}^{3}\frac{-x^4+2x+1}{(x-1)\left(x^2+1\right)}dx$;

20) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x^4+2x^3+1}{x^3-3x^2+2x}dx$;

21) $\int\limits_{1}^{2}\frac{3x-x^4-2}{x(x+1)^2}dx$;

22) $\int\limits_{1}^{3}\frac{x^4+x^3-2x}{x^3+x^2}dx$;

23) $\int\limits_{4}^{6}\frac{x^3+2x^2-x}{x^2+x+7}dx$;

24) $\int\limits_{2}^{4}\frac{3x^4+5x^3-2x}{\left(x^2-x\right)(x+1)}dx$;

25) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x^3 - 2x - 1}{x^2 - x} dx$; 27) $\int\limits_{1}^{1,5} \frac{x^4 + x^2}{(x-2)(x+1)x} dx$; 29) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{2x^5 + 3x^2 + 1}{(2+x)(3-x)} dx$;

26) $\int\limits_{2}^{4} \frac{x^5 - 5}{(x-1)(x^2-1)} dx$; 28) $\int\limits_{2}^{3} \frac{-x^4 + 3x^2 + 1}{x(x^2-1)} dx$; 30) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{(x-3)(x+1)} dx$.

Пример 1.2

Вычислить определенные интегралы.

а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Решение

Методы вычисления определенных интегралов аналогичны методам вычисления неопределенных интегралов. При нахождении значения определенного интеграла применяется формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{1.5}$$

где $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция, первообразная которой $F(x)$.

Преобразовав выражение под знаком интеграла, получим табличный интеграл, при вычислении которого необходимо применить формулу (1.2)

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \int\limits_{-1}^{0} (11+5x)^{-3} dx = \frac{1}{5} \frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{10}(11+0)^{-2} + \frac{1}{10}(11-5)^{-2} = \frac{17}{8712}.$$

Ответ: $\frac{17}{8712}$.

б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$.

Решение

При вычислении определенных интегралов методом замены переменной следует обратить внимание на необходимость изменения пределов интегрирования в соответствии с введенной переменной.

Если границы интегрирования были заменены, то не нужно выполнять обратную замену, т.е. согласно формуле (1.5) подставляем границы изменения новой переменной. Таким образом,

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t, \\ -\frac{dx}{x^2} = dt, \\ 1 \le x \le 2, \\ 1 \le t \le \frac{1}{2} \end{array} \right| = -\int_1^{1/2} e^t dt = -e^t \Big|_1^{1/2} = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e^1 \right) = e - \sqrt{e}.$$

Ответ: $e - \sqrt{e}$.

в) $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$.

Решение

Для нахождения данного интеграла воспользуемся формулой (1.4) интегрирования по частям

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} - 0 \cdot \sin 0 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$.

г) $\int_0^{1/2} \frac{x^3 dx}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение

Степень числителя подынтегральной функции больше степени знаменателя, поэтому необходимо выделить целую часть

$$\begin{array}{r|l} \_\,x^3 \qquad\qquad & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2} x^3 - 3x^2 + 2x & x + 3 \\ \cline{1-1} \_\,3x^2 - 2x & \\ 3x^2 - 9x + 6 & \\ \cline{1-1} 7x - 6 & \end{array}$$

Следовательно, рациональное выражение под знаком интеграла запишем в следующем виде

$$\frac{x^3}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}.$$

Знаменатель оставшейся дроби раскладывается на множители, поэтому разложим ее на простейшие

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Найдем коэффициенты A и B

$x^1:\quad 7=A+B,$

$x^0:\quad -6=-2A-B,$

$$A=-1,\ B=8.$$

Таким образом, в исходном интеграле подынтегральное выражение запишем в виде суммы целой части и простейших дробей и вычислим интегралы от каждого слагаемого

$$\int_0^{1/2}\frac{x^3dx}{x^2-3x+2}=\int_0^{1/2}\left(x+3-\frac{1}{x-1}+\frac{8}{x-2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+3x-\ln|x-1|+8\ln|x-2|\right)\Bigg|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2}+8\ln\frac{3}{2}-8\ln 2=\frac{13}{8}+\ln 2+8\ln\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{13}{8}+\ln 2+8\ln\frac{3}{4}$.

Задача 1.3. Вычислить несобственные интегралы.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$;

2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$;

3) $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{4x^2+4x+5}$;

4) $\int_{1/3}^{+\infty}\frac{\pi dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}$;

5) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}2x dx}{\pi(1+4x^2)}$;

6) $\int_{1/2}^{+\infty}\frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$;

7) $\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$;

8) $\int_0^{+\infty}\frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$;

9) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$;

10) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x)\ln 3}$;

11) $\int_0^{+\infty}xe^{-3x}dx$;

12) $\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$;

13) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$; 19) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(3-x^2)dx}{x^2+4}$; 25) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-2x+1}$;

14) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$; 20) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; 26) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{16x^4+1}$;

15) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$; 21) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$; 27) $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$;

16) $\int\limits_{4}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; 22) $\int\limits_{0}^{+\infty}x\sin x dx$; 28) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln 0{,}75}$;

17) $\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$; 23) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}$; 29) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{16xdx}{16x^2-1}$;

18) $\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+4x+5}$; 24) $\int\limits_{0}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\mathrm{arctg}2x}}{1+4x^2}dx$; 30) $\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{(2x-1)^2}$; 7) $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$; 13) $\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}$;

2) $\int\limits_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$; 8) $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}\ln 2}$; 14) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1-x^4}$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{e^{\mathrm{tg}\,x}}{\cos^2 x}dx$; 9) $\int\limits_{-3/4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$; 15) $\int\limits_{0}^{2/3}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$;

4) $\int\limits_{1}^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$; 10) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$; 16) $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)}dx$;

5) $\int\limits_{1}^{5}\frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$; 11) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$; 17) $\int\limits_{1/4}^{1}\frac{dx}{20x^2-9x+1}$;

6) $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$; 12) $\int\limits_{0}^{1}\frac{2e-\frac{2}{\pi}\arcsin x}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx$; 18) $\int\limits_{1/3}^{1}\frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$;

19) $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}$;

20) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$;

21) $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt[3]{9}x dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$;

22) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x\, dx}{\sqrt{\cos x}}$;

23) $\int\limits_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$;

24) $\int\limits_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

25) $\int\limits_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$;

26) $\int\limits_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{\left(16-x^2\right)^3}}$;

27) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$;

28) $\int\limits_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx$;

29) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$;

30) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

Пример 1.3

Вычислить несобственные интегралы.

а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{3dx}{3x^2+6x+5}$.

Решение

Данный интеграл является несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования (несобственный интеграл первого рода).

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_a^B f(x)dx, \tag{1.6}$$

где функция $f(x)$ интегрируема на произвольном отрезке $[a;B]$.

Согласно определению (1.6), получаем

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{3dx}{3x^2+6x+5} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{B} \frac{3dx}{3x^2+6x+5}.$$

Вычислим интеграл под знаком предела (выделим в знаменателе полный квадрат), а затем найдем значение предела

$$\lim_{B\to+\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{B} \frac{3dx}{3x^2+6x+5} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{B} \frac{dx}{x^2+2x+\frac{5}{3}} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{B} \frac{dx}{(x+1)^2+\frac{2}{3}} =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{B} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \lim_{B\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(B+1)}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \lim_{B\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(B+1)}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}\,\pi}{12}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}\,\pi}{12}$.

б) $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение

Подынтегральная функция не ограничена вблизи точки $x=1$, поэтому данный интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции (несобственный интеграл второго рода).

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \tag{1.7}$$

где функция $f(x)$ непрерывная, но неограниченная на полуинтервале $[a;b)$.

Исходя из определения (2.7), получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вычислим интеграл под знаком предела методом замены переменной (при этом границы интегрирования также необходимо заменить), а затем найдем значение предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 1-x^2=t, \\ -2xdx=dt, \\ xdx=-\dfrac{dt}{2}, \\ 0\le x\le 1-\varepsilon, \\ 1\le t\le 2\varepsilon-\varepsilon^2 \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_1^{2\varepsilon-\varepsilon^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{t}\,\Big|_1^{2\varepsilon-\varepsilon^2} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{t}\,\Big|_1^{2\varepsilon-\varepsilon^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}-\sqrt{1}\right) = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 1.4. Функция предельного дохода некоторого предприятия имеет вид $R_{\text{пред}}(q) = R'(q)$. Найти функцию дохода и закон спроса на продукцию данного предприятия.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 1 по 15:

1) $R'(q) = (9-q)e^{-\frac{q}{9}}$;

2) $R'(q) = \dfrac{q^2}{\sqrt{q^3+400}}$;

3) $R'(q) = 45-0{,}02q-0{,}001q^2$;

4) $R'(q) = 25-0{,}3q-0{,}04q^2$;

5) $R'(q) = (5-q)e^{-\frac{q}{5}}$;

6) $R'(q) = 30 - 0{,}03q$;

7) $R'(q) = 25 - 0{,}4q - 0{,}06q^2$;

8) $R'(q) = (7 - q)e^{-\frac{q}{7}}$;

9) $R'(q) = 45 - 0{,}04q - 0{,}003q^2$;

10) $R'(q) = \dfrac{q^2}{\sqrt{q^3 + 900}}$;

11) $R'(q) = 40 - 0{,}04q$;

12) $R'(q) = 55 - 0{,}05q - 0{,}002q^2$;

13) $R'(q) = \dfrac{q^2}{\sqrt{q^3 + 1600}}$;

14) $R'(q) = 30 - 0{,}2q - 0{,}05q^2$;

15) $R'(q) = 20 - 0{,}02q$.

Функция предельных издержек некоторого предприятия имеет вид $C_{\text{пред}}(q) = C'(q)$. Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют F ден. ед. в месяц, и определить издержки производства K изделий в месяц.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 16 по 30:

16) $C'(q) = 50 + 0{,}02q, \quad F = 2500, \quad K = 250$;

17) $C'(q) = 60 - 0{,}04q + 0{,}003q^2, \quad F = 200, \quad K = 250$;

18) $C'(q) = 60 + 0{,}04q, \quad F = 1800, \quad K = 150$;

19) $C'(q) = 60 + 0{,}03q, \quad F = 2000, \quad K = 230$;

20) $C'(q) = 75 - 0{,}03q + 0{,}001q^2, \quad F = 250, \quad K = 200$;

21) $C'(q) = 50 + 0{,}05q, \quad F = 2000, \quad K = 150$;

22) $C'(q) = 80 + 0{,}05q, \quad F = 3500, \quad K = 300$;

23) $C'(q) = 65 - 0{,}04q + 0{,}002q^2, \quad F = 300, \quad K = 150$;

24) $C'(q) = 90 + 0{,}06q, \quad F = 2500, \quad K = 250$;

25) $C'(q) = 65 + 0{,}02q, \quad F = 1500, \quad K = 150$;

26) $C'(q) = 70 - 0{,}02q + 0{,}002q^2, \quad F = 250, \quad K = 200$;

27) $C'(q) = 75 + 0{,}02q, \quad F = 2000, \quad K = 350$;

28) $C'(q) = 70 + 0{,}04q, \quad F = 3000, \quad K = 350$;

29) $C'(q) = 80 - 0{,}03q + 0{,}002q^2, \quad F = 150, \quad K = 100$;

30) $C'(q) = 95 + 0{,}08q, \quad F = 3000, \quad K = 400$.

Пример 1.4

Задана функция предельного дохода $R'(q) = 20 - 0{,}04q$. Найти функцию дохода и закон спроса на продукцию.

Решение

Известно, что функция предельного дохода является производной функции дохода, следовательно, для нахождения уравнения функции дохода следует вычислить интеграл от выражения, определяющего предельную функцию дохода, т.е.

$$R(q)=\int R'(q)dq=\int(20-0{,}04q)dq=20q-0{,}02q^2+C.$$

Найдем константу C из условия, что при производстве нуля единиц продукции значение функции дохода равно нулю

$$R(0)=20\cdot 0-0{,}02\cdot 0^2+C,$$
$$C=0,$$

таким образом,

$$R(q)=20q-0{,}02q^2.$$

Если каждая единица продукции продается по цене p, то доход определяется формулой

$$R=qp.$$

Следовательно, деля на q функцию дохода, находим закон спроса $p(q)$

$$p(q)=20-0{,}02q$$

или

$$q_D(p)=-50q+1000.$$

Ответ: $R(q)=20q-0{,}02q^2$ – функция дохода, $q_D(p)=-50q+1000$ – закон спроса на продукцию.

Замечание. При нахождении функции издержек $C(q)$ следует учитывать, что ее значение равно значению фиксированных издержек, при условии, что ничего не производится (в точке $q=0$).

Задача 1.5. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y=f(x)$, где y – доля совокупного дохода, получаемая частью x наиболее низко оплачиваемого населения. Определить часть дохода, которую получают N% наиболее низко оплачиваемого населения. Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $y=\dfrac{9}{10}x^2+\dfrac{1}{10}x,\quad N=10;$

2) $y=0{,}87x^2+0{,}13x,\quad N=8;$

3) $y=\dfrac{9}{12}x^2+\dfrac{3}{12}x,\quad N=4;$

4) $y=0{,}96x^2+0{,}04x,\quad N=8;$

5) $y=\dfrac{13}{14}x^2+\dfrac{1}{14}x,\quad N=14;$

6) $y=0{,}78x^2+0{,}22x,\quad N=10;$

7) $y=\dfrac{14}{15}x^2+\dfrac{1}{15}x,\quad N=15;$

8) $y=0{,}77x^2+0{,}23x,\quad N=8;$

9) $y=\dfrac{6}{10}x^2+\dfrac{4}{10}x,\quad N=5;$

10) $y=0{,}82x^2+0{,}18x,\quad N=10;$

11) $y=\dfrac{8}{14}x^2+\dfrac{6}{14}x,\quad N=14;$

12) $y=0{,}95x^2+0{,}05x,\quad N=12;$

13) $y=\frac{11}{15}x^2+\frac{4}{15}x, \quad N=15$;

14) $y=\frac{10}{12}x^2+\frac{2}{12}x, \quad N=6$;

15) $y=0{,}85x^2+0{,}15x, \quad N=15$;

16) $y=\frac{11}{14}x^2+\frac{3}{14}x, \quad N=14$;

17) $y=\frac{8}{10}x^2+\frac{2}{10}x, \quad N=5$;

18) $y=0{,}75x^2+0{,}25x, \quad N=12$;

19) $y=\frac{8}{12}x^2+\frac{4}{12}x, \quad N=3$;

20) $y=0{,}89x^2+0{,}11x, \quad N=15$;

21) $y=\frac{12}{14}x^2+\frac{2}{14}x, \quad N=7$;

22) $y=0{,}74x^2+0{,}26x, \quad N=10$;

23) $y=\frac{7}{12}x^2+\frac{5}{12}x, \quad N=12$;

24) $y=0{,}92x^2+0{,}08x, \quad N=10$;

25) $y=\frac{10}{14}x^2+\frac{4}{14}x, \quad N=7$;

26) $y=\frac{7}{10}x^2+\frac{3}{10}x, \quad N=10$;

27) $y=0{,}88x^2+0{,}12x, \quad N=5$;

28) $y=\frac{13}{15}x^2+\frac{2}{15}x, \quad N=15$;

29) $y=0{,}76x^2+0{,}24x, \quad N=15$;

30) $y=\frac{9}{14}x^2+\frac{5}{14}x, \quad N=14$.

Пример 1.5

Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y=\frac{11}{12}x^2+\frac{1}{12}x$, где y – доля совокупного дохода, получаемая частью x наиболее низко оплачиваемого населения. Определить часть дохода, которую получают 12% наиболее низко оплачиваемого населения. Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.

Решение

По условию наиболее низко оплачиваемого населения 12%, следовательно, для того, чтобы найти его часть дохода, необходимо вычислить значение совокупного дохода в точке $x=0{,}12$

$$y(0{,}1)=\frac{11}{12}\cdot 0{,}12^2+\frac{1}{12}\cdot 0{,}12=0{,}0232.$$

Таким образом, 12% наиболее низко оплачиваемого населения получают 2,32% совокупного дохода.

Отклонение реального распределения доходов от идеального измеряется отношением L и называется коэффициентом неравномерности распределения совокупного дохода

$$L=2\int_0^1 \left(x-f(x)\right)dx, \tag{1.8}$$

где $y=f(x)$ – уравнение кривой Лоренца.

По формуле (1.8) находим коэффициент L неравномерности распределения совокупного дохода

$$L = 2\int_0^1 \left(x - \frac{11}{12}x^2 - \frac{1}{12}x \right) dx = 2\int_0^1 \left(\frac{11}{12}x - \frac{11}{12}x^2 \right) dx = 2 \cdot \frac{11}{12}\int_0^1 \left(x - x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{11}{6}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{36}.$$

Ответ: 12% наиболее низко оплачиваемого населения получают 2,32% совокупного дохода; коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода равен $^{11}\!/_{36}$.

Задача 1.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.
Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $y = x^2 - 3x + 1,\ y = -x^2 - 2x + 2$;
2) $y = x^2,\ y = 3 - x$;
3) $y = \sqrt{x+1},\ y = (x+1)^3$;
4) $y = x^2 - 2x - 2,\ y = x - 4$;
5) $y = (x-1)^2,\ y = \sqrt{x-1}$;
6) $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ y = \dfrac{x^2}{2}$;
7) $y = -x^2,\ y = -x - 6$;
8) $y = (x-2)^3,\ y = 4x - 8$;
9) $y = (x+2)^2,\ y = 5x + 6$;
10) $y = x^2 - 6x - 2,\ y = x - 2x^2 - 4$;
11) $y = (x-1)^2,\ y^2 = x - 1$;
12) $y = 2x^2 - 5x,\ y = -x^2 + x$;
13) $y = x^2 - 6x - 2,\ y = x + 2x^2 - 2$;
14) $y = 6x - 2,\ y = 4 - x^2 + x$;
15) $y = (x-1)^3,\ y = x - 1$;
16) $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x$;
17) $y = \dfrac{2}{1+x^2},\ y = 1$;
18) $y = (x-1)^2,\ y = -x + 3$;
19) $y = -(x+1)^2,\ y = -2x - 5$;
20) $y = (x+1)^2,\ y^2 = x + 1$;
21) $y = 2x^2 + 4x - 7,\ y = 1 - x^2 - x$;
22) $y = x^2,\ y = 3x$;
23) $y = 2x^2 - 6x - 2,\ y = 4 - x^2 + x$;
24) $y = -(x-1)^2,\ y = 2x - 5$;
25) $y = x^3,\ y = 3x$;
26) $y = 4x^2,\ y = x^4$;
27) $y = 2x - x^2 + 3,\ y = x^2 - 4x + 3$;
28) $y = 2x^2 - 6x,\ y = 3 - x^2$;
29) $y = (x+3)^2,\ y = 3x + 9$;
30) $x = (y-2)^3,\ x = 4y - 8$.

Пример 1.6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-1)^2$, $y^2 = x - 1$.

Решение

Изобразим в системе координат графики заданных функций (рис. 1):

$y=\left(x-1\right)^2$ – графиком является парабола, ветви которой направлены вдоль оси Oy вверх, вершина в точке $\left(1,0\right)$;

$y^2=x-1$ – графиком является парабола, ветви которой направлены вдоль оси Ox вправо, вершина в точке $\left(1,0\right)$.

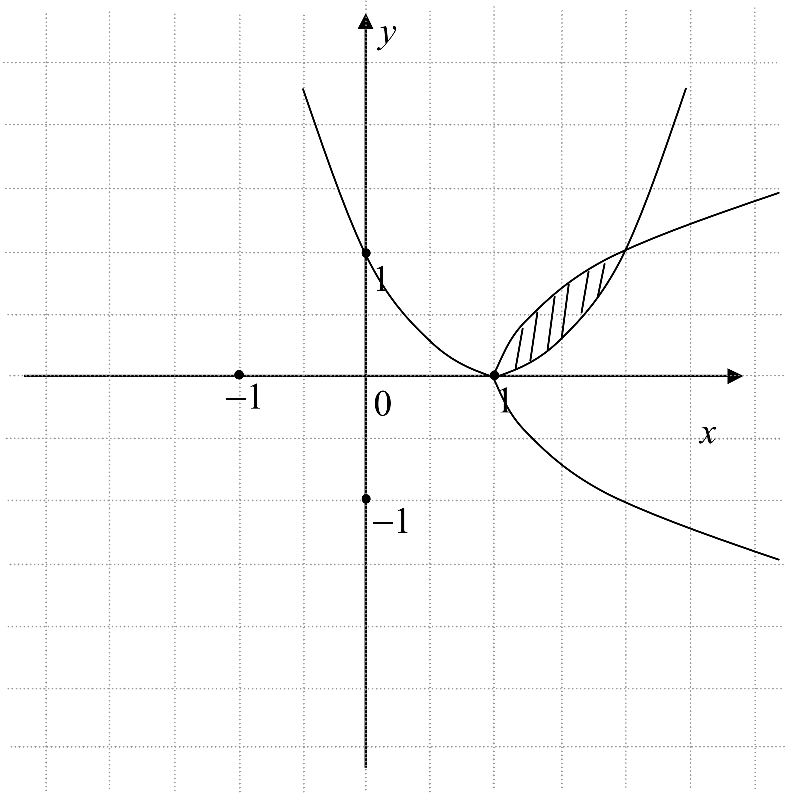

Рис. 1

Найдем точки пересечения графиков функций, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y=\left(x-1\right)^2, \\ y^2=x-1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases} \end{array} \right.$$

В соответствии с формулой (1.5) получим

$$S=\int_1^2\left(\sqrt{x-1}-\left(x-1\right)^2\right)dx=\left(\frac{\left(x-1\right)^{3/2}}{3/2}-\frac{\left(x-1\right)^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $S=\dfrac{1}{3}$.

Раздел II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В данный раздел включены основные типы уравнений, которые рассматриваются в теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»: дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные уравнения, уравнения Бернулли и в полных дифференциалах, задача Коши для дифференциальных уравнений. Задачи экономической теории, при решении которых требуется найти решения дифференциальных уравнений первого порядка также представлены в разделе.

Прежде чем приступить к решению задач рекомендуется повторить теоретический материал, рассмотренный на лекциях не только по данной теме, но также и по темам предыдущего семестра, а именно «Дифференциальное и интегральное исчисления». Материал по применению дифференциальных уравнений к задачам экономики можно найти в учебной литературе следующих авторов: Н. Ш. Кремер, А.Н. Колесников, В.И. Малыхин, М.С. Красс и Б.П. Чупрынов. В сборниках задач и практикумах А.П. Рябушко, В.И. Ермакова, П.Е. Данко и Н. Ш. Кремера рассмотрена кратко теория и приведены решения некоторых уравнений, что поможет в самостоятельной работе студентов при подготовке к практическим и лекционным занятиям.

Задача 2.1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $x+y+xy'=0, \quad y=\dfrac{C^2-x^2}{2x}$;

2) $\left(3x-1\right)y'+y^2=0, \quad y=\ln^{-1}\left(\sqrt[3]{3x-1}\right)$;

3) $\left(x-2y\right)y'=2x-y, \quad x^2-xy+y^2=C^2$;

4) $e^{x+y}+yy'=0, \quad e^x-e^{-y}\left(y+1\right)=C$;

5) $y'+\dfrac{2y}{x}=x^2, \quad y=\dfrac{x^4}{6}+\dfrac{C}{x^2}$;

6) $2x+3y-1=\left(5-4x-6y\right)y', \quad x+2y+3\ln\left|2x-3y-7\right|=C$;

7) $\left(xy-x^2\right)y'-y^2=0, \quad y=Ce^{\frac{y}{x}}$;

8) $y'-e^{2x}=2y, \quad y=Ce^{2x}+xe^{2x}$;

9) $3x^2y+2\sqrt{4-x^3}\,y'=0, \quad y=Ce^{\sqrt{4-x^3}}$;

10) $xy^2y'=x^3+y^3, \quad y^3-3x^3\ln\left|x\right|=0$;

11) $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y'-y=0, \quad 2\sqrt{y}+\ln\left|y\right|-2\sqrt{x}=0$;

12) $(x-y+1)y'=1, \quad y=x+Ce^{y}$;

13) $(x-2xy)y'+2y=0, \quad x^2y-e^{2y}=0$;

14) $xy'=y\ln\dfrac{x}{y}, \quad y=xe^{Cx+1}$;

15) $(y^2+x)y'=1, \quad x=Ce^{y}-2y^2-4y-4$;

16) $e^{1-2x}(y^2-1)y'=1, \quad \dfrac{2y^3}{3}-2y=e^{2x-1}$;

17) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}, \quad y=\dfrac{Cx^2}{2}-\dfrac{1}{2C}$;

18) $y'(y^3+2xy)=1, \quad 2x=e^{y^2}-(1+y^2)$;

19) $x^2(2yy'-1)=1, \quad xy^2=x^2-1$;

20) $y'=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}, \quad 3x+y+2\ln|x+y-1|=C$;

21) $xy'+y=x^2e^{\frac{x}{2}}, \quad y=\left(x-4+\dfrac{8}{x}\right)e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{x}$;

22) $y'=\dfrac{4}{x}y+x\sqrt{y}, \quad y=\dfrac{1}{2}x^4\ln^2|x|$;

23) $y+2=(2x+y-4)y', \quad (y+2)^2=C(x+y-1)$;

24) $xy'+y=-x^2y^2, \quad y(x^2+3x)=1$;

25) $y'=(x+y)^2, \quad y=\operatorname{tg}(x+C)-x$;

26) $xy'+2y+x^5y^3e^{x}=0, \quad y^{-2}=2x^2e^{x}$;

27) $y'=\dfrac{y+2}{x+1}+\operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}, \quad y=(x+1)\arcsin(x+1)+2x$;

28) $y'e^{-x}=x-1, \quad y=e^{x}(x-2)+C$;

29) $2xyy'-y^2+x=0, \quad y^2=x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$;

30) $2x^2y'=x^2+y^2, \quad (x-y)(\ln|x|+7)=2x$.

Пример 2.1

Проверить, что функция $y^3=Cx^3-3xy$ является решением дифференциального уравнения $(xy^2+x^2)y'=y^3+2xy$.

Решение

Дифференцируем заданную функцию по переменной x, учитывая, что $y = y(x)$

$$\left(y^3\right)' = \left(Cx^3 - 3xy\right)',$$

$$3y^2y' = 3Cx^2 - 3y - 3xy',$$

откуда

$$Cx^2 = y^2y' + y + xy'.$$

Подставляем выражение для Cx^2 из последнего равенства в функцию $y^3 = Cx^3 - 3xy$

$$y^3 = x\left(y^2y' + y + xy'\right) - 3xy.$$

Полученное уравнение равносильно исходному. Действительно,

$$y^3 = xy^2y' + xy + x^2y' - 3xy,$$

$$y^3 = \left(xy^2 + x^2\right)y' - 2xy,$$

$$\left(xy^2 + x^2\right)y' = y^3 + 2xy.$$

Ответ: функция $y^3 = Cx^3 - 3xy$ является решением дифференциального уравнения $\left(xy^2 + x^2\right)y' = y^3 + 2xy$.

Задача 2.2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $y' = \sin(x+y) - \sin(x-y)$;
2) $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + \dfrac{1+e^x}{\cos^2 y} dy = 0$;
3) $\left(1+x^2\right)y^3 = \left(y^2-1\right)x^3y'$;
4) $y'x = y\ln y$;
5) $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$;
6) $e^{x+y}dx + ydy = 0$;
7) $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$;
8) $\ln\left(\cos y\right)dx = x\cos y\, dy$;
9) $2(1+e^x)yy' = e^x$;
10) $y^2 + y + \left(x^2-4\right)y' = 0$;
11) $1 + (1+y')e^y = 0$;
12) $xy' = 9y^2 - 4$;
13) $y'\operatorname{tg} x - y = 1$;
14) $\dfrac{dx}{xy-x} + \dfrac{dy}{xy+2y} = 0$;
15) $\left(1+y^2\right)x^2dx = \left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} y\,dy$;
16) $e^y\left(1+x^2\right)dy = 2x\left(1+e^y\right)dx$;
17) $ye^{2x}dx = \left(1+e^{2x}\right)dy$;
18) $y^2y' = 1-2x$;
19) $yy'(1+x^2) = 1+y^2$;
20) $y'\left(\sin x + \cos x\right) = y\ln y$;
21) $(1+e^x)yy' = e^{2x}$;
22) $y' = 2\sqrt{xy}\ln x$;

23) $xy' \ln x = y + 1$;

24) $(y + x^2 y)dx + (x - xy)dy = 0$;

25) $e^{-y}(1 + y') = 1$;

26) $\left(y+1\right)y' = \arccos x$;

27) $y' = \cos(x + y) - \cos(x - y)$;

28) $\left(1+y\right)dx = \left(x - x^2\right)\left(y^2+1\right)dy$;

29) $xy' + 2y = 2xyy'$;

30) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $2xyy' = x^2 + y^2$;

2) $\left(x+y\right)dx + xdy = 0$;

3) $y' = \dfrac{x+y}{x-2y}$;

4) $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 4$;

5) $xy' + x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = y$;

6) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

7) $y' = \dfrac{x+8y}{8x+y}$;

8) $y - xy' = x + yy'$;

9) $y' = \dfrac{x+y}{x-2y}$;

10) $y' - \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x} = 0$;

11) $xyy' = x^2 - y^2$;

12) $y' + \dfrac{y}{x} = -2$;

13) $xy' - 3y\ln\dfrac{y}{x} = 2y$;

14) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;

15) $y' = \dfrac{2x^2 + y^2}{xy}$;

16) $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$;

17) $ydy + \left(x - 2y\right)dx = 0$;

18) $y' = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$;

19) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$;

20) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

21) $y' = \dfrac{x+2y}{2x+y}$;

22) $xy' + y\ln\dfrac{y}{x} = 0$;

23) $x^2 + y^2 = xyy'$;

24) $xyy' = 2x^2 + y^2$;

25) $y' - \dfrac{y}{x} = -1$;

26) $xy' = y + 2x\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$;

27) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

28) $y' = \dfrac{x+3y}{3x+y}$;

29) $y' + \dfrac{y}{x} = 2$;

30) $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$.

в) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $xy^2 - x + (y + x^2 y)y' = 0$;

2) $\left(3x^2 y - 4xy^2\right)dx + \left(x^3 - 4x^2 y + 12y^3\right)dy = 0$;

3) $\left(x + \dfrac{1}{y}\right)dx\left(y - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$;

4) $2xydy = \left(x^2 - y^2\right)dx$;

5) $\ln ydx + \dfrac{x}{y}dy = 0$;

6) $(\dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}) + (\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2})y' = 0$;

7) $e^{-y}dx + \left(2y - xe^{-y}\right)dy = 0$;

8) $\left(x^2 + y^2\right)\left(xdx + ydy\right) = xdy + ydx$;

9) $x + ye^x + \left(y + e^x\right)y' = 0$;

10) $2x\cos^2 ydx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$;

11) $\left(3x^2 + 2y\right)dx + \left(2x - 3\right)dy = 0$;

12) $\left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0$;

13) $ydx - \left(2\sqrt{y} - x\right)dy = 0$;

14) $-2xdx - 3xy^2dx = 3x^2 y\,dy$;

15) $\left(x^2 + y - 4\right)dx + \left(x + y + e^y\right)dy = 0$;

16) $y' = \dfrac{y - 3x^2}{4y - x}$;

17) $\left(y + \sin x\right)dx - \left(\ln y - x\right)dy = 0$;

18) $\left(y + \sin y\right)dx + \left(x + x\cos y\right)dy = 0$;

19) $xdx - 2xy^2dx = 2ydy + 2x^2 y\,dy$;

20) $\cos^2 ydx + \left(2y - x\sin 2y\right)dy = 0$;

21) $(x^2 - 2y) - (2x + y^3 - e^y)y' = 0$;

22) $\dfrac{1}{y}dx - \dfrac{x}{y^2}dy = 0$;

23) $\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0$;

24) $\left(y^4 - x\right) y' = y - 2x^3$;

25) $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) y\, dy = 0$;

26) $\left(2xy + xe^y\right) dy = \left(x^2 - y^2 - e^y\right) dx$;

27) $e^y dx + \left(xe^y - 2y\right) dy = 0$;

28) $\dfrac{x\,dy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) dx$;

29) $\left(\ln x + \ln y\right) dx + \left(y + \dfrac{x}{y}\right) dy = 0$;

30) $3x^2 y dx + \left(x^3 + 12y^3\right) dy = 0$.

Пример 2.2

Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка.

а) $x^2\left(2yy' - 1\right) = 1$.

Решение

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим обе его части на x^2 ($x \neq 0$, т.к. при подстановке $x = 0$ в уравнение получаем неверное равенство $0 = 1$) и перенесем единицу в правую часть уравнения

$$2yy' - 1 = \frac{1}{x^2},$$

$$2yy' = \frac{1}{x^2} + 1.$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получаем

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + 1.$$

Умножим обе части уравнения на dx

$$2ydy = \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx.$$

Таким образом, имеем уравнение с разделенными переменными. Вычисляем интегралы каждой части

$$\int 2ydy = \int \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx,$$

откуда

$$\frac{2y^2}{2}=\frac{x^{-1}}{-1}+x+C,\ y^2=-\frac{1}{x}+x+C.$$

Ответ: $y^2=-\dfrac{1}{x}+x+C$.

б) $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$**.**

Решение

Перепишем уравнение в следующем виде ($x\neq 0$)

$$x\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}+y,\ y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}.$$

Правая часть $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$ уравнения является однородной функцией по переменным x и y, т.к.

$$f(\alpha x,\alpha y)=\frac{\sqrt{(\alpha x)^2+(\alpha y)^2}+\alpha y}{\alpha x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}=f(x,y).$$

Вследствие этого, само уравнение – однородное. Для решения однородных дифференциальных уравнений применяется замена

$$t=\frac{y}{x},\ y=tx,\ y'=t'x+t,$$

где $t=t(x)$. Исходя из этого, получаем

$$t'x+t=\frac{\sqrt{x^2+(tx)^2}+tx}{x},$$

упростим полученное выражение

$$t'x+t=\sqrt{1+t^2}+t,$$
$$t'x=\sqrt{1+t^2}.$$

Таким образом, замена позволяет перейти от однородного уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

$$\frac{dt}{dx}x=\sqrt{1+t^2}$$
$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{dx}{x}.$$

Выполняя почленное интегрирование последнего равенства, получаем

$$\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|=\ln|x|+\ln|C|$$
$$t+\sqrt{1+t^2}=Cx,$$

возвращаемся к исходной переменной

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx,$$

откуда после преобразований имеем

$$y=\frac{Cx^2}{2}-\frac{1}{2C}.$$

Ответ: $y=\dfrac{Cx^2}{2}-\dfrac{1}{2C}$.

в) $yx^{y-1}dx+x^y\ln x\,dy=0$.

Решение

Заданное уравнение относится к уравнениям в полных дифференциалах. Здесь $P(x,y)=yx^{y-1}$, $Q(x,y)=x^{y-1}\ln x$ и выполняется условие $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Действительно,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=yx^{y-1}\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}.$$

Значит, существует функция $U(x,y)=C$ такая, что

$$dU(x,y)=yx^{y-1}dy+x^y\ln x\,dx.$$

Вычислим интегралы от функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ по переменным x и y соответственно

$$\int P(x,y)dx=\int yx^{y-1}dx=y\int x^{y-1}dx=y\cdot\frac{x^y}{y}+f(y)=x^y+f(y),$$

где функция $f(y)$ постоянна по отношению к x.

$$\int Q(x,y)\,dy=\int x^y\ln x dy=\ln x\cdot\int x^y dy=\ln x\cdot\frac{x^y}{\ln x}+f(x)=x^y+f(x),$$

где функция $f(x)$ постоянна по отношению к y.

Таким образом, решение исходного уравнения запишется в виде

$$x^y=C.$$

Ответ: $x^y=C$.

Задача 2.3. Найти решение задачи Коши заданного дифференциального уравнения.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $xy' + x^2 + xy - y = 0, \quad y(1) = 1 - e$;

2) $2xy^2 - y + xy' = 0, \quad y(1) = 0$;

3) $y - y' = y^2 + xy', \quad y(0) = 0$;

4) $x^2 y' - 2xy = 3, \quad y(1) = -1$;

5) $\left(x^2 + 1\right) y' + 4xy = 3, \quad y(0) = 0$;

6) $xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 0$;

7) $y' + y = xy^3, \quad y(0) = \sqrt{2}$;

8) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos x, \quad y(0) = 0$;

9) $xydy = \left(y^2 + x\right) dx, \quad y(1) = 4$;

10) $y'x + y = -xy^2, \quad y(1) = 0{,}5$;

11) $xy' - 4y = 2x^2 \sqrt{y}, \quad y(1) = 4$;

12) $(1 - x)\left(y' + y\right) = e^{-x}, \quad y(0) = 0$;

13) $y' + y \operatorname{ctg} x = \cos x, \quad y(1) = 0$;

14) $y' = 2x\left(x^2 + y\right), \quad y(0) = 0$;

15) $x\left(y' - y\right) = e^x, \quad y(1) = 0$;

16) $y' - y = e^x, \quad y(0) = 1$;

17) $yx' + x = 4y^3 + 3y^2, \quad y(2) = 1$;

18) $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, \quad y(1) = \dfrac{1}{2e}$;

19) $\cos y \, dx = \left(x + 2\cos y\right) \sin y \, dy, \quad y(0) = \dfrac{\pi}{4}$;

20) $x^2 y' + xy + 1 = 0, \quad y(1) = 0$;

21) $y' + 2y = y^2 e^x, \quad y(0) = 0{,}5$;

22) $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy, \quad y(0) = 1$;

23) $y' - y = (1 + x)y^2, \quad y(0) = -1$;

24) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}, \quad y(0) = 1$;

25) $(1-2xy)y' = y(y-1), \quad y(0)=1;$

26) $y' + 2xy = 2x, \quad y(0)=e;$

27) $y = x(y' - x\cos x), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

28) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{x}{\cos x}, \quad y(0)=2;$

29) $y' + y\cos x = \cos x, \quad y(0)=1;$

30) $y' + x^2 y = x^3, \quad y(1)=-1.$

Пример 2.3

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1)=1$.

Решение

Запишем исходное уравнение следующим образом ($x \neq 0$)

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \frac{\ln x}{x}.$$

Это уравнение Бернулли. Будем искать его решение в виде

$$y = u(x)\cdot v(x),$$

тогда

$$y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Перейдем в уравнении к новым переменным

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x}.$$

Решение последнего уравнения найдем из системы

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = u^2 v^2 \dfrac{\ln x}{x}. \end{cases},$$

Первое уравнение системы – уравнение с разделяющимися переменными

$$v' = -\frac{v}{x},\ \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},\ v = \frac{1}{x}.$$

Подставим значение v во второе уравнение системы и решим его

$$u'\frac{1}{x}=u^2\left(\frac{1}{x}\right)^2\frac{\ln x}{x},$$

$$\frac{du}{u^2}=\frac{\ln x}{x^3}\cdot x\,dx,$$

$$\frac{du}{u^2}=\frac{\ln x}{x^2}dx,$$

вычислив интегралы от обеих частей равенства, получим

$$-\frac{1}{u}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-C,$$

$$u=\frac{x}{\ln x+1+Cx}.$$

Таким образом, общим интегралом уравнения является функция

$$y=\frac{x}{\ln x+1+Cx}\cdot\frac{1}{x},$$

$$y=\frac{1}{\ln x+1+Cx}.$$

Значение константы C найдем, используя условие $y(1)=1$,

$$1=\frac{1}{\ln 1+1+C\cdot 1},\ C=0,$$

тогда решение задачи Коши

$$y=\frac{1}{\ln x+1}.$$

Ответ: $y=\dfrac{1}{\ln x+1}$.

Задача 2.4. Найти функцию спроса $q_D=q(p)$, если известна эластичность E_D и объем продаж $q=q_0$ при цене $p=p_0$ ден.ед.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 1 по 15:

1) $E_D=\dfrac{q-100}{q}$, $\quad 0<q<100,\ q_0=10,\ p_0=30;$

2) $E_D=-\dfrac{1}{2}$, $\quad q_0=3,\ p_0=9;$

3) $E_D=\dfrac{p}{p-20}$, $\quad 0<p<20,\ q_0=1,\ p_0=18;$

4) $E_D=-2$, $\quad q_0=5,\ p_0=2;$

5) $E_D = \dfrac{q-300}{q}, \quad 0 < q < 300,\ q_0 = 20,\ p_0 = 35;$

6) $E_D = -\dfrac{1}{3}, \quad q_0 = 10,\ p_0 = 8;$

7) $E_D = \dfrac{p}{p-40}, \quad 0 < p < 40,\ q_0 = 60,\ p_0 = 10;$

8) $E_D = -\dfrac{2}{3}, \quad q_0 = 4,\ p_0 = 8;$

9) $E_D = \dfrac{2q-100}{q}, \quad 0 < q < 50,\ q_0 = 1,\ p_0 = 7;$

10) $E_D = -3, \quad q_0 = 7,\ p_0 = 1;$

11) $E_D = \dfrac{p}{p-100}, \quad 0 < p < 100,\ q_0 = 50,\ p_0 = 10;$

12) $E_D = \dfrac{q-50}{q}, \quad 0 < q < 50,\ q_0 = 29,\ p_0 = 3;$

13) $E_D = \dfrac{p}{2p-30}, \quad 0 < p < 15,\ q_0 = 12,\ p_0 = 3;$

14) $E_D = \dfrac{q-20}{2q}, \quad 0 < q < 20,\ q_0 = 6,\ p_0 = 14;$

15) $E_D = -\dfrac{3}{2}, \quad q_0 = 8,\ p_0 = 4.$

Найти функцию предложения $q_S = q(p)$, если известна эластичность E_S и объем продаж $q = q_0$ при цене $p = p_0$ ден.ед.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 16 по 30:

16) $E_S = \dfrac{1}{4}, \quad q_0 = 8,\ p_0 = 16;$

17) $E_S = \dfrac{p}{p+20}, \quad q_0 = 2,\ p_0 = 6;$

18) $E_S = \dfrac{q+10}{q}, \quad q_0 = 11,\ p_0 = 3;$

19) $E_S = \dfrac{p}{p-50}, \quad p > 50,\ q_0 = 3,\ p_0 = 80;$

20) $E_S = 1, \quad q_0 = 10,\ p_0 = 5;$

21) $E_S = \dfrac{q-20}{q}, \quad q > 20,\ q_0 = 24,\ p_0 = 20;$

22) $E_S = \dfrac{2p}{p+10}, \quad q_0 = 15,\ p_0 = 5;$

23) $E_S = \dfrac{2q+10}{q}, \quad q_0 = 5,\ p_0 = 10;$

24) $E_S = \dfrac{3}{2}, \quad q_0 = 4,\ p_0 = 9;$

25) $E_S = \dfrac{2q-10}{q}, \quad q > 5,\ q_0 = 12,\ p_0 = 7;$

26) $E_S = \dfrac{4}{3}, \quad q_0 = 2,\ p_0 = 8;$

27) $E_S = \dfrac{p}{3p+90}, \quad q_0 = 7,\ p_0 = 34;$

28) $E_S = \dfrac{2p}{p-50}, \quad p > 50,\ q_0 = 10,\ p_0 = 60;$

29) $E_S = 2, \quad q_0 = 64,\ p_0 = 4;$

30) $E_S = \dfrac{q+15}{2q}, \quad q_0 = 1,\ p_0 = 16.$

Пример 2.4

Найти функцию спроса $q_D = q(p)$, если известна эластичность $E_D = -\dfrac{1}{4}$ и объем продаж $q = 12$ при цене $p = 16$ ден.ед.

Решение

Эластичность спроса вычисляется по формуле

$$E_D = \frac{p}{q_D} \cdot \frac{dq_D}{dp}, \tag{2.1}$$

где q_D – количество покупаемого товара, p ден.ед. – цена единицы товара.

Подставим данное значение эластичности спроса в формулу (2.1)

$$-\frac{1}{4} = \frac{p}{q_D} \cdot \frac{dq_D}{dp}.$$

Таким образом, необходимо решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение

$$\frac{dq_D}{q_D} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{dp}{p},$$

$$\ln|q_D| = -\frac{1}{4}\ln|p| + \ln|C|,$$

откуда

$$q_D = Cp^{-\frac{1}{4}}.$$

Определим значение константы C, используя начальное условие $q_D(16) = 12$,

$$12 = C \cdot 16^{-\frac{1}{4}},$$
$$C = 24.$$

Подставив значение $C = 24$ в общее решение уравнения, имеем функцию спроса

$$q_D = 24p^{-\frac{1}{4}}.$$

Ответ: $q_D = 24p^{-\frac{1}{4}}$ – функция спроса.

Задача 2.5. Заданы функции спроса $q_D = q(p, p'_t)$ и предложения $q_S = q(p, p'_t)$ на некоторый товар, где q_D и q_S – количество товара, соответственного покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени; p ден.ед. – цена единицы товара ($p > 10$). Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент времени цена составляла $p = p_0$ ден.ед. и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $q_D = 10 - 2p + \dfrac{dp}{dt}, q_S = 5 - p + 2\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 12;$

2) $q_D = 16 - 3p + \dfrac{dp}{dt}, q_S = 10 - p + 3\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 17;$

3) $q_D = 54 + p - 6\dfrac{dp}{dt}, q_S = 40 + 3p - 2\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 26;$

4) $q_D = 10 - 4p - 4\dfrac{dp}{dt}, q_S = 8 - 5p - 2\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 12;$

5) $q_D = 59 + p - 5\dfrac{dp}{dt}, q_S = 50 + 4p - 2\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 21;$

6) $q_D = 40 + p - 2\dfrac{dp}{dt}, q_S = 35 + 2p - \dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 16;$

7) $q_D = 20 + 4p + \dfrac{dp}{dt}, q_S = 10 + 3p + 4\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 15;$

8) $q_D = 20 + 4p - 3\dfrac{dp}{dt}, q_S = 12 + 6p - 2\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 14;$

9) $q_D = 27 - 5p + \dfrac{dp}{dt}, q_S = 15 - 2p + 5\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 18;$

10) $q_D = 20 + 2p - 6\dfrac{dp}{dt}, q_S = 18 + 3p - 3\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 17;$

11) $q_D = 45 + 3p - 3\dfrac{dp}{dt}, q_S = 30 - 2p - \dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 22;$

12) $q_D = 30 + 6p + \dfrac{dp}{dt}, q_S = 15 + 3p + 6\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 12;$

13) $q_D = 40 - 3p - 4\dfrac{dp}{dt}, q_S = 24 + p - \dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 14;$

14) $q_D = 25 - 2p - 5\dfrac{dp}{dt}, q_S = 21 - 4p - 3\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 20;$

15) $q_D = 35 + p - 5\dfrac{dp}{dt}, q_S = 15 - 3p - \dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 25;$

16) $q_D = 34 - 4p + 2\dfrac{dp}{dt}, q_S = 20 - 2p + 3\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 11;$

17) $q_D = 40 + 3p - 5\dfrac{dp}{dt}, q_S = 36 + 4p - 4\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 14;$

18) $q_D = 30 - 2p - 6\dfrac{dp}{dt}, q_S = 25 + 3p - \dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 15;$

19) $q_D = 40 - 3p + 2\dfrac{dp}{dt}, q_S = 30 - 2p + 4\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 19;$

20) $q_D = 31 + 2p - 4\dfrac{dp}{dt}, q_S = 19 + 5p - 3\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 15;$

21) $q_D = 45 - 4p + 2\dfrac{dp}{dt}, q_S = 24 - p + 5\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 12;$

22) $q_D = 50 + 5p + 2\dfrac{dp}{dt}, q_S = 40 + 4p + 6\dfrac{dp}{dt}, \quad p_0 = 13;$

23) $q_D = 35 + 2p - 6\frac{dp}{dt}, q_S = 23 + 6p - 4\frac{dp}{dt}, \quad p_0 = 23$;

24) $q_D = 20 + 2p + 5\frac{dp}{dt}, q_S = 8 - 2p + 6\frac{dp}{dt}, \quad p_0 = 14$;

25) $q_D = 55 - 6p + 3\frac{dp}{dt}, q_S = 35 - 2p + 4\frac{dp}{dt}, \quad p_0 = 16$;

26) $q_D = 21 - p + 4\frac{dp}{dt}, q_S = 15 + 2p + 6\frac{dp}{dt}, \quad p_0 = 15$;

27) $q_D = 60 - 5p + 3\frac{dp}{dt}, q_S = 44 - 3p + 5\frac{dp}{dt}, \quad p_0 = 20$;

28) $q_D = 13 - p + 3\frac{dp}{dt}, q_S = 5 + p + 6\frac{dp}{dt}, \quad p_0 = 13$;

29) $q_D = 46 + 3p - 6\frac{dp}{dt}, q_S = 40 + 5p - 5\frac{dp}{dt}, \quad p_0 = 18$;

30) $q_D = 15 - 2p + 4\frac{dp}{dt}, q_S = 6 + p + 5\frac{dp}{dt}, \quad p_0 = 14$.

Пример 2.5

Заданы функции спроса $q_D = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt}$ и предложения $q_S = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}$ на некоторый товар, где q_D и q_S – количество товара, соответственного покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени; p ден.ед. – цена единицы товара ($p > 10$). Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент времени цена составляла 30 ден.ед. и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

Решение

Для того чтобы найти равновесную цену, необходимо приравнять количество товара покупаемого и предлагаемого на продажу

$$50 - 2p - 4\frac{dp}{dt} = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}.$$

Решим полученное дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{dt} = 20 + 4p,$$

$$\frac{dp}{p+5} = 4dt,$$

$$\ln|p+5| = 4t + C,$$

выразим p из последнего равенства

$$p = e^{4t+C} - 5.$$

Найдем значение константы, подставляя начальное условие (в начальный момент времени цена составляла 30 ден.ед.)

$$30 = e^{4\cdot 0+C} - 5,$$

$$e^{C} = 35.$$

Следовательно, получаем следующую зависимость равновесной цены от времени

$$p = 35e^{4t} - 5.$$

Определим устойчивость равновесной цены

$$\lim_{t\to+\infty}\left(35e^{4t} - 5\right) = +\infty.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty} p = +\infty$, то равновесная цена растет и имеет место инфляция.

Ответ: зависимость равновесной цены от времени $p = 35e^{4t} - 5$, равновесная цена неустойчива.

Раздел III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В раздел «Дифференциальные уравнения высших порядков» включены основные типы уравнений, рассматриваемые в данной теме: дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка; линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

Перед решением уравнений этого раздела необходимо повторить правила дифференцирования, таблицу производных и комплексные числа. Кроме этого, рекомендуется изучить теоретический материал, который был прочитан на лекциях по теме и представлен в учебной литературе (учебные пособия и учебники Н.Ш. Кремера, В.А. Малугина, Д.Т. Письменного, В.И. Малыхина, М.С. Красса). Примеры решения дифференциальных уравнений высших порядков, приведенные в практикумах и задачниках В.И. Ермакова, Г.Н. Бермана и Н. Ш. Кремера, могут способствовать систематизации подходов к решению выделенных типов задач.

Задача 3.1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $y'' = x^2 + y^2, \quad y = \frac{1}{x} + 5$;

2) $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y = e^{3x}\left(\cos 2x + 3\sin 2x\right)$;

3) $\left(1 + x^2\right) y'' = 2xy, \quad y = x^3 + 3x - 7$;

4) $y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0, \quad y = 1 - \frac{1}{x+1}$;

5) $\left(xy - x\right) y'' + x\left(y'\right)^2 + yy' - 2y' = 0, \quad y = \ln\left(xy\right)$;

6) $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2, \quad y = 2x + \sin x + 4$;

7) $4y''' - 8y' + 5y = 0, \quad y = e^x\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)$;

8) $y'' + y' = 2x - 1, \quad y = 3 + e^{-x} + x^2 - 3x$;

9) $y''' x \ln x = y'', \quad y = x^2\left(2\ln x - 3\right) + x$;

10) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\left(x^2 + x\right), \quad y = 4\left(e^x - e^{2x}\right) + \frac{1}{2} e^{3x}\left(x^2 - 2x + 2\right)$;

11) $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x, \quad y = -e^{-2x} + 2e^{4x} + 3\cos 2x$;

12) $2xy''y' = y'^2 - 4, \quad y = \sqrt{\left(2x+4\right)^3} - 5$;

13) $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}, \quad y = e^{6x} + xe^{6x} + 7x^2 e^{6x}$;

14) $y'' - 2y' = 2e^{x}, \quad y = e^{2x-1} - 2e^{x} + e + 1$;

15) $2y'^2 = (y-1)y'', \quad y = 1 + \dfrac{1}{(1-2x)}$;

16) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}(34 - 12x), \quad y = e^{x} + e^{2x} + (4 - 2x)e^{-x}$;

17) $x^2 y'' = y'^2, \quad y = x - \ln(x+1) + 2$;

18) $y''' - y' = -2x, \quad y = e^{x} - e^{-x} + x^2$;

19) $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}, \quad y = e^{3x}(\cos x - \sin x) + 3e^{-x}$;

20) $y'' + y' = \sin x, \quad y = -\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x - 2e^{-x} + 1$;

21) $y'' + yy'^3 = 0, \quad y = \sqrt[3]{6x+1}$;

22) $y'' + 4y' = x, \quad y = \dfrac{1}{4}x + \cos 2x + \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{8}\right)\sin 2x$;

23) $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x, \quad y = e^{6x} - 2xe^{6x} + \cos x$;

24) $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0, \quad x = \dfrac{1}{1 - \ln y} - 1$;

25) $x(y'' + 1) + y' = 0, \quad y = \dfrac{1}{4}x^2 + 3\ln x - 2$;

26) $y'' - y = e^{-x}(14 - 16x), \quad y = e^{x} - e^{-x} + e^{-x}(4x^2 - 3x)$;

27) $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}, \quad x = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{y^3}$;

28) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x, \quad y = 0{,}8\sin x - 0{,}6\cos x$;

29) $y'' + 4y' = \cos 2x, \quad y = -\dfrac{1}{20}\cos 2x + \dfrac{1}{10}\sin 2x - e^{-4x}$;

30) $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2, \quad y = e^{\operatorname{tg} x}$.

Пример 3.1

Проверить, является ли решением дифференциального уравнения $x^3 y'' + x^2 y' = 1$ **функция** $y = \dfrac{1}{x} + \ln x + 1$**.**

Решение

Найдем производные до второго порядка указанной функции

$$y' = \left(\frac{1}{x} + \ln x + 1\right)'_x = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x},$$

$$y'' = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right)'_x = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}.$$

Подставим найденные выражения y' и y'' в исходное уравнение

$$x^3 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в левой части полученного равенства

$$2 - x - 1 + x = 1,$$
$$1 = 1 \text{ (верно).}$$

Ответ: функция $y = \frac{1}{x} + \ln x + 1$ является решением дифференциального уравнения $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

Задача 3.2. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $y''' = \sin x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0;$

2) $yy'' - 2y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2;$

3) $xy'' = y' + x^2, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0;$

4) $x^3 y'' + x^2 y' = 1, \quad y(1) = 2, y'(1) = 0;$

5) $y'' = 4\cos 2x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3;$

6) $y'' + 2yy'^3 = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3};$

7) $y'' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0;$

8) $y'' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1;$

9) $2yy'' = y'^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1;$

10) $y'' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3;$

11) $yy'' + y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1;$

12) $y'' x \ln x = 2y', \quad y(1) = 1, y'(1) = 3;$

13) $x^2 y'' + xy' = 1, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1;$

14) $y''' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = 0, y''(1) = 0$;

15) $xy'' = y', \quad y(0) = 5, y'(0) = 0$;

16) $y''' = \frac{6}{x^3}, \quad y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1$;

17) $y'' = y' + x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$;

18) $xy''' = 2, \quad y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = 0, y''(1) = 0$;

19) $xy'' + y' = \ln x, \quad y(1) = -1, y'(1) = 0$;

20) $y''' = \cos^2 x, \quad y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{8}, y''(0) = 0$;

21) $y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$;

22) $y''' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = 0, y''(1) = 0$;

23) $y'' = y'e^y, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$;

24) $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 2$;

25) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, \quad y(-1) = -2, y'(-1) = -1$;

26) $2yy'' - y'^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$;

27) $y''' = e^{2x}, \quad y(0) = \frac{9}{8}, y'(0) = \frac{1}{4}, y''(0) = -\frac{1}{2}$;

28) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1$;

29) $y''(2y+3) - 2y'^2 = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3$;

30) $2y'^2 = (y-1)y'', \quad y(0) = 2, y'(0) = 2$.

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $y'' - 7y' + 10y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$;

2) $y'' + 3y' - 10y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;

3) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

4) $y'' + 8y' + 7y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$;

5) $y'' - 7y' + 12y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;

6) $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$;

7) $y'' + 9y' = 0, y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$;
8) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$;
9) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$;
10) $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$;
11) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -5$;
12) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$;
13) $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$;
14) $y'' - 8y' + 15y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$;
15) $y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;
16) $y'' + 5y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$;
17) $y'' + 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$;
18) $y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$;
19) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$;
20) $y'' - 9y' + 14y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;
21) $y'' + 6y' + 8y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$;
22) $y'' - 10y' + 21y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$;
23) $y'' + 5y' - 24y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -5$;
24) $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$;
25) $y'' + 6y' - 7y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4$;
26) $y'' + 12y' + 36y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$;
27) $y'' + 9y' - 10y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$;
28) $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$;
29) $y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 6$;
30) $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$.

Пример 3.2

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

а) $yy'' - y'^2 = 0, \quad y\left(0\right) = 1, y'\left(0\right) = 2$.

Решение

Представленного типа уравнение (не содержит явно x) решается с помощью замены

$$y'_x = p\left(y\right),\ y''_{xx} = pp'_y.$$

С учетом этого исходное уравнение принимает вид

$$ypp' - p^2 = 0,$$

т.е. становится уравнением относительно функции $p = p(y)$. Очевидно, что $p = 0$ является решением этого уравнения. Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$y' = 0,\ y = C.$$

Пусть $p \neq 0$, тогда уравнение $ypp' - p^2 = 0$ можно записать в виде

$$yp' - p = 0$$

– уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные

$$y\frac{dp}{dy} = p,\ \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

и проинтегрируем последнее равенство

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|,$$

откуда

$$p = C_1 y.$$

Поскольку $y'_x = p(y)$, то приходим к уравнению

$$y' = C_1 y,$$

решением которого является функция

$$y = e^{C_1 x + C_2}.$$

Окончательно общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C \text{ или } y = e^{C_1 x + C_2}.$$

Учитывая начальные условия $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$, находим в каждом случае значения констант.

В первом случае

$$C = 1$$

Во втором случае

$$\begin{cases} 1 = e^{C_1 \cdot 0 + C_2}, \\ 2 = C_1 e^{C_1 \cdot 0 + C_2}, \end{cases}$$

$$C_2 = 0,\ C_1 = 2.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^{2x},\ y = 1.$$

Ответ: $y = e^{2x},\ y = 1$.

б) $y'' + 4y' + 4 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

Решение

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

и найдем его корни

$$(\lambda+2)^2=0,$$
$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-2.$$

Поскольку корни характеристического уравнения действительные и совпавшие, то общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид
$$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}.$$

Найдем производную полученного решения
$$y'=-2C_1e^{-2x}+C_2e^{-2x}-2C_2xe^{-2x}.$$

Подставим начальные условия в два последних равенства
$$1=C_1e^{-2\cdot 0}+C_2\cdot 0\cdot e^{-2\cdot 0},$$
$$-1=-2C_1e^{-2\cdot 0}+C_2e^{-2\cdot 0}-2C_2\cdot 0\cdot e^{-2\cdot 0}$$
и определим значения констант
$$C_1=1,\ C_2=1.$$

Таким образом, решение задачи Коши исходного уравнения
$$y=e^{-2x}+xe^{-2x}$$

Ответ: $y=e^{-2x}+xe^{-2x}$.

Задача 3.3. Найти общее решение дифференциальных уравнений высших порядков.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $-4y'''+y''-2y'+5y=0$;
2) $y'''-2y''-5y'+6y=0$;
3) $-y'''+2y''-3y'+2y=0$;
4) $-y'''-8y''+9y'=0$;
5) $y'''+2y''-y'-2y=0$;
6) $-14y'''-y''+8y'+7y=0$;
7) $6y'''+2y''-7y'-y=0$;
8) $-4y'''+y''-6y'+9y=0$;
9) $y'''+12y''+36y'=0$;
10) $-4y'''+y''-7y'+10y=0$;
11) $y'''+4y''-3y'-2y=0$;
12) $-6y'''+y''+3y'+2y=0$;
13) $3y'''+y''-4y'=0$;
14) $7y'''+8y''+10y'-25y=0$;
15) $2y'''-y''+5y'-6y=0$;
16) $5y'''+2y''+8y'-15y=0$;
17) $-9y'''+y''-8y'+16y=0$;
18) $-2y'''+y''-5y'+6y=0$;
19) $y'''-2y''+y'=0$;
20) $y'''-y''+2y'-2y=0$;
21) $y'''+6y''+9y'=0$;
22) $y'''+4y'=0$;
23) $-2y'''+y''+5y'-4y=0$;
24) $y'''+9y''-10y'=0$;
25) $3y'''+4y''+3y'-10y=0$;
26) $2y'''-y''+6y'-7y=0$;
27) $-4y'''+y''-6y'+9y=0$;
28) $14y'''+5y''+5y'-24y=0$;
29) $y'''-10y''+21y'=0$;
30) $2y'''+6y''-8y=0$.

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $y'' + 2y' - 8y = (3x+1)e^{x}$;
2) $y'' + 3y' - 10y = 5e^{2x}$;
3) $y'' + 4y' + 3y = 4e^{-x}$;
4) $y'' + 7y' = (2x+1)e^{x}$;
5) $y'' - 5y' - 24y = 8e^{3x}$;
6) $y'' + 2y' = (2x+1)e^{2x}$;
7) $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$;
8) $y'' - y' = \left(2x^2+1\right)e^{x}$;
9) $y'' + 2y' - 3y = -2e^{3x}$;
10) $y'' + y' - 6y = 2e^{2x}$;
11) $y'' - 12y' - 3y = (x+2)e^{x}$;
12) $y'' + 5y' + 6y = 3e^{-3x}$;
13) $y'' + 2y' = -2e^{-2x}$;
14) $y'' + 8y' = (x+1)e^{-x}$;
15) $y'' - 4y' = 4e^{4x}$;
16) $y'' + 9y' + 14y = (x+1)e^{x}$;
17) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{-2x}$;
18) $y'' - 2y' - 3y = 2e^{-x}$;
19) $y'' - 7y' = 5e^{3x}$;
20) $y'' - y' - 6y = 2(x-1)e^{2x}$;
21) $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x}$;
22) $y'' + y' - 6y = 2(x-1)e^{2x}$;
23) $y'' - 5y' = 5e^{5x}$;
24) $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$;
25) $y'' + y' - 2y = (x+2)e^{2x}$;
26) $y'' - 6y' + 8y = 3e^{4x}$;
27) $y'' - 2y' = 2e^{2x}$;
28) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{-x}$;
29) $y'' + 8y' = (x-1)e^{2x}$;
30) $y'' + 3y' + 2y = 4e^{x}$.

Пример 3.3

Найти общее решение дифференциальных уравнений высших порядков.

а) $y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0$**.**

Решение

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$$

Подбором определяем $\lambda_1 = 2$ и раскладываем на множители левую часть уравнения

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda^2 + 6\lambda - 4 = \lambda^2\left(\lambda - 2\right) - 2\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) =$$
$$= \lambda^2\left(\lambda - 2\right) - 2\left(\lambda - 2\right)\left(\lambda - 1\right) = \left(\lambda - 2\right)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right).$$

Приравниваем к нулю второй множитель и находим

$$\lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i.$$

В данном случае характеристическое уравнение имеет один действительный корень и два комплексных, поэтому искомое общее решение данного дифференциального уравнения есть

$$y = C_1 e^{2x} + e^{x}\left(C_2 \cos x + C_3 \sin x\right).$$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + e^{x}\left(C_2 \cos x + C_3 \sin x\right)$.

б) $y'' + 4y = 3\sin 2x$.

Решение

Общее решение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами равно сумме соответствующего однородного уравнения и частного решения исходного однородного уравнения:

$$y = y_o + \tilde{y}. \tag{3.1}$$

Найдем решение однородного уравнения

$$y'' + 4y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение и определяем его корни

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

$$\lambda_1 = 2i,\ \ \lambda_2 = -2i.$$

Таким образом, общее решение однородного линейного дифференциального уравнения примет вид

$$y_o = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Частное решение будем искать в виде, соответствующем правой части исходного уравнения

$$\tilde{y} = x^k \left(A\cos 2x + B\sin 2x \right),$$

где k – кратность числа $\alpha + i\beta$ как корня характеристического многочлена решаемого уравнения, α и β – действительные числа, определяемые в соответствии с правой частью исходного уравнения.

$$\alpha + i\beta = 0 + 2i = 2i$$

– корень характеристического многочлена кратности $k = 1$.

Итак, общий вид частного решения

$$\tilde{y} = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x \right)$$

или

$$\tilde{y} = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x.$$

Коэффициенты A и B определим методом неопределенных коэффициентов. Найдем производную второго порядка от $\tilde{y}$

$$\tilde{y}' = A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x =$$

$$= \left(A + 2Bx \right)\cos 2x + \left(B - 2Ax \right)\sin 2x$$

$$\tilde{y}'' = 2B\cos 2x - \left(2A + 4Bx \right)\sin 2x - 2A\sin 2x + \left(2B - 4Ax \right)\cos 2x$$

Подставляем функции $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение

$$\left(4B - 4Ax \right)\cos 2x - \left(4A + 4Bx \right)\sin 2x + 4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = 3\sin 2x.$$

Приводим подобные слагаемые

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 3\sin 2x.$$

Полученное равенство выполняется при всех x, если

$$\begin{cases} 4B = 0, \\ 4A = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Тогда искомое частное решение

$$\tilde{y} = \frac{3}{4} x \cos 2x.$$

Итак, общее решение исходного уравнения по (3.1)

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{3}{4} x \cos 2x.$$

Ответ: $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \dfrac{3}{4} x \cos 2x$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие для вузов / Г.Н. Берман. – СПб.: Издательство «Лань», 2000. – 448 с.
2. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 470 с.
3. Данко, П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова, Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.2: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ООО «Издательство Оникс»: «Издательство Мир и Образование», 2005. – 416 с.
4. Колесников, А.Н. Краткий курс математики для экономистов: учебное пособие / А.Н. Колесников. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 208 с.
5. Красс, М.С., Чупрынов, Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 720 с.
6. Малугин, В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Задачи и упражнения / В.А. Малугин. – М.: Эксмо, 2006. – 288 с.
7. Малугин, В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций / В.А. Малугин. – М.: Эксмо, 2005. – 272 с.
8. Малыхин, В.И. Математика в экономике: учебное пособие / В.И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 351 с.
9. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под общ. ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2007. – 656 с.
10. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 2-е изд. – М.: Айрис–пресс, 2004. – 602 с.
11. Практикум по высшей математике для экономистов: учебное пособие для вузов по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер, И.М. Тришин, Б.А. Путко и др.; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 422 с.
12. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 575 с.
13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие. В 3 ч. Ч.2 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высшая школа., 1990. – 352 с.
14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие. В 3 ч. Ч.3 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высшая школа., 1991. – 288 с.

Приложение 1

Южно-Уральский государственный университет

Факультет Математики, механики и компьютерных наук

Кафедра ____

Расчетно-графическая работа № 3 (Часть ____)

по дисциплине **«Математика»**

Выполнил(а): студент(ка) гр. _____________
группа

____
ФИО

Вариант № ______________________________

Проверил(а):_____________________________
Должность

____
ФИО

Регистрационные данные:

Дата_______ Дата_______ Дата_______

Подпись _____ Подпись _____ Подпись _____

Челябинск
20____

Приложение 2

Результаты проверки расчетно-графической работы студента(ки) гр. ___________
ФИО____

№ п/п	Номер задачи в сборнике	Результат проверки 1	Результат проверки 2	Результат проверки 3
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Итог				
Дата				
Подпись преподавателя				

ОГЛАВЛЕНИЕ