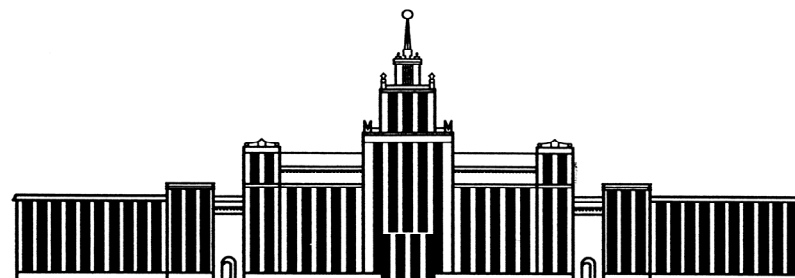

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.И. Назарова, А.В. Келлер

МАТЕМАТИКА

Сборник контрольных заданий
Часть 2

Челябинск
2014

ВВЕДЕНИЕ

Семестровая работа является одним из видов самостоятельной работы студентов, входит в учебный план дисциплины «Математика» как обязательный элемент учебной деятельности.

Сборник контрольных задний включают подборку задач по темам, соответствующим дисциплине «Математика» второго семестра для экономических специальностей бакалавриата, а именно «Введение в математический анализ», «Ряды», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Функции многих переменных».

Для выполнения работы студент должен знать перечень заданий, которые необходимо выполнить, и номер своего варианта.

Набор заданий, которые будут включены в семестровую работу студентов каждого из направлений подготовки, определяет преподаватель.

Номер варианта определяется порядковым номером студента в списке, представленном в журнале группы. Номер каждого задания состоит из двух частей: первое число определяет номер раздела, к которому относится задание, второе число – порядковый номер задания в данном разделе.

Работа выполняется в отдельной тетради (12–18 листов) в клеточку.

Обложка тетради оформляется в печатном виде в соответствии с образцом, представленном в приложении 1. В местах пропусков должны быть внесены соответствующие данные выполнившего работу студента и преподавателя, который будет проверять семестровое задание. Регистрационные данные вносятся секретарем кафедры при поступлении работы.

На последнюю страницу тетради (обложку) клеится лист проверки, представленный в приложении 2. На листе проверки необходимо указать данные студента, а также номера заданий, которые были включены в семестровую работу.

Требования при выполнении работы:

- условие каждой задачи вклеивается в тетрадь в печатном виде (или пишется от руки разборчивым почерком),
- приводится полное решение с необходимыми пояснениями, вычислениями и расчетами,
- после решения записывается ответ (если задание содержит несколько пунктов, то ответ необходимо записывать для каждого пункта решения),
- графические построения выполняются карандашом,
- текст решения всех задач должен быть в письменном виде,
- для отметок и замечаний преподавателя должны быть оставлены поля (3–4 см),
- решение задач должно быть представлено по порядку.

Семестровая работа сдается на кафедру до указанного преподавателем срока и регистрируется секретарем кафедры. Работа принимается на проверку только в том случае, если содержит все задания, которые были включены в семестровую работу, и удовлетворяет требованиям к оформлению.

На проверку семестрового задания преподавателю необходимо не менее 7 дней со дня сдачи работы.

Результаты проверки семестровой работы преподаватель заносит в списки, находящиеся на кафедре, по мере проверки работ.

Если семестровая работа содержит все задания, удовлетворяет предъявляемым требованиям к оформлению и выполнена без серьезных ошибок, то она считается допущенной к экзамену, иначе возвращается на доработку. Для чего семестровую работу следует взять у преподавателя (или у секретаря кафедры) выполнить в течение 2–3 дней работу над ошибками в этой же тетради и сдать для повторной проверки на кафедру.

Рекомендуется выполнение заданий семестровой работы по мере изучения соответствующих тем, поскольку это способствует более глубокому усвоению полученных знаний и своевременному формированию умений. Необходимо отметить, что правильное своевременное выполнение семестровой работы является одним из основных параметров, определяющих успешность освоения предмета.

Раздел I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В данном разделе предложены задачи, которые рассматриваются в теме «Введение в математический анализ»: элементарные преобразования графиков функций, предел последовательности, предел функции, непрерывность функции.

Необходимый теоретический материал представлен в учебных пособиях Н.Ш. Кремера, Д.Т. Письменного, В.И. Малыхина. Отметим, что при работе с учебной литературой следует учитывать различный подход авторов к решению некоторых задач по данной теме. Сборники задач Н.Ш. Кремера и В.И. Ермакова, кроме текстов заданий и примеров решения задач, содержат краткие теоретические сведения, что способствует повышению эффективности самостоятельной работы студентов с учебными пособиями при подготовке к занятиям.

Задача 1.1. Построить график функции с помощью преобразований графиков.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $y = 2 \left \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right + 1;$ | 11) $y = \left \frac{1}{4} \operatorname{tg} x - 4 \right ;$ | 21) $y = 4 \left \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right + 3;$ |
| 2) $y = \log_2 3 x - 5;$ | 12) $y = \operatorname{ctg} 2x + 2;$ | 22) $y = 2 + e^{2 x-3 } ;$ |
| 3) $y = \frac{1}{2} \left \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right - 2;$ | 13) $y = \frac{1}{2} \left \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right - 2;$ | 23) $y = \left \frac{1}{3} \operatorname{tg} x + 3 \right ;$ |
| 4) $y = 2 - e^{ x+1 } ;$ | 14) $y = \frac{1}{2} \log_2 (3 x+1) - 2;$ | 24) $y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - 3;$ |
| 5) $y = \operatorname{tg} 3x - 2 ;$ | 15) $y = \frac{1}{3} \left \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right + 1;$ | 25) $y = 2 \left \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right + 1;$ |
| 6) $y = 3 \operatorname{ctg} x - 2 ;$ | 16) $y = -5 + e^{ x-2 } ;$ | 26) $y = \log_2 (3 x-2) + 3;$ |
| 7) $y = 3 \left \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right - 2;$ | 17) $y = 2 \operatorname{tg} x + 3 ;$ | 27) $y = 2 \left \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right - 4;$ |
| 8) $y = \log_3 (2 x-1) + 5;$ | 18) $y = 3 \operatorname{ctg} x + 2 ;$ | 28) $y = -3 - e^{ x-5 } ;$ |
| 9) $y = 2 \left \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right + 2;$ | 19) $y = 4 \left \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right + 3;$ | 29) $y = 2 \operatorname{tg} x + 2 ;$ |
| 10) $y = \left 3 - \frac{1}{2} e^{ x+2 } \right ;$ | 20) $y = 3 \log_4 (x + 2) + 1;$ | 30) $y = \operatorname{ctg} 2x - 4 .$ |

Пример 1.1

Построить график функции с помощью преобразований графиков

$$y = \left| \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}|x+2|} \right|.$$

Решение

Запишем последовательность преобразований графиков функций и их описание

I. $y = e^x$ – график показательной функции;

II. $y = e^{|x|}$ – часть графика функции $y = e^x$ при $x < 0$ убирается, часть графика при $x \geq 0$ остается неизменной и симметрично ее отображается относительно оси Oy ;

III. $y = e^{\frac{1}{2}|x|}$ – растяжение графика функции $y = e^{|x|}$ вдоль оси Ox в два раза;

IV. $y = e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ – сдвиг графика функции $y = e^{\frac{1}{2}|x|}$ вдоль оси Ox на две единицы влево;

V. $y = -e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ – симметричное отображение всех частей графика функции $y = e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ относительно оси Ox ;

VI. $y = \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ – сдвиг графика функции $y = -e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ вдоль оси Oy на три единицы вверх;

VII. $y = \left| \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}|x+2|} \right|$ – симметричное отображение графика функции

$y = \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ при $y < 0$ относительно оси Ox , при $y > 0$ график остается неизменным.

Все графики изображены на рис. 1, причем номер преобразования соответствует номеру графика.

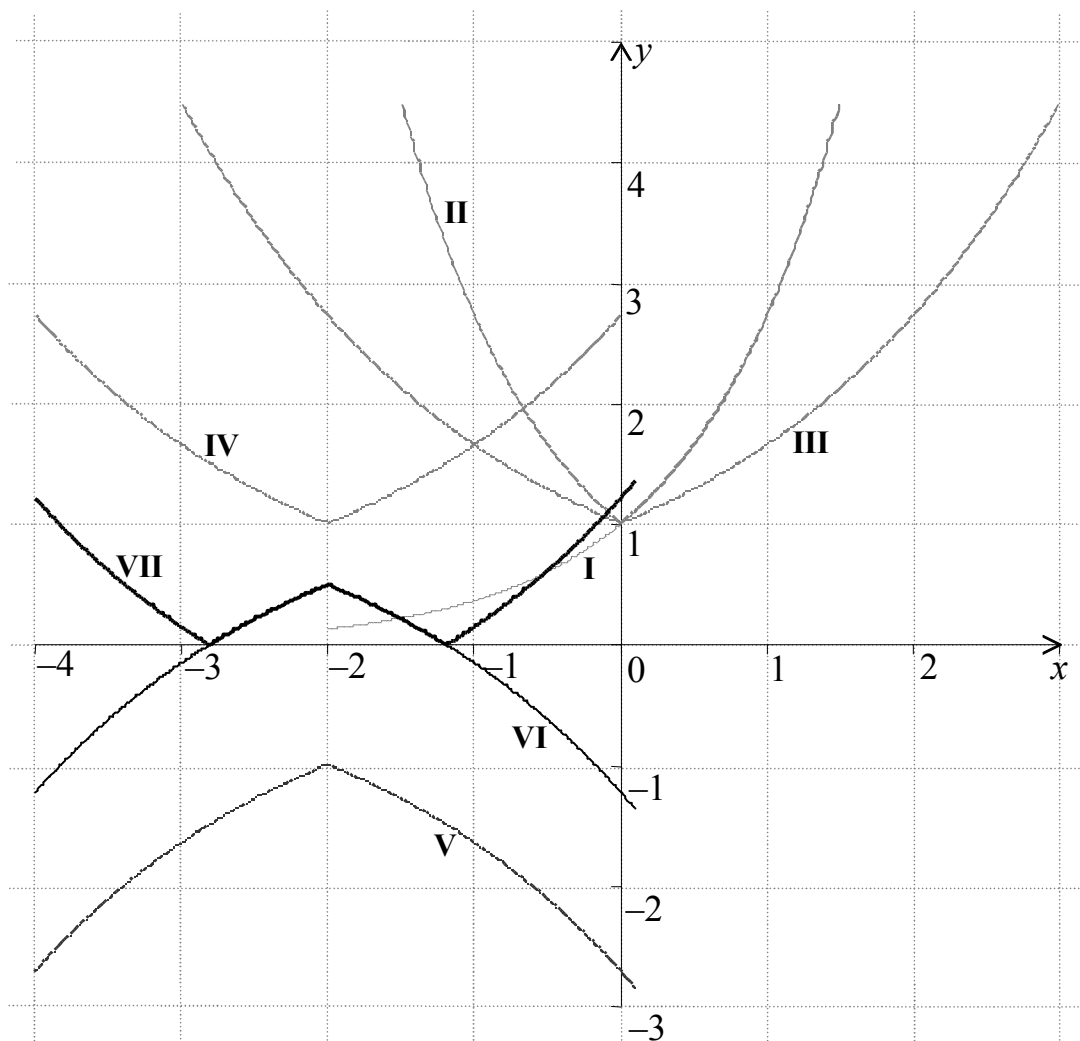


Рис. 1

Задача 1.2. Вычислить предел.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!};$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right);$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n};$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}};$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n};$
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n};$
- 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{1+2+3+\dots+n} - \frac{2}{3} \right);$
- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} \right);$
- 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5+4-7+\dots+2n-(2n+3)}{n+3};$
- 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!};$
- 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n-n^2+3};$

- 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right);$ 22) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2+7+12+\dots+(5n-3)};$
- 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}};$ 23) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \dots + \frac{1+2^n}{4^n} \right);$
- 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!};$ 24) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)};$
- 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)};$ 25) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+5+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right);$
- 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}};$ 26) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}};$
- 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}};$ 27) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}};$
- 19) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+\dots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}};$ 28) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!};$
- 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt{9n^4+1}};$ 29) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4};$
- 21) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)};$ 30) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{2^n+5^n}{10^n} \right).$

Пример 1.2

Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+2)!+(n+3)!}.$

Решение

При непосредственном вычислении данного предела получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty - \infty}{\infty} \right]$. Для раскрытия этой неопределенности преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, вынеся общий множитель за скобки, и сократим дробь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+2)!+(n+1)!} = \left[\frac{\infty - \infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) - (n+1)!}{1 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + (n+1)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+2) - (n+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2) + (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+2-1)}{(n+1)! \cdot (n+2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Для раскрытия получившейся неопределенности разделим числитель и знаменатель дроби на n , тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \left[\frac{1+0}{1+0} \right] = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 1.3. Вычислить пределы функций.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x + x^5};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$
- 21) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$
- 23) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x};$
- 24) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1};$

$$25) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}.$$

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^3 - 4x^2 + 2}{x^3 + 3x^2 + 2};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 9}{3x^3 + 2};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x - 5};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1}{4x^3 + 2x - 11};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3 - x^2 - 2}{-2x^3 + 2x};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{3x^3 - x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3 + 3x - 5};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 3x^2 - 2}{x^3 + 2x};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + 2x + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + x + 1}{4x^4 + x^3 + x + 1};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 1};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 7}{3x^3 - 21};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 1}{2x^3 + 2x + 1};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 7}{2x^4 + 3x - 1};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 7}{3x^3 - 21};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 - x^2 - 3}{x^3 - x - 1};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x + 2}{5x^3 + x^2 - 3};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 - 2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3 - x^2 + x + 1}{3x^3 + x - 6};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 6}{2x^3 + x^2 - 1};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 9}{2x^3 + 3x^2 + 2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + x + 2}{3x^4 + x^3 + 5x - 3};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 1}{7x^3 + 9x - 1};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 21};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 4x^2}{x^3 + 3x - 9};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^2 + 11}{7x^3 + 13x - 1};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{4x^3 + x^2 - 21};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3 - 2x^2 + 3x}{x^4 + 3x^3 + 2x - 6};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x + 1}{x^3 + x + 1};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x + 1}{x^4 + x^3 - 7}.$$

в) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x + 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}};$$

- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3+8};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2} - 16};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2} - 2}{x+x^2};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2+x} - \sqrt{2x}};$
- 20) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3+8}};$
- 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}};$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sqrt[3]{x/16} - 1/4}{\sqrt{1/4+x} - \sqrt{2x}};$
- 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x}};$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}};$
- 25) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4};$
- 26) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}};$
- 27) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3+x} - \sqrt{2x}};$
- 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x};$
- 29) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}};$
- 30) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}.$

г) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2};$

- | | | |
|---|---|---|
| 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2};$ | 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x};$ | 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 3x}{4x};$ |
| 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x};$ | 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))};$ | 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2};$ |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x};$ | 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2};$ | 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{7x^2};$ |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}(2\pi(x+1/2))};$ | 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right);$ | 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{2 \sin 2x};$ |
| 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4};$ | 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x};$ | 27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2};$ |
| 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)};$ | 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x};$ | 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{x \sin 3x};$ |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x};$ | 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2};$ | 29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2};$ |
| 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2};$ | 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2};$ | 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}.$ |

д) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x};$ | 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x;$ | 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4};$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x};$ | 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x};$ | 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x};$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x};$ | 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3};$ | 17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{5-x} \right)^{1-2x};$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x};$ | 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x};$ | 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1};$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x};$ | 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x};$ | 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4};$ |
| 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2};$ | 13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4};$ | 20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{2-3x};$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^{2x-3};$ | 24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1};$ | 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{-x+2} \right)^{3x};$ |

$$\begin{array}{lll}
22) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x} ; & 25) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2} ; & 28) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x} ; \\
23) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x} ; & 26) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5} ; & 29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2} ; \\
24) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2} ; & 27) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1} ; & 30) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1} .
\end{array}$$

Пример 1.3

Вычислить пределы функций.

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}.$

Решение

При подстановке вместо переменной значения -1 , получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для раскрытия этой неопределенности разложим числитель и знаменатель

на множители и сократим на общий множитель $(x-1)$, который обращает в нуль и числитель, и знаменатель дроби. Получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x^2(x-1) + (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + 1} = \left[\frac{1+2}{1+1} \right] = \frac{3}{2} = 1,5.
\end{aligned}$$

Ответ: 1,5.

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - x^2 + 2x}{2x^3 + x - 1}.$

Решение

При непосредственном вычислении предела данной функции получим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Для раскрытия этой неопределенности необходимо разделить

числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - x^2 + 2x}{2x^3 + x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} =$$

$$= \left[\frac{9-0+0}{2+0-0} \right] = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

в) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{3x} - 3}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+9}}.$

Решение

Поскольку имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, а числитель и знаменатель

нельзя разложить на множители, то для раскрытия неопределенности умножим и числитель, и знаменатель дроби на выражения, сопряженные данным. Далее, используя формулы сокращенного умножения, преобразуем получившиеся выражения.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{3x} - 3}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+9}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt[3]{3x} - 3)(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(\sqrt{2x} - \sqrt{x+9})(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt[3]{3x^3} - 3^3)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(\sqrt{2x^2} - \sqrt{x+9}^2)(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3(x-9)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(x-9)(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)}. \end{aligned}$$

Сократив выражение под знаком предела на общий множитель $(x-9)$, который обращает числитель и знаменатель дроби в нуль, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3(x-9)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(x-9)(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)} = \\ &= \left[\frac{3 \cdot 2\sqrt{18}}{9+9+9} \right] = \frac{18\sqrt{2}}{27} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{3x^2}.$

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для раскрытия этой неопределенности преобразуем выражение, находящееся под знаком предела, а затем воспользуемся

формулой первого замечательного предела

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{3x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x(1 - \cos^2 2x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin^2 2x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \sin 2x}{3 \cdot x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) = \\ &= \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \right] = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+1}$.

Решение

При непосредственном вычислении предела получаем неопределенность вида $[1^\infty]$, для раскрытия которой используем формулу второго замечательного предела,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e \quad (1.2)$$

Сначала выделим целую часть, затем приведем выражение под знаком предела к виду (1.2) и вычислим предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1-1-3}{2x+1} \right)^{4x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+1} + \frac{-4}{2x+1} \right)^{4x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{4x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{-4}} \right]^{\frac{-4}{2x+1} \cdot \frac{4x+1}{1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x-4}{2x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16-\frac{4}{x}}{2+\frac{1}{x}}} = e^{-8}. \end{aligned}$$

Ответ: e^{-8} .

Задача 1.4. Исследовать функцию на непрерывность, определить характер точек разрыва (если они есть) и построить график заданной функции.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x < 2, \\ x^2, & x \geq 2; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < \pi/2, \\ \cos x, & \pi/2 \leq x \leq \pi, \\ -x/\pi, & x > \pi; \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x+2, & x > 3; \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1+x, & x > 2; \end{cases}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2; \end{cases}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < 1, \\ \log_2 x, & 1 \leq x \leq 2, \\ -x+3, & x > 2; \end{cases}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \leq -\pi/2, \\ x+1, & -\pi/2 < x < 0, \\ x^3 + 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$12) f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ x^2 - 1, & -1 \leq x < 0, \\ e^x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$13) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \leq 1, \\ \sqrt{x-1}, & 1 < x \leq 5, \\ 2, & x > 5; \end{cases}$$

$$14) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2; \end{cases}$$

$$15) f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ \ln x, & 1 < x \leq e, \\ x^2 - 2, & x > e; \end{cases}$$

$$16) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2; \end{cases}$$

$$17) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq 2, \\ \frac{1}{x-1}, & 2 < x \leq 3, \\ -x, & x > 3; \end{cases}$$

$$18) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & x > 1; \end{cases}$$

$$19) f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2+x, & x > 1; \end{cases}$$

$$20) f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ \ln x, & 0 < x < 1, \\ (x-1)^3, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$21) f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x < 1, \\ x^2+2, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$22) f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x \leq 1, \\ -x^3, & x > 1; \end{cases}$$

$$23) f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0, \\ x^2 - x, & 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{x}, & x > 2; \end{cases}$$

$$24) f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x+1, & x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$25) f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 1, \\ 2^x, & 1 \leq x < 2, \\ x^2, & x \geq 2; \end{cases}$$

$$26) f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0, \\ \log_2 x, & 0 < x \leq 1, \\ x-1, & x > 1; \end{cases}$$

$$27) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ \cos 2x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ x - \frac{\pi}{4}, & x \geq \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$28) f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \leq -1, \\ -x, & -1 < x < 1, \\ \sqrt{x+3}, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$29) f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & x \leq 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2, \\ -2x+1, & x > 2; \end{cases}$$

$$30) f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq -1, \\ x^2-1, & -1 < x < e, \\ \ln x, & x \geq e. \end{cases}$$

Пример 1.4

Исследовать функцию на непрерывность, определить характер точек разрыва (если они есть) и построить ее график:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{x^2}{\pi^2} + 1, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и

$\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следова-

тельно, разрыв возможен только в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

По определению, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если она определена в этой точке и значение функции в заданной точке совпадает со значением левостороннего и правостороннего пределов функции при x , стремящимся к x_0 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0). \quad (1.3)$$

Исследуем $f(x)$ на непрерывность по определению в каждой из точек x_1 и x_2 . Исходя из задания функции, следует, что $f(x)$ определена в этих точках.

При $x_1 = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1, \\ f(0) &= 0+1 = 1, \end{aligned}$$

таким образом, равенство (1.3) выполняется

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1,$$

следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_1 = 0$.

При $x_2 = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{x^2}{\pi^2} + 1 \right) = \frac{5}{4}, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{4\pi^2} + 1 = \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

таким образом, равенство (1.3) не выполняется, а именно

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

следовательно, функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x_2 = \frac{\pi}{2}$, а поскольку функцию нельзя переопределить таким образом, чтобы устранить разрыв, и все значе-

ния пределов конечны, то $x_2 = \frac{\pi}{2}$ – неустранимый разрыв первого рода.

График функции $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{x^2}{\pi^2} + 1, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ изображен на рис. 2.

Ответ: функция $f(x)$ непрерывна при

$$x \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right),$$

при $x = \frac{\pi}{2}$ функция $f(x)$ имеет неустранимый разрыв первого рода.

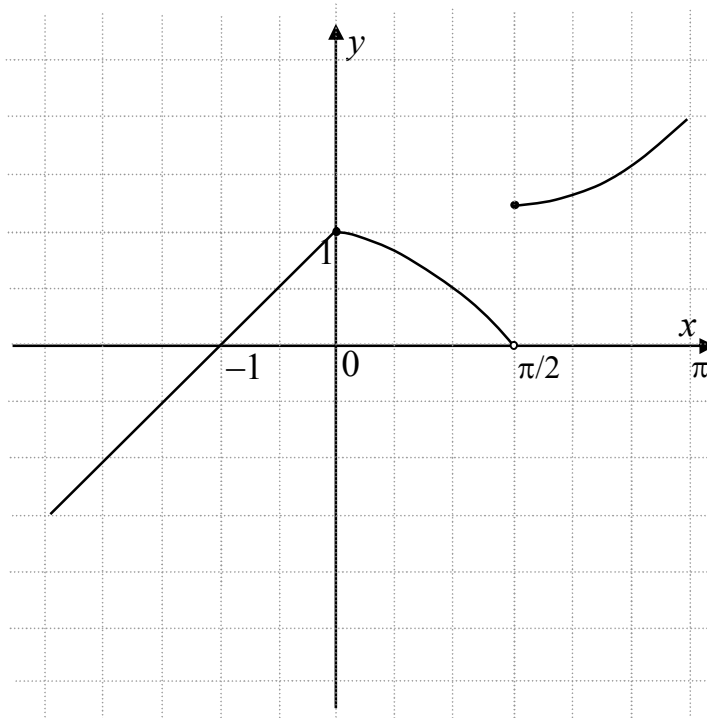


Рис. 2

Раздел II. РЯДЫ

В разделе представлены задачи, которые рассматриваются в теме «Ряды»: нахождение суммы ряда; исследование сходимости знакоположительных и знакопеременных рядов; нахождение области сходимости функциональных рядов, разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена; применение рядов в приближенных вычислениях. Кроме того, раздел содержит задачу с экономическим содержанием, решение которой приводит к понятию ряда и его суммы.

Для решения задач данного раздела необходимо знать и уметь применять признаки сходимости рядов, формулы для вычисления радиуса сходимости функционального ряда, ряды Тейлора и Маклорена. Перед решением задач рекомендуется повторить теоретический материал, рассмотренный на лекциях по данной теме.

Все необходимые при решении задач формулы, материал по применению рядов в экономике и в приближенных вычислениях можно найти в учебной литературе следующих авторов: Н.Ш. Кремер, В.А. Малугин, А.И. Колесников, Д.Т. Письменный, М.С. Красс и Б.П. Чупрынов. Практикумы и задачки В.И. Ермакова, А.П. Рябушко, П.Е. Данко и Н. Ш. Кремера помогут при самостоятельной работе по теме, а также при повторении и обобщении материала для подготовки к экзамену.

Задача 2.1. Записать формулу n -го члена ряда a_n , найти n -ю частичную сумму S_n и сумму S заданного ряда.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\frac{1+2}{6} + \frac{1^2+2^2}{6^2} + \frac{1^3+2^3}{6^3} + \dots;$

2) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots;$

3) $\frac{8}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{12}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{16}{3^2 \cdot 5^2} + \dots;$

4) $\frac{6}{5 \cdot 11} + \frac{6}{11 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \dots;$

5) $\frac{3+5}{15} + \frac{3^2+5^2}{15^2} + \frac{3^3+5^3}{15^3} + \dots;$

6) $\frac{4^2-2^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{4^3-2^3}{2^3 \cdot 4^3} + \frac{4^4-2^4}{2^4 \cdot 4^4} + \dots;$

7) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots;$

8) $\frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \dots;$

9) $\frac{3-1}{6} + \frac{3^2-1^2}{6^2} + \frac{3^3-1^3}{6^3} + \dots;$

10) $\frac{2+5}{10} + \frac{2^2+5^2}{10^2} + \frac{2^3+5^3}{10^3} + \dots;$

11) $\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots;$

12) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots;$

13) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots;$

14) $\frac{2-1}{4} + \frac{2^2-1^2}{4^2} + \frac{2^3-1^3}{4^3} + \dots;$

$$\begin{aligned}
15) & \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots; \\
16) & \frac{1+2}{4} + \frac{1^2+2^2}{4^2} + \frac{1^3+2^3}{4^3} + \dots; \\
17) & \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots; \\
18) & \frac{2+4}{8} + \frac{2^2+4^2}{8^2} + \frac{2^3+4^3}{8^3} + \dots; \\
19) & \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{3^2-2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{3^3-2^3}{2^3 \cdot 4^3} + \dots; \\
20) & \frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 11} + \frac{4}{11 \cdot 15} + \dots; \\
21) & \frac{15}{1^2 \cdot 4^2} + \frac{21}{2^2 \cdot 5^2} + \frac{27}{3^2 \cdot 6^2} + \dots; \\
22) & \frac{2+3}{12} + \frac{2^2+3^2}{12^2} + \frac{2^3+3^3}{12^3} + \dots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23) & \frac{1+3}{9} + \frac{1^2+3^2}{9^2} + \frac{1^3+3^3}{9^3} + \dots; \\
24) & \frac{12}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{16}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{20}{4^2 \cdot 6^2} + \dots; \\
25) & \frac{4-2}{2 \cdot 4} + \frac{4^2-2^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{4^3-2^3}{2^3 \cdot 4^3} + \dots; \\
26) & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots; \\
27) & \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{5}{9 \cdot 14} + \frac{5}{14 \cdot 19} + \dots; \\
28) & \frac{3+4}{12} + \frac{3^2+4^2}{12^2} + \frac{3^3+4^3}{12^3} + \dots; \\
29) & \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 8} + \dots; \\
30) & \frac{7}{5 \cdot 12} + \frac{7}{12 \cdot 19} + \frac{7}{19 \cdot 26} + \dots
\end{aligned}$$

Пример 2.1

Записать формулу n -го члена ряда a_n , найти n -ю частичную сумму S_n и сумму S ряда $\frac{7}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{19}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{37}{3^3 \cdot 4^3} + \dots$.

Решение

Для записи формулы n -го члена заданного ряда необходимо найти зависимость в записи первых трех членов ряда. Для этого представим числитель каждой дроби в виде разности чисел, составляющих множители знаменателя

$$\frac{7}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{19}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{37}{3^3 \cdot 4^3} + \dots = \frac{8-1}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{27-8}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{64-27}{3^3 \cdot 4^3} + \dots$$

Числа в числителях дробей запишем в виде степеней

$$\frac{8-1}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{27-8}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{64-27}{3^3 \cdot 4^3} + \dots = \frac{2^3-1^3}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{3^3-2^3}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{4^3-3^3}{3^3 \cdot 4^3} + \dots,$$

таким образом, общий член ряда имеет вид

$$a_n = \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3 \cdot (n+1)^3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда n -я частичная сумма ряда равна

$$S_n = \frac{2^3 - 1^3}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{3^3 - 2^3}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{4^3 - 3^3}{3^3 \cdot 4^3} + \dots + \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3 \cdot (n+1)^3}.$$

Представим каждое слагаемое в S_n в виде разности двух дробей

$$S_n = \left(\frac{2^3}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{-1^3}{1^3 \cdot 2^3} \right) + \left(\frac{3^3}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{-2^3}{2^3 \cdot 3^3} \right) + \left(\frac{4^3}{3^3 \cdot 4^3} + \frac{-3^3}{3^3 \cdot 4^3} \right) + \dots + \left(\frac{(n+1)^3}{n^3 \cdot (n+1)^3} + \frac{-n^3}{n^3 \cdot (n+1)^3} \right),$$

упростим получившееся выражение

$$S_n = \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} \right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} \right) + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right),$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Найдем сумму ряда по определению: $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^3} \right) = 1.$$

Ответ: $a_n = \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3 \cdot (n+1)^3}$, $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$, $S = 1$.

Задача 2.2. Исследовать сходимость знакоположительных рядов.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{(2n-1)!};$

5) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(n^2-1)^n};$

9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}};$

2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2-1};$

6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3+1};$

10) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7^{-(n+3)}}{n^3+3};$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n^3+4)^n};$

7) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5^{-(n+1)}}{n^3-1};$

11) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(n^4-1)^n};$

4) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n^3-1};$

8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8^{-n}}{(n^2+4)^n};$

12) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n-1}}{n^3+2};$

$$\begin{array}{lll}
13) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{n^4 + 1}; & 19) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^{-n}}{n^3 + 4}; & 25) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(3n-1)!}; \\
14) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^n}{(5n^2 + 3)^n}; & 20) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(2n-1)!}; & 26) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1}; \\
15) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{(n^2 + 1)^3}}; & 21) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^2}{n^4 - 1}; & 27) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^2}{(n-1)!}; \\
16) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n^3 + 1)^{-1} \cdot n!}; & 22) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n} + 1}{(n^3 + 2n)}; & 28) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + 12}{12^{n+3}}; \\
17) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5^{-n}}{n^3 - 5}; & 23) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{2^{n+1}}; & 29) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n^3 + 1}; \\
18) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5n^3}{(n-1)!}; & 24) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n!}{(3n-1)!}; & 30) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{(n-1)^n}.
\end{array}$$

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$\begin{array}{lll}
1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + 3}; & 9) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 3}}; & 17) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-5n-1}{n^2 + 2n^3}; \\
2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n} + 12n^3 + 11}; & 10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{n^2 + 4\sqrt{n^7}}; & 18) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt[4]{n} - 1}{\sqrt[4]{n^3} + 6n}; \\
3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n}{n^3 + 5}; & 11) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6n}{n^2 + 3n + 4}; & 19) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{n^3 + 15n}; \\
4) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + 5n + 7}; & 12) \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{5n}{n^4 - 36}; & 20) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6(n-1)}{n^3 + 6n + 15}; \\
5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n^2}{n^5 + 2n^3}; & 13) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^5 - n^2}{n^2 - 1}; & 21) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n^5} + 2}{n^2 + 3n + 5}; \\
6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+5}{n^2 + 5n}; & 14) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^4}{n^3 + 4}; & 22) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n-3}{n^2 + 3n^4}; \\
7) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n - n^4}{n^2 + 3n + 3}; & 15) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n}{\sqrt[3]{n^2} + 5\sqrt[3]{n} + 4}; & 23) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3n^2 - 2}{n^3 - 8}; \\
8) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 6n + 10}; & 16) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{n^3 + 7n + 6}; & 24) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{n^2 + 3\sqrt{n^5} + 4};
\end{array}$$

$$25) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+12}{n^5+7n};$$

$$27) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-5n^4}{n^2+1};$$

$$29) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^4+3\sqrt{n}}{n^2+6n^3+7};$$

$$26) \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{4n}{n^2-5n+4};$$

$$28) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n-3}{n^2+9};$$

$$30) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+4}{4n^3+3}.$$

Пример 2.2

Исследовать сходимость знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^5+5}}.$

Решение

Применим признак сравнения сходимости ряда в предельной форме. Запишем ряд, с которым будем сравнивать и поведение которого известно:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^{5/2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Данный ряд сходится, т.к. обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^5+5}} : \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^5+5}} = 5 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^5}{n^5+5}} = 5.$$

Предел отношения n -го члена исходного ряда к n -му члену найденного ряда равен числу, отличному от нуля, следовательно, ряды ведут себя одинаково. По-

скольку $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^5+5}}$ сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задача 2.3. Исследовать сходимость ряда.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1};$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1) \cdot (n+2)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{4n^2+1};$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(4n+2)^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{n^2+5n+6};$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-4}}{(4n^2+1) \cdot n!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n^4+2};$$

$$6) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2-1)^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n-6}}{n^2+4};$$

- | | | |
|--|---|---|
| 10) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - 1};$ | 17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{n^2 + 4n + 5};$ | 24) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1};$ |
| 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n}}{(n+1)^3};$ | 18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n}}{(n+8)n!};$ | 25) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n-3}}{\sqrt[3]{n^2 + 9}};$ |
| 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 1};$ | 19) $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 - 4n + 3};$ | 26) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n}}{(2n+1)!};$ |
| 13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n^2 + 4) \cdot 3^n};$ | 20) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{n^2 - 4};$ | 27) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n-2}}{\sqrt{n^3 + 16}};$ |
| 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n}{n^2 + 1};$ | 21) $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - 5n + 4};$ | 28) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n+1}}{4n^2 + 1};$ |
| 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1};$ | 22) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{(n+1)!};$ | 29) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n} \cdot n!}{n^2 + 4n + 3};$ |
| 16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 14n + 13};$ | 23) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n-1}}{n^2 + 4};$ | 30) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{(n^2 + 1)^n}.$ |

Пример 2.3

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2}.$

Решение

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2} \right| = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2}.$$

Применим радикальный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{11}{3n-7} \right)^{\frac{3n-7}{11}} \right]^{\frac{-11n}{3n-7}} = e^{-\frac{11}{3}}.$$

Поскольку $e^{-\frac{11}{3}} < 1$, то ряд $\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2}$ сходится, следовательно, исход-

ный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

Задача 2.4. Найти область сходимости степенного ряда.**Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:**

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!};$ | 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-1)^n}{(2n-1)};$ | 21) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^{-n}}{(5n-4)};$ |
| 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n+1)};$ | 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-8)^n}{(3n-1)};$ | 22) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+4)^{-n}}{3^n};$ |
| 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n};$ | 13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{(2n+1)};$ | 23) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(4n-1)};$ |
| 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{(2n+1)};$ | 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+81)^n}{(3n-1)!};$ | 24) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^{-n}}{n \cdot 4^n};$ |
| 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(4n-1)!};$ | 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^n}{(4n-1)};$ | 25) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)};$ |
| 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{(3n)!};$ | 16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^n}{5^n};$ | 26) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^{-n}}{(2n-1)};$ |
| 7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-8)^n}{(3n+1)};$ | 17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+7)^n}{(3n-1)};$ | 27) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^n}{7^{-n}};$ |
| 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{(4n+1)};$ | 18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+2)^n}{3^n};$ | 28) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{n-2}}{n^2+1};$ |
| 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^n}{(2n-1)};$ | 19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{2^n \cdot n};$ | 29) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{n-2}}{2n \cdot 3^{-n}};$ |
| 10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{(4n-1)};$ | 20) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n+1)!};$ | 30) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-9)^n}{5^{-n}}.$ |

Пример 2.4

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n} (x-1)^n.$

Решение

Для нахождения интервала сходимости данного ряда применим признак Даламбера. Ряд сходится абсолютно, если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1.$ Поэтому найдем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)} : \frac{(-1)^n (x-1)^n}{3^n \cdot n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-1) \cdot n}{3 \cdot (n+1)} \right|,$$

вынесем за знак предела множитель $|x-1|$, как не зависящий от n , и вычислим предел, используя правило Лопиталя

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-1) \cdot n}{3 \cdot (n+1)} \right| = |x-1| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n+3} = \frac{|x-1|}{3}.$$

Решим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|x-1|}{3} < 1 &\Rightarrow |x-1| < 3, \\ -3 < x-1 < 3, \\ -2 < x < 4. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x < 4$, т.е. на интервале $(-2; 4)$.

Исследуем сходимость ряда на концах данного интервала.

При $x = -2$ ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n} (-2-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-3)^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n} 3^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Полученный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ является гармоническим расходящимся, т.е. при $x = -2$

исходный ряд расходится.

При $x = 4$ ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n} (4-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин членного данного ряда, рас-

ходится, т.е. абсолютной сходимости нет. Для исследования условной сходимости проверим условия признака Лейбница

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Таким образом, при $x = 4$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n} (x-1)^n$ сходится условно, область

сходимости данного ряда $x \in (-2; 4]$.

Ответ: ряд сходится при $x \in (-2; 4]$.

Задача 2.5. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = f(x)$, указав область сходимости полученного ряда.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $y = \cos 2x + \sin 2x$; | 11) $y = x(1 - e^{2x})$; | 21) $y = (1 + e^{-x})^2$; |
| 2) $y = \ln(1 + 5x)$; | 12) $y = \cos(2x)$; | 22) $y = \cos^2 x$; |
| 3) $y = x \cdot \sin x$; | 13) $y = \ln(1 - 3x)$; | 23) $y = x(1 - \cos x)$; |
| 4) $y = (1 + 3x)^{-1}$; | 14) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right)$; | 24) $y = x(1 - x^2)^{-1}$; |
| 5) $y = x \cdot \sin 2x$; | 15) $y = \sin(\pi - 4x)$; | 25) $y = \frac{\sin 3x}{x}$; |
| 6) $y = \frac{e^{-2x}}{x}$; | 16) $y = (1 + 3x)^{-1}$; | 26) $y = \ln(e^2 - ex)$; |
| 7) $y = x^2 \cdot \cos(-x)$; | 17) $y = \ln(e + ex)$; | 27) $y = x^{-1} \cdot \sin(1,5\pi + x)$; |
| 8) $y = \cos x^2$; | 18) $y = (x + 1) \cdot e^{-3x}$; | 28) $y = \sin \frac{x}{3}$; |
| 9) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$; | 19) $y = \sin^2 x$; | 29) $y = 2 \sin x \cos x$; |
| 10) $y = \frac{\cos 3x - 1}{x}$; | 20) $y = \frac{\ln(1-x)}{x}$; | 30) $y = (1 + 3x)^{-1}$. |

Пример 2.5

Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \sqrt{1 + x^2}$, указав область сходимости полученного ряда.

Решение

Для решения задачи используем готовое разложение в ряд функции $y = (1 + x)^m$ (биномиальный ряд)

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

где $x \in (-1; 1)$.

Исходя из условия задачи, в разложение подставляем x^2 вместо x и $m = 0,5$

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x^2)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x^2)^3 + \dots,$$

упростим

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^4 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^6 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^6 - \dots + \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \dots,$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^{2n}$$

Поскольку биномиальный ряд сходится при $x \in (-1; 1)$, то для того, чтобы найти область сходимости полученного ряда, нужно решить неравенство

$$-1 < x^2 < 1,$$

откуда

$$-1 < x < 1.$$

Ответ: $\sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^{2n}$, при $x \in (-1; 1)$.

Задача 2.6. Найти первые шесть членов разложения функции $y = f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $x_0 = 1$; | 14) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$; |
| 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; | 15) $f(x) = (x-1)e^x$, $x_0 = 1$; |
| 3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; | 16) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$; |
| 4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; | 17) $f(x) = (2x+3)^4$, $x_0 = 1$; |
| 5) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$; | 18) $f(x) = -\cos x$, $x_0 = \pi$; |
| 6) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = -1$; | 19) $f(x) = \sin(\pi + 2x)$, $x_0 = -\pi$; |
| 7) $f(x) = 2x^4 + x^2 + 1$, $x_0 = 2$; | 20) $f(x) = \ln(-x)$, $x_0 = -e$; |
| 8) $f(x) = \cos \frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$; | 21) $f(x) = e^{x-1}$, $x_0 = -1$; |
| 9) $f(x) = \sin(-x)$, $x_0 = \pi$; | 22) $f(x) = \ln(-2x)$, $x_0 = -0,5$; |
| 10) $f(x) = \ln 2x$, $x_0 = 0,5$; | 23) $f(x) = x^5 - (x+1)^3 + x$, $x_0 = -2$; |
| 11) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = -2$; | 24) $f(x) = 1 + \cos x$, $x_0 = -\pi$; |
| 12) $f(x) = e^{3x}$, $x_0 = -2$; | 25) $f(x) = \ln 3x$, $x_0 = \frac{1}{3}$; |
| 13) $f(x) = (x-2)^5 - 2x^3 + 3$, $x_0 = -1$; | 26) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $x_0 = -1$; |

$$27) f(x) = \cos(\pi - x), \quad x_0 = \frac{3\pi}{2};$$

$$29) f(x) = (x+1)e^{-x}, \quad x_0 = -1;$$

$$28) f(x) = 2\ln(-ex), \quad x_0 = -1;$$

$$30) f(x) = \sin 3x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2.6

Найти первые шесть членов разложения функции $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, записать ряд с помощью символа суммы.

Решение

Запишем ряд Тейлора в общем виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Найдем значение функции $f(x) = \cos^2 x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$, ее производные до пятого порядка и их значения в этой же точке

$$f(x) = \cos^2 x,$$

$$f(x_0) = 0,$$

$$f'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x,$$

$$f'(x) = 0,$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x,$$

$$f''(x) = 2,$$

$$f'''(x) = 2^2 \sin 2x,$$

$$f'''(x) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = 2^3 \cos 2x,$$

$$f^{(4)}(x) = -2^3,$$

$$f^{(5)}(x) = -2^4 \sin 2x, \dots$$

$$f^{(5)}(x) = 0 \dots$$

Подставим эти данные в формулу ряда Тейлора

$$\cos^2 x = 0 + 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{2!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{0}{3!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{2^3}{4!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \dots$$

Упростим полученное выражение и укажем формулу n -го члена ряда на основе зависимости, определенной в записи первых членов ряда

$$\cos^2 x = \frac{2}{2!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2^3}{4!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} + \dots$$

Запишем ряд с помощью символа суммы

$$\cos^2 x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}.$$

$$\text{Ответ: } \cos^2 x = 0 + 0 + \frac{2}{2!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 0 - \frac{2^3}{4!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + 0 + \dots$$

Задача 2.7. Вычислить указанную величину приближенно с заданной степенью точности δ , воспользовавшись разложением в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}$, $\delta = 0,01$; | 11) $-\ln 3$, $\delta = 0,001$; | 21) $\sin 0,5$, $\delta = 0,001$; |
| 2) $\ln \frac{3}{2}$, $\delta = 0,001$; | 12) $\sin 2$, $\delta = 0,0001$; | 22) $\frac{1}{\sqrt{4e}}$, $\delta = 0,001$; |
| 3) $\sin(-1)$, $\delta = 0,0001$; | 13) $\frac{2}{\sqrt[3]{e^2}}$, $\delta = 0,01$; | 23) $\ln 10$, $\delta = 0,0001$; |
| 4) $\ln 5$, $\delta = 0,01$; | 14) $\sqrt[3]{-30}$, $\delta = 0,0001$; | 24) $\cos 2$, $\delta = 0,0001$; |
| 5) $\sqrt{5}$, $\delta = 0,001$; | 15) $\sin 1$, $\delta = 0,01$; | 25) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$, $\delta = 0,0001$; |
| 6) $\cos 3$, $\delta = 0,001$; | 16) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\delta = 0,001$; | 26) $\sqrt[3]{130}$, $\delta = 0,0001$; |
| 7) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$, $\delta = 0,0001$; | 17) $\sin 3$, $\delta = 0,001$; | 27) $\ln \frac{3}{4}$, $\delta = 0,01$; |
| 8) $\sqrt[3]{66}$, $\delta = 0,0001$; | 18) $\ln 7$, $\delta = 0,001$; | 28) $\ln 9$, $\delta = 0,001$; |
| 9) $\ln \frac{1}{4}$, $\delta = 0,001$; | 19) $\ln \frac{1}{3}$, $\delta = 0,001$; | 29) $\sqrt[4]{84}$, $\delta = 0,0001$; |
| 10) $\sqrt[4]{17}$, $\delta = 0,0001$; | 20) $\sqrt{15}$, $\delta = 0,001$; | 30) $\frac{-1}{\sqrt[3]{8e}}$, $\delta = 0,001$. |

Пример 2.7

Вычислить приближенно $\sqrt[5]{-34}$ с заданной степенью точности $\delta = 0,00001$, воспользовавшись разложением в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции.

Решение

Для вычисления значения данного выражения представим $\sqrt[5]{-34}$ в виде

$$\sqrt[5]{-34} = -\sqrt[5]{32+2} = -\sqrt[5]{32 \cdot \left(1 + \frac{2}{32}\right)} = -2 \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}$$

и запишем биномиальный ряд при $x = \frac{1}{16}$ и $m = \frac{1}{5}$ (после проведенного преобразования $x = \frac{1}{16}$ входит в область сходимости $(-1;1)$ ряда)

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{-34} &= -2 \cdot \left(1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} - 1\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - 2\right) + \dots \right) = \\ &= -2 - 0,025 + 0,000625 - 0,000023 + 0,000001 - \dots \end{aligned}$$

Для сходящегося знакочередующегося ряда погрешность при приближенном вычислении его суммы по абсолютной величине не превосходит модуля первого отброшенного члена (следствие из признака Лейбница).

Для обеспечения данной в условии точности расчета достаточно взять четыре члена, т.к. при этом погрешность $|r_n| \leq 0,000001 < 0,00001$.

$$\text{Итак, } \sqrt[5]{-34} \approx -2 - 0,025 + 0,000625 - 0,000023 = -2,024398$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[5]{-34} \approx -2,024398.$$

Замечание. При вычислении приближенных значений натурального логарифма значение $\ln 2 \approx 0,693147$ принимается как известное.

Задача 2.8. Вкладчик открывает в банке вклад. Ежегодно (в начале каждого года) в течение t лет он будет делать взносы в размере $S = S_0$ ден.ед. Какую сумму получит вкладчик по прошествии этих t лет, если процентная ставка составляет $N\%$ годовых?

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 1 по 15:

- 1) $t = 5, S_0 = 100, N = 7;$
- 2) $t = 6, S_0 = 500, N = 8;$
- 3) $t = 9, S_0 = 650, N = 6;$
- 4) $t = 6, S_0 = 750, N = 9;$
- 5) $t = 7, S_0 = 100, N = 5;$
- 6) $t = 8, S_0 = 250, N = 6;$
- 7) $t = 9, S_0 = 600, N = 9;$
- 8) $t = 7, S_0 = 200, N = 8;$
- 9) $t = 8, S_0 = 700, N = 7;$
- 10) $t = 6, S_0 = 550, N = 5;$
- 11) $t = 5, S_0 = 500, N = 6;$
- 12) $t = 5, S_0 = 700, N = 8;$
- 13) $t = 8, S_0 = 450, N = 5;$
- 14) $t = 5, S_0 = 800, N = 7;$
- 15) $t = 4, S_0 = 1000, N = 8.$

Руководство фирмы считает, что через t лет для замены части оборудования потребуется сумма S ден.ед. Для получения этих средств решено открыть банковский вклад. Каковы должны быть ежемесячные платежи по-

полнения вклада (в начале каждого месяца), если процентная ставка составляет $N\%$ годовых, начисляемых ежемесячно?

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 16 по 30:

- 16) $t = 6$, $S = 52\,000$, $N = 8$;
- 17) $t = 6$, $S = 50\,500$, $N = 5$;
- 18) $t = 5$, $S = 80\,000$, $N = 7$;
- 19) $t = 7$, $S = 20\,000$, $N = 8$;
- 20) $t = 4$, $S = 10\,000$, $N = 8$;
- 21) $t = 5$, $S = 7000$, $N = 8$;
- 22) $t = 8$, $S = 32\,000$, $N = 7$;
- 23) $t = 5$, $S = 41\,000$, $N = 7$;
- 24) $t = 8$, $S = 45\,000$, $N = 5$;
- 25) $t = 6$, $S = 17\,500$, $N = 9$;
- 26) $t = 5$, $S = 50\,000$, $N = 6$;
- 27) $t = 9$, $S_0 = 26\,000$, $N = 9$;
- 28) $t = 9$, $S = 16\,500$, $N = 6$;
- 29) $t = 6$, $S_0 = 7500$, $N = 9$;
- 30) $t = 7$, $S_0 = 23\,000$, $N = 5$.

Пример 2.8

Руководство фирмы считает, что через 7 лет для замены части оборудования потребуется сумма 15 000 ден.ед. Для получения этих средств решено открыть банковский вклад. Каковы должны быть ежемесячные платежи по пополнению вклада (в начале каждого месяца), если процентная ставка составляет 6% годовых, начисляемых ежемесячно?

Решение

По условию задачи, проценты по вкладу начисляются ежемесячно, т.е. процентная ставка составляет $r = \frac{6}{12}\% = 0,5\%$. В течение семи лет необходимо будет сделать $n = 7 \cdot 12 = 84$ платежа. Конечная сумма S должна составлять 15 000 ден. ед., которая складывается из всех платежей и сложных процентов, начисляемых на эти платежи.

Пусть S_0 – сумма ежемесячного платежа. Тогда, 84-й платеж приносит

$$S_0 \cdot (1 + 0,005) \text{ ден.ед.,}$$

83-й платеж дает

$$S_0 \cdot (1 + 0,005)^2 \text{ ден.ед.,}$$

в результате 82-го платежа имеем

$$S_0 \cdot (1 + 0,005)^3 \text{ ден.ед.}$$

Аналогично получаем проценты, «набегающие» от каждого платежа

$$S_0 \cdot (1 + 0,005)^{84-(n-1)} \text{ ден. ед.,}$$

где $n = \overline{1; 84}$.

Очевидно, что чем раньше сделан платеж, тем больший вклад в общую сумму накоплений он дает. Сделав первый платеж, получим

$$S_0 \cdot (1 + 0,005)^{84} \text{ ден.ед.}$$

Тогда окончательную сумму S можно записать в виде ряда

$$S = S_0 \cdot (1 + 0,005) + S_0 \cdot (1 + 0,005)^2 + S_0 \cdot (1 + 0,005)^3 + \dots + S_0 \cdot (1 + 0,005)^{84}$$

или

$$S = S_0 \sum_{n=1}^{84} (1 + 0,005)^n.$$

Найдем S , используя формулу суммы n членов геометрической прогрессии

$$S = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}, \quad (2.1)$$

где a_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии.

В нашем примере $a_1 = (1 + 0,005)$, $q = (1 + 0,005)$. Подставляем эти значения в формулу (2.1)

$$S = S_0 \cdot \frac{(1 + 0,005) \left((1 + 0,005)^{84} - 1 \right)}{(1 + 0,005) - 1},$$

$$S = S_0 \cdot \frac{1,005 (1,005^{84} - 1)}{0,005},$$

откуда выражаем S_0

$$S_0 = \frac{0,005 \cdot 15\,000}{1,005 (1,005^{84} - 1)}.$$

С помощью калькулятора находим размер платежей

$$S_0 = 143,42 \text{ ден.ед.}$$

Ответ: ежемесячные платежи пополнения вклада должны быть равны 143,42 ден.ед.

Раздел III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В данный раздел включены основные типы задач, которые рассматриваются в теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»: вычисление производной явно, неявно и параметрически заданной функции, производные высших порядков, кроме того, приведены задачи на применение дифференциального исчисления к нахождению пределов и исследованию функций. Раздел содержит задачи с экономическим содержанием, при решении которых применяется дифференциальное исчисление.

При решении задач этого раздела необходимо знать правила дифференцирования и таблицу производных; рекомендуется повторить теоретический материал, рассмотренный на лекциях по данной теме. Дополнительный материал по применению дифференциального исчисления к решению задач можно найти в учебной литературе следующих авторов: Н. Ш. Кремер, В.А. Малугин, Д.Т. Письменный, В.И. Малыхин, М.С. Красс и Б.П. Чупрынов. Практикумы и задачки В.И. Ермакова, Г.Н. Бермана и Н. Ш. Кремера помогут при самостоятельной работе по теме, при подготовке к практическим и лекционным занятиям, а также при подготовке к экзамену.

Задача 3.1. Найти производную указанной функции

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}};$$

$$2) y = e^{2x} (2 - \sin 2x - \cos 2x);$$

$$3) y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2};$$

$$4) y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)};$$

$$5) y = x + \frac{1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x);$$

$$6) y = 3x^3 \cdot \sqrt{(1 + x^2)^3};$$

$$7) y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1});$$

$$8) y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 8}}{6x^3};$$

$$9) y = \arcsin e^{-x} - \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$10) y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3};$$

$$11) y = \frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}};$$

$$12) y = (2x + 1)\sqrt{x^2 - x};$$

$$13) y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x;$$

$$14) y = x + \frac{8}{1 + e^{x/4}};$$

$$15) y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8 - x^3}};$$

$$16) y = \frac{e^{x^3}}{1 + x^3};$$

$$17) y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x});$$

$$18) y = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2);$$

$$19) y = (x^2 - 6)\sqrt{(4 + x^2)^3};$$

$$20) y = \arcsin \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}};$$

$$21) y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1 - x^3}};$$

$$22) y = \frac{1}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 5}};$$

$$23) y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2});$$

$$24) y = 3e^x \left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right);$$

$$25) y = \frac{e^{x^2}}{1 + x^2};$$

$$26) y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1});$$

$$27) y = \frac{x + 7}{6\sqrt{x^2 + 2x + 7}};$$

$$28) y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x;$$

$$29) y = \ln^2(x + \cos x);$$

$$30) y = \frac{x^2 + 2}{2\sqrt{1 - x^4}}.$$

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) y = \frac{1}{24}(x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + \frac{x^2}{16} \arcsin \frac{2}{x}, x > 2;$$

$$2) y = \frac{4x + 1}{16x^2 + 8x + 3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x + 1}{\sqrt{2}};$$

$$3) y = 2x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{4x}}) - e^{-2x} \arcsin(e^{2x});$$

$$4) y = \sqrt{9x^2 + 12x + 5} \cdot \operatorname{arctg}(3x - 2) - \ln(3x - 2 + \sqrt{9x^2 - 12x + 5});$$

$$5) y = \frac{2}{x-1} \sqrt{2x - x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{2x - x^2}}{x-1};$$

$$6) y = \frac{x^2}{81} \arcsin \frac{3}{x} + \frac{1}{81}(x^2 + 18)\sqrt{x^2 - 9}, x > 3;$$

$$7) y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x-1}{3x^2 - 2x + 1};$$

$$8) y = 3x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{6x}}) - e^{-3x} \arcsin(e^{3x});$$

$$9) y = \ln(4x - 1 + \sqrt{16x^2 - 8x + 2}) - \sqrt{16x^2 - 8x + 2} \cdot \operatorname{arctg}(4x - 1);$$

$$10) y = \ln \frac{1 + 2\sqrt{-x - x^2}}{2x + 1} + \frac{4}{2x + 1} \sqrt{-x - x^2};$$

$$11) y = (2x + 3)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{2x + 3} + \frac{2}{3}(4x^2 + 12x + 11)\sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad 2x + 3 > 0;$$

- 12) $y = \frac{x+2}{x^2+4x+6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}};$
- 13) $y = 5x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{10x}}) - e^{-5x} \arcsin(e^{5x});$
- 14) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17} \cdot \operatorname{arctg}(x - 4) - \ln(x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 17});$
- 15) $y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3 + 4x - x^2}}{2 - x} + \frac{2}{2 - x} \sqrt{-3 + 4x - x^2};$
- 16) $y = (3x^2 - 4x + 2)\sqrt{9x^2 - 12x + 3} + (3x - 2)^4 \arcsin \frac{1}{3x - 2}, \quad 3x - 2 > 0;$
- 17) $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 3};$
- 18) $y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x} - 1}) + \arcsin(e^{-5x});$
- 19) $y = \ln(2x - 3 + \sqrt{4x^2 - 12x + 10}) - \sqrt{4x^2 - 12x + 10} \cdot \operatorname{arctg}(2x - 3);$
- 20) $y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3 - 4x - x^2}}{-x - 2} - \frac{2}{x + 2} \sqrt{-3 - 4x - x^2};$
- 21) $y = \frac{2}{3}(4x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - x} + (2x - 1)^4 \arcsin \frac{1}{2x - 1}, \quad 2x - 1 > 0;$
- 22) $y = \frac{2x - 1}{4x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{2}};$
- 23) $y = \arcsin(e^{-4x}) + \ln(e^{4x} + \sqrt{e^{8x} - 1});$
- 24) $y = \ln(5x + \sqrt{25x^2 + 1}) - \sqrt{25x^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg}(5x);$
- 25) $y = \frac{2}{3x - 2} \sqrt{-3 + 12x - 9x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{-3 + 12x - 9x^2}}{3x - 2};$
- 26) $y = (3x + 1)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{3x + 1} + (3x^2 + 2x + 1)\sqrt{9x^2 + 6x}, \quad 3x + 1 > 0;$
- 27) $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{2}} + \frac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 3};$
- 28) $y = \ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x} - 1}) + \arcsin(e^{-3x});$
- 29) $y = \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg}(7x) - \ln(7x + \sqrt{49x^2 + 1});$
- 30) $y = \frac{1}{x} \sqrt{1 + 4x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x}.$

Пример 3.1

Найти производную функции

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \cdot \operatorname{arctg}(x - 2) - \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}).$$

Решение

Напомним формулу нахождения производной сложной функции: если $y = f(t)$, $t = u(x)$, где $f(t)$ и $u(x)$ имеют производные, то

$$y' = f'(t) \cdot t', \quad (3.1)$$

Найдем производную заданной функции в соответствии с правилами и формулами нахождения производных, а также в соответствии с формулой (3.1)

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} \cdot \operatorname{arctg}(x - 2) - \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) \right)' = \\ &= \left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} \cdot \operatorname{arctg}(x - 2) \right)' - \left(\ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) \right)' = \\ &= \left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} \right)' \cdot \operatorname{arctg}(x - 2) + \sqrt{x^2 - 4x + 5} \cdot \left(\operatorname{arctg}(x - 2) \right)' - \\ &\quad - \left(\ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) \right)' = \frac{(x^2 - 4x + 5)'}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \cdot \operatorname{arctg}(x - 2) + \\ &\quad + \sqrt{x^2 - 4x + 5} \cdot \frac{(x - 2)'}{1 + (x - 2)^2} - \frac{(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5})'}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \\ &= \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \cdot \operatorname{arctg}(x - 2) + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x^2 - 4x + 5} - \\ &\quad - \left(1 + \frac{(x^2 - 4x + 5)'}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \right) \cdot \frac{1}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{(x - 2) \operatorname{arctg}(x - 2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} - \left(1 + \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \right) \cdot \frac{1}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}}. \end{aligned}$$

Приведем к общему знаменателю выражение, стоящее в скобках,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x - 2) \operatorname{arctg}(x - 2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} - \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \cdot \frac{1}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}}, \end{aligned}$$

тогда,

$$y' = \frac{(x-2) \operatorname{arctg}(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}},$$

$$y' = \frac{(x-2) \operatorname{arctg}(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}.$$

Ответ: $y' = \frac{(x-2) \operatorname{arctg}(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}.$

Задача 3.2. Вычислить производную функции y по переменной x , если функция задана параметрически.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\begin{cases} x = \frac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y = \sin\left(\frac{t^3}{3} + t\right); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg}\sqrt{1+t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2, \\ y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2+1}), \\ y = t\sqrt{t^2+1}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1); \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-t}{t}}, \\ y = \sqrt{1-t} \cdot \arcsin\sqrt{t}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \ln \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}, \\ y = \arcsin \frac{1-t^2}{1+t^2}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = \arcsin(\sqrt{1-t^2}), \\ y = (\arccos t)^2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \ln \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t); \end{cases}$

13) $\begin{cases} x = \ln \frac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$

14) $\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2-1} \cdot \arcsin \frac{1}{t}; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}; \end{cases}$

16) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln \frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{t+1}{t-1}, \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}, \\ y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 t + \ln \cos t; \end{cases}$

20) $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}; \end{cases}$

21) $\begin{cases} x = \ln(\operatorname{tg} t), \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}; \end{cases}$

$$\begin{aligned}
22) & \begin{cases} x = \ln(\operatorname{ctg} t), \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}; \end{cases} & 25) & \begin{cases} x = \frac{1}{\ln t}, \\ y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}; \end{cases} & 28) & \begin{cases} x = \frac{t^2 \ln t}{1 - t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t; \end{cases} \\
23) & \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{t}{2}} \right), \\ y = \sqrt{e^t + 1}; \end{cases} & 26) & \begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln(\operatorname{tg}(e^t)); \end{cases} & 29) & \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}), \\ y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}; \end{cases} \\
24) & \begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}; \end{cases} & 27) & \begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}; \end{cases} & 30) & \begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Пример 3.2

Вычислить производную функции y по переменной x функции:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arcctg} \sqrt{\frac{1+t}{t}}, \\ y = \sqrt{1+t} \cdot \arccos \sqrt{t}. \end{cases}$$

Решение

Функция задана параметрически, поэтому производную y'_x найдем по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (3.2)$$

Найдем y'_t и x'_t , учитывая, что $y = y(t)$ и $x = x(t)$ сложные функции:

$$\begin{cases} x'_t = -\frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+t}{t}} \right)^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+t}{t}} \right)', \\ y'_t = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \cdot (1+t)' \cdot \arccos \sqrt{t} + \sqrt{1+t} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{t})^2}} \cdot (\sqrt{t})' \right); \end{cases}$$

таким образом,

$$\begin{cases} x'_t = -\frac{1}{1+\frac{1+t}{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+t}{t}}} \cdot \left(\frac{1+t}{t}\right)', \\ y'_t = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \cdot 1 \cdot \arccos \sqrt{t} - \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}; \\ x'_t = -\frac{t}{t+1+t} \cdot \frac{\sqrt{t}}{2 \cdot \sqrt{1+t}} \cdot \left(\frac{1 \cdot t - (1+t) \cdot 1}{t^2}\right), \\ y'_t = \frac{\arccos \sqrt{t}}{2\sqrt{1+t}} - \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}. \end{cases}$$

Преобразовав выражения, получим

$$\begin{cases} x'_t = \frac{1}{2t+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}, \\ y'_t = \frac{\arccos \sqrt{t}}{2\sqrt{1+t}} - \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}. \end{cases}$$

Подставим найденные значения в формулу (3.2) и упростим полученное выражение

$$\begin{aligned} y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} &= \frac{\sqrt{t} \cdot \sqrt{1-t} \cdot \arccos \sqrt{t} - 1 - t}{2\sqrt{t} \cdot \sqrt{1-t} \cdot \sqrt{1+t}} \cdot \frac{(2t+1) \cdot 2\sqrt{1+t} \cdot \sqrt{t}}{1} = \\ &= \frac{(2t+1)(\sqrt{t} \cdot \sqrt{1-t} \cdot \arccos \sqrt{t} - 1 - t)}{\sqrt{1-t}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y'_x = \frac{(2t+1)(\sqrt{t} \cdot \sqrt{1-t} \cdot \arccos \sqrt{t} - 1 - t)}{\sqrt{1-t}}.$$

Задача 3.3. Найти производную данной функции указанного порядка в заданной точке.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = (x-1)\ln(x-1), \quad y''(2) = ?;$ | 5) $y = (x-3)\ln(x-3), \quad y''(4) = ?;$ |
| 2) $y = x^2 \ln^2 x, \quad y''(1) = ?;$ | 6) $y = x^3 \ln^2 x, \quad y''(1) = ?;$ |
| 3) $y = x \cos x^2, \quad y''(\pi) = ?;$ | 7) $y = \frac{1}{x} \sin 2x, \quad y''(\pi) = ?;$ |
| 4) $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}, \quad y''(2) = ?;$ | 8) $y = (x+4)\ln(x+4), \quad y''(-3) = ?;$ |

- 9) $y = \frac{\log_2 x}{x^3}$, $y''(2) = ?$; 20) $y = (1 - x - x^2) e^{\frac{x-1}{2}}$, $y''(1) = ?$;
 10) $y = (4x^3 + 5) e^{2x+1}$, $y''\left(-\frac{1}{2}\right) = ?$; 21) $y = \frac{\ln(2x+5)}{2x+5}$, $y''(-2) = ?$;
 11) $y = x^2 \sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$, $y''(\pi) = ?$; 22) $y = (3x - 7) \cdot 3^{-x}$, $y''(-1) = ?$;
 12) $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y''(1) = ?$; 23) $y = \frac{\ln x}{x^5}$, $y''(1) = ?$;
 13) $y = 2x \ln^2 x$, $y''(1) = ?$; 24) $y = (1 - 3x) \ln(1 - 3x)$, $y''(0) = ?$;
 14) $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$, $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$; 25) $y = (x^2 + 3x) e^{3x+2}$, $y''\left(-\frac{2}{3}\right) = ?$;
 15) $y = (4x + 3) \cdot 2^{-x}$, $y''(1) = ?$; 26) $y = (5x - 8) \cdot 2^{-x}$, $y''(-1) = ?$;
 16) $y = \frac{\ln x}{x^3}$, $y''(1) = ?$; 27) $y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}$, $y''(3) = ?$;
 17) $y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin 2x$, $y''(\pi) = ?$; 28) $y = (x^3 + 3) e^{4x+3}$, $y''\left(-\frac{3}{4}\right) = ?$;
 18) $y = \frac{\ln(3+x)}{3+x}$, $y''(-2) = ?$; 29) $y = e^{2x} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$, $y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$;
 19) $y = (2x^3 + 1) \cos x$, $y''(0) = ?$; 30) $y = \frac{\log_3 x}{x^2}$, $y''(3) = ?$.

Пример 3.3

Найти производную функции $y = (x^2 + 3x + 2) e^{2x-3}$ второго порядка в точке $x_0 = \frac{3}{2}$.

Решение

Сначала найдем производную первого порядка от заданной функции

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 3x + 2)' e^{2x-3} + (x^2 + 3x + 2) (e^{2x-3})' = \\ &= (2x + 3) e^{2x-3} + (x^2 + 3x + 2) \cdot 2e^{2x-3} = e^{2x-3} (2x^2 + 8x + 7). \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить производную второго порядка, нужно найти производную от производной первого порядка. Таким образом,

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = (e^{2x-3})' (2x^2 + 8x + 7) + e^{2x-3} (2x^2 + 8x + 7)' = \\ &= 2e^{2x-3} (2x^2 + 8x + 7) + e^{2x-3} (4x + 8) = e^{2x-3} (4x^2 + 20x + 22). \end{aligned}$$

В полученное выражение вместо переменной подставим значение $x_0 = \frac{3}{2}$ и получим

$$y''\left(\frac{3}{2}\right) = e^{2 \cdot \frac{3}{2} - 3} \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 20 \cdot \frac{3}{2} + 22\right) = e^0 \cdot (9 + 30 + 22) = 61.$$

Ответ: 61.

Задача 3.4. Вычислить предел функции, воспользовавшись правилом Лопиталя.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 4x};$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{7x}}{\arcsin 2x - x};$ | 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x + 5)}{\sqrt[3]{8x + 3}};$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - \sin x};$ | 13) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + x - 2};$ | 22) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6^{\ln x} - x^2}{x^2 - 1};$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\ln(-x)};$ | 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x - x};$ | 23) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\ln(-x - 1)};$ |
| 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin 2x - \sin x};$ | 15) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4^{\ln x} - x}{x - 1};$ | 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x};$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x + 1)}{\sqrt[4]{-2x + 3}};$ | 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 7^{-x}}{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x};$ | 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x - 7x};$ |
| 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\operatorname{arctg} x - x^2};$ | 17) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\ln(x - 1)};$ | 26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{-x} \cdot x^3}{5};$ |
| 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{3^x x^4};$ | 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + 3x)}{x + 1};$ | 27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x};$ |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2 \operatorname{arctg} x - \sin x};$ | 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2 \operatorname{tg} x - \sin x};$ | 28) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x^2 + 3x - 4};$ |
| 11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} + e^x}{1 - \ln x};$ | 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 7^x}{\arcsin 3x - 5x};$ | 29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} x^2};$ |
| 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x};$ | 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 1}{x^5 + x^4};$ | 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}.$ |

Пример 3.4

Вычислить предел функции, воспользовавшись правилом Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 7x}{e^{2x+1}}.$$

Решение

При непосредственном вычислении заданного предела получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, следовательно, можно использовать правило Лопиталя для вычисления предела функции, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 7x}{e^{2x+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x^2 - 7x)'}{(e^{2x+1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x - 7}{2e^{2x+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Поскольку снова получили неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, то еще раз воспользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x - 7}{2e^{2x+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(10x - 7)'}{(2e^{2x+1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{4e^{2x+1}} = \left[\frac{10}{\infty} \right] = 0.$$

Ответ: 0.

Задача 3.5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right];$
- 2) $f(x) = \operatorname{tg} x - x, \quad \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right];$
- 3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 7, \quad [1; 5];$
- 4) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3, \quad [-1; 2];$
- 5) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3, \quad [-2; 2];$
- 6) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x - 1, \quad [1; 5];$
- 7) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3, \quad [0; 6];$

- 8) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5x, \quad [-3; 4];$
- 9) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 3x, \quad [-3; 5];$
- 10) $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad [-2; 3];$
- 11) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6, \quad [-3; 2];$
- 12) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad [-3; 3];$
- 13) $f(x) = x \ln(x + 1), \quad [0; 2e];$
- 14) $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}, \quad [-3; 4];$
- 15) $f(x) = 2\sqrt{x} - x, \quad [0; 4];$
- 16) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4, \quad [-2; 2];$
- 17) $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}, \quad [-6; 6];$
- 18) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1, \quad [0; 4];$
- 19) $f(x) = \sin^2 x, \quad [0; 2\pi];$
- 20) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2, \quad [-3; 1];$
- 21) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x, \quad [-4; 1];$
- 22) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2, \quad [-3; 3];$
- 23) $f(x) = x \ln x, \quad [1; e];$
- 24) $f(x) = 2x^3 - 3x^2, \quad [-2; 2];$
- 25) $f(x) = 2x + \cos 2x, \quad \left[-\frac{3\pi}{4}; \pi\right];$
- 26) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 7, [-1; 4];$
- 27) $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}, \quad [-4; 3];$
- 28) $f(x) = \cos^2 x, \quad [0; 2\pi];$
- 29) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4, \quad [-4; 4];$

$$30) f(x) = \frac{6x}{x^2 + 9}, \quad [-4; 4].$$

Пример 3.5

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \sin^2 x + 1$ на отрезке $[\pi; 3\pi]$.

Решение

Функция $f(x) = \sin^2 x + 1$ определена на заданном отрезке. Вычислим первую производную

$$f'(x) = (\sin^2 x + 1)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Найдем точки, в которых производная функции равна нулю

$$f'(x) = 0 \text{ при условии, что } \sin 2x = 0,$$

откуда, решив тригонометрическое уравнение, получаем множество корней

$$x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Выберем из полученной серии корней те, которые принадлежат отрезку $[\pi; 2\pi]$:

$$n = 2, \quad x = \pi; \quad n = 3, \quad x = \frac{3\pi}{2}; \quad n = 4, \quad x = 2\pi.$$

Определим значение функции в найденных точках и на концах заданного отрезка (в нашем примере эти значения совпали) и выберем среди них наибольшее и наименьшее

$$f(\pi) = \sin^2 \pi + 1 = 1, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{3\pi}{2} + 1 = 2, \quad f(2\pi) = \sin^2 2\pi + 1 = 1,$$

следовательно,

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \text{ – наибольшее значение функции,}$$

$$f(\pi) = f(2\pi) = 1 \text{ – наименьшее значение функции.}$$

$$\text{Ответ: } f_{\text{наиб}} = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2, \quad f_{\text{наим}} = f(\pi) = f(2\pi) = 1.$$

Задача 3.6. Провести полное исследование функции и построить ее график.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) y = \frac{x^3 + 4}{x^2}; \quad 2) y = \frac{x + \ln x}{x}; \quad 3) y = \frac{3 - 2x}{(x - 2)^2};$$

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 4) $y = x \cdot e^{-x}$; | 13) $y = x - \arctg x$; | 22) $y = -\frac{8x}{x^2 + 4}$; |
| 5) $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$; | 14) $y = \frac{x^2 - 4}{e^x}$; | 23) $y = \frac{1}{x^2} + 2x$; |
| 6) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$; | 15) $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$; | 24) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$; |
| 7) $y = \frac{2}{e^x \cdot (x+1)}$; | 16) $y = x^2 \cdot e^{-x}$; | 25) $y = \frac{1 - 2x}{e^x}$; |
| 8) $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$; | 17) $y = \frac{3x - 4}{x^2 - 1}$; | 26) $y = x^2(x-4)^2$; |
| 9) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$; | 18) $y = \frac{2}{x^2} + 3x$; | 27) $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$; |
| 10) $y = x + \arctg 3x$; | 19) $y = \frac{1 - 2x}{(1-x)^2}$; | 28) $y = 2x \cdot e^{-2x}$; |
| 11) $y = \frac{4x - 1}{x^2 - 4}$; | 20) $y = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 9}$; | 29) $y = 16x^2(x-1)^2$; |
| 12) $y = \frac{2x - \ln x}{x}$; | 21) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$; | 30) $y = \frac{2x - 1}{e^x}$. |

Пример 3.6

Провести полное исследование функции $y = x^3 \cdot e^{2x}$ и построить ее график.

Решение

Проведем полное исследование функции по следующей схеме:

1. Область определения.

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

2. Четность и нечетность.

Область определения функции симметрична относительно нуля. Найдем $y(-x)$

$$y(-x) = (-x)^3 \cdot e^{2 \cdot (-x)} = -x^3 e^{-2x}.$$

Поскольку $y(-x) \neq y(x)$, то функция не является четной, кроме того, $y(-x) \neq -y(x)$, значит, функция не является нечетной.

Следовательно, $y = x^3 \cdot e^{2x}$ – функция общего вида.

3. Периодичность.

Функция не является периодичной, т.к.

$$\forall x \in D(y) \quad x^3 \cdot e^{2x} \neq (x+T)^3 e^{2 \cdot (x+T)},$$

т.е.,

$$y(x) \neq y(x+T),$$

для любого значения T , отличного от нуля.

4. Точки пересечения с осями координат и промежутки знакопостоянства.

С осью Ox : $y = 0$, т.е. необходимо решить уравнение

$$x^3 \cdot e^{2x} = 0,$$

откуда находим,

$$x = 0.$$

Точка пересечения с осью Ox : $(0; 0)$.

С осью Oy : $x = 0$, т.е. в уравнение функции вместо аргумента подставим значение ноль и получим

$$y = 0^3 \cdot e^{2 \cdot 0} = 0.$$

Точка пересечения с осью Oy : $(0; 0)$.

Отметим на числовой прямой найденную точку пересечения с осью Ox (рис. 1), в каждом из полученных промежутков проверим знак функции

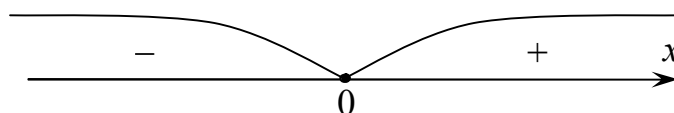


Рис. 1

$$y(-1) = (-1)^3 \cdot e^{2 \cdot (-1)} = -e^{-2} < 0,$$

$$y(1) = 1^3 \cdot e^{2 \cdot 1} = e^2 > 0.$$

Следовательно,

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0); \quad y > 0 \text{ при } x \in (0; +\infty).$$

5. Промежутки возрастания и убывания, экстремумы функции и точки экстремума.

Найдем производную первого порядка исследуемой функции

$$y' = (x^3 \cdot e^{2x})' = (x^3)' \cdot e^{2x} + x^3 \cdot (e^{2x})' = 3x^2 e^{2x} + x^3 \cdot 2e^{2x} = e^{2x}(3x^2 + 2x^3).$$

Найдем точки, в которых производная обращается в ноль, и отметим их на числовой прямой (рис. 2)

$$e^{2x}(3x^2 + 2x^3) = 0,$$

$$e^{2x} \neq 0, \quad 3x^2 + 2x^3 = 0,$$

$$x^2(3 + 2x) = 0,$$

$$x = 0, \quad x = -\frac{3}{2}.$$

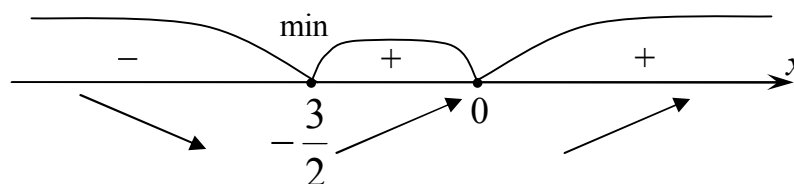


Рис. 2

Проверим знак первой производной функции в каждом из полученных промежутков

$$\begin{aligned}y'(-2) &= e^{2 \cdot (-2)} (3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2)^3) = -4e^{-4} < 0, \\y'(-1) &= e^{2 \cdot (-1)} (3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^3) = e^{-2} > 0, \\y'(1) &= e^{2 \cdot 1} (3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3) = 5e^2 > 0.\end{aligned}$$

Если значение производной функции на промежутке отрицательно, то функция убывает, если положительно, то функция возрастает. Точка, в которой производная меняет знак, является точкой экстремума. Следовательно,

$$\text{функция убывает при } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right],$$

$$\text{функция возрастает при } x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right),$$

$$x_{\min} = -\frac{3}{2}, \quad y_{\min} = -\frac{27}{8}e^{-3}.$$

6. Промежутки выпуклости функции и точки перегиба.

Найдем производную второго порядка исследуемой функции

$$\begin{aligned}y'' &= (e^{2x}(3x^2 + 2x^3))' = (e^{2x})' \cdot (3x^2 + 2x^3) + e^{2x} \cdot (3x^2 + 2x^3)' = \\&= 2e^{2x} \cdot (3x^2 + 2x^3) + e^{2x} \cdot (6x + 6x^2) = 2e^{2x}(2x^3 + 6x^2 + 3x).\end{aligned}$$

Найдем точки, в которых вторая производная обращается в ноль, и отметим их на числовой прямой (рис. 3)

$$\begin{aligned}2e^{2x}(2x^3 + 6x^2 + 3x) &= 0, \\2e^{2x} \neq 0, \quad 2x^3 + 6x^2 + 3x &= 0, \\x(2x^2 + 6x + 3) &= 0, \\x = 0, \quad x = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

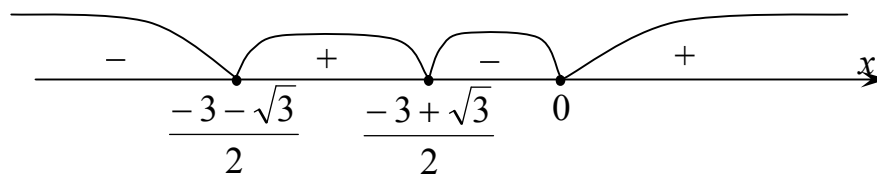


Рис. 3

Проверим знак производной второго порядка функции в каждом из полученных промежутков

$$\begin{aligned}y''(-3) &= 2e^{2 \cdot (-3)} (2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3)) = 2e^{-6} \cdot (-9) < 0, \\y''(-1) &= 2e^{2 \cdot (-1)} (2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)) = 2e^{-2} \cdot 1 > 0,\end{aligned}$$

$$y''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) < 0,$$

$$y''(1) = 2e^{2\cdot 1}(2\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 3\cdot 1) = 2e^2 \cdot 11 > 0.$$

Если значение второй производной функции на промежутке отрицательно, то функция выпукла вверх, если положительно, то функция выпукла вниз. Точка, в которой вторая производная меняет знак, является точкой перегиба. Следовательно,

$$\text{функция выпукла вверх при } x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{3}}{2}; 0\right],$$

$$\text{функция выпукла вниз при } x \in \left[\frac{-3-\sqrt{3}}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right] \cup [0; +\infty),$$

$$x_{\text{перег}} = \frac{-3-\sqrt{3}}{2}, \quad y_{\text{перег}} = y\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right) \approx -0,12,$$

$$x_{\text{перег}} = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}, \quad y_{\text{перег}} = y\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right) \approx -0,07,$$

$$x_{\text{перег}} = 0, \quad y_{\text{перег}} = y(0) = 0.$$

7. Асимптоты.

Функция определена на всей числовой прямой, значит вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты находим в виде (1.3)

$$y = kx + b, \tag{3.3}$$

где

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{3.4}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx). \tag{3.5}$$

Если значения пределов (3.4) и (3.5) существуют и конечны, то у функции есть наклонные асимптоты. Если значение предела (3.4) равно нулю, значение предела (3.5) существует и конечно, то из формулы (3.3) получаем уравнение горизонтальной асимптоты

$$y = b. \tag{3.6}$$

В формулу (3.4) подставим исследуемую функцию и найдем значение k

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{2x}) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right],$$

после проведенных преобразований можно использовать правило Лопиталья для вычисления предела

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-2e^{-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4e^{-2x}} = \left[\frac{2}{\infty} \right] = 0.$$

Найдем значение b , воспользовавшись формулой (3.5)

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^{2x} - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^{2x}) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right],$$

вычислим предел с помощью правила Лопиталя

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-2e^{-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{4e^{-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{8e^{-2x}} = \left[\frac{6}{\infty} \right] = 0. \end{aligned}$$

Поскольку значение k равно нулю, то, подставив найденное значение b в формулу (3.6), получим уравнение горизонтальной асимптоты функции при $x \rightarrow -\infty$

$$y = 0.$$

Аналогично определим наклонную асимптоту $x \rightarrow +\infty$. Найдем коэффициент k

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{2x}) = [\infty \cdot \infty] = +\infty,$$

т.к. полученное значение предела не является конечным, то при $x \rightarrow +\infty$ функция асимптоты не имеет.

8. График.

Согласно проведенному исследованию, построим график функции $y = x^3 \cdot e^{2x}$ (рис. 3).

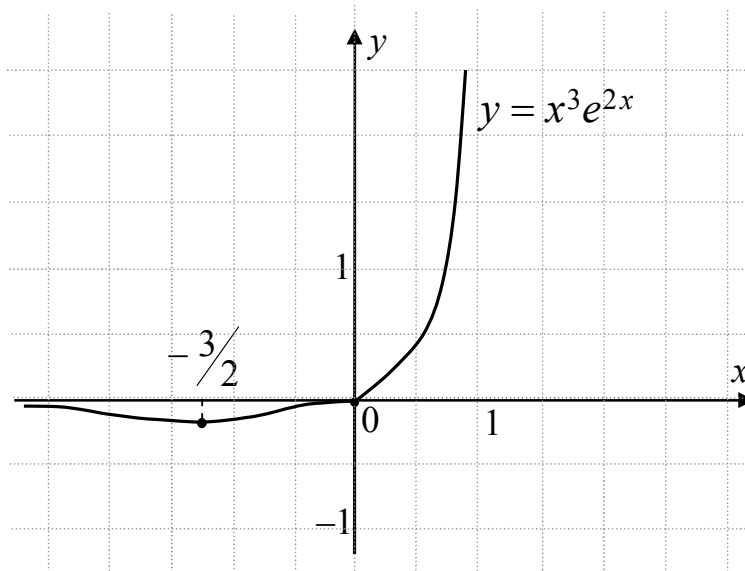


Рис. 3

Задача 3.7. Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид $C = C(q)$ ден. ед., где q – количество произведенной продукции. Определить значение средних и предельных издержек производства при $q = q_0$ ед.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $C(q) = q^3 - 0,2q^2 + 5q + 25, \quad q_0 = 5;$
- 2) $C(q) = -0,05q^3 + 50q, \quad q_0 = 10;$
- 3) $C(q) = 0,03q^3 - 0,2q^2 + 81, \quad q_0 = 9;$
- 4) $C(q) = -0,01q^3 + 2q^2 + 5q, \quad q_0 = 12;$
- 5) $C(q) = -0,5q^2 + 20q + 4, \quad q_0 = 4;$
- 6) $C(q) = 2q^3 - 0,1q^2, \quad q_0 = 8;$
- 7) $C(q) = -0,03q^3 + 3q^2 + 0,5q, \quad q_0 = 11;$
- 8) $C(q) = -0,02q^3 + 5q + 182, \quad q_0 = 7;$
- 9) $C(q) = 4q^3 - 0,4q^2 + 30, \quad q_0 = 6;$
- 10) $C(q) = -0,02q^3 + 5q + 75, \quad q_0 = 3;$
- 11) $C(q) = -0,1q^2 + 5q + 45, \quad q_0 = 5;$
- 12) $C(q) = -0,05q^3 + 100q, \quad q_0 = 10;$
- 13) $C(q) = 2q^3 - 0,02q^2 + 90, \quad q_0 = 9;$
- 14) $C(q) = 0,01q^3 - 0,2q^2 + 5q, \quad q_0 = 12;$
- 15) $C(q) = -0,08q^2 + 100q + 16, \quad q_0 = 4;$
- 16) $C(q) = 4q^3 - 0,3q^2 + 8, \quad q_0 = 8;$
- 17) $C(q) = 3q^3 - 0,02q^2 + 5q, \quad q_0 = 11;$
- 18) $C(q) = -0,2q^3 + 50q + 140, \quad q_0 = 7;$
- 19) $C(q) = q^3 - 0,04q^2 + 24, \quad q_0 = 6;$
- 20) $C(q) = -0,03q^3 + 12q + 51, \quad q_0 = 3;$
- 21) $C(q) = -0,2q^2 + 4q + 55, \quad q_0 = 5;$
- 22) $C(q) = -0,04q^3 + 6q^2 + 10q, \quad q_0 = 10;$
- 23) $C(q) = 3q^3 - 0,02q^2 + 72, \quad q_0 = 9;$
- 24) $C(q) = 0,02q^3 - 0,3q^2 + 12q, \quad q_0 = 12;$
- 25) $C(q) = -0,5q^2 + 84q + 16, \quad q_0 = 4;$
- 26) $C(q) = 4q^3 - 0,05q^2 + 32, \quad q_0 = 8;$

- 27) $C(q) = 4q^3 - 0,2q^2 + 5q, \quad q_0 = 11;$
 28) $C(q) = -0,1q^3 + 50q + 77, \quad q_0 = 7;$
 29) $C(q) = 0,1q^3 - 0,01q^2 + 60, \quad q_0 = 6;$
 30) $C(q) = -0,04q^3 + 15q + 93, \quad q_0 = 3.$

Пример 3.7

Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид $C(q) = 0,2q^3 - 1,1q^2 + 3q + 150$ ден. ед. Определить значение средних и предельных издержек производства, когда количество произведенной продукции равно 10.

Решение

Средние издержки производства $C_{\text{ср}}(q)$ – это издержки на единицу выпуска продукции

$$C_{\text{ср}}(q) = \frac{C(q)}{q}. \quad (3.7)$$

Предельные издержки производства $C_{\text{пред}}(q)$ – прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции

$$C_{\text{пред}}(q) = C'(q). \quad (3.8)$$

В формулах (3.7) и (3.8): $C(q)$ – функция издержек производства продукции, q – количество продукции.

Найдем средние издержки производства по формуле (3.7)

$$C_{\text{ср}}(q) = \frac{0,2q^3 - 1,1q^2 + 3q + 150}{q} = 0,2q^2 - 1,1q + 3 + \frac{150}{q},$$

следовательно, при $q = 10$ получим

$$C_{\text{ср}}(10) = 0,2 \cdot 10^2 - 1,1 \cdot 10 + 3 + \frac{150}{10} = 27 \text{ ден. ед.}$$

Предельные издержки производства найдем по формуле (3.8)

$$C_{\text{пред}}(q) = (0,2q^3 - 1,1q^2 + 3q + 150)' = 0,6q^2 - 2,2q + 3,$$

подставим в полученное выражение $q = 10$ и получим

$$C_{\text{пред}}(10) = 0,6 \cdot 10^2 - 2,2 \cdot 10 + 3 = 41 \text{ ден. ед.}$$

Ответ: при производстве 10 единиц продукции издержки на каждую единицу составляют 27 ден. ед.; при производстве дополнительной единицы продукции переменные затраты увеличатся на 41 ден. ед.

Задача 3.8. Заданы функция спроса $q_D = q(p)$ и предложения $q_S = q(p)$, где q_D и q_S – количество товара, соответственного покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p ден.ед. – цена единицы товара. Найти эластичность спроса и предложения для равновесной цены; определить изменение (в процентах) спроса и предложения при увеличении цены на $N\%$ от равновесной.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $q_D = -2p + 7$; $q_S = p - 2$; $N = 10$;
- 2) $q_D = -2p + 14$; $q_S = 2p - 10$; $N = 25$;
- 3) $q_D = -3p + 16$; $q_S = p - 4$; $N = 15$;
- 4) $q_D = -2p + 13$; $q_S = 3p - 7$; $N = 20$;
- 5) $q_D = -p + 5$; $q_S = 2p - 7$; $N = 20$;
- 6) $q_D = -2p + 7$; $q_S = 2p - 1$; $N = 10$;
- 7) $q_D = -2p + 3$; $q_S = 2p - 1$; $N = 5$;
- 8) $q_D = -p + 6$; $q_S = 2p - 3$; $N = 15$;
- 9) $q_D = -2p + 15$; $q_S = 3p - 10$; $N = 25$;
- 10) $q_D = -3p + 31$; $q_S = p - 9$; $N = 20$;
- 11) $q_D = -p + 3$; $q_S = 2p - 3$; $N = 10$;
- 12) $q_D = -p + 3$; $q_S = p + 1$; $N = 5$;
- 13) $q_D = -2p + 7$; $q_S = 2p - 5$; $N = 15$;
- 14) $q_D = -3p + 35$; $q_S = p - 9$; $N = 25$;
- 15) $q_D = -p + 5$; $q_S = p - 3$; $N = 20$;
- 16) $q_D = -3p + 22$; $q_S = p - 6$; $N = 10$;
- 17) $q_D = -3p + 12$; $q_S = 2p - 3$; $N = 5$;
- 18) $q_D = -p + 9$; $q_S = 3p - 3$; $N = 15$;
- 19) $q_D = -p + 12$; $q_S = p - 6$; $N = 25$;
- 20) $q_D = -p + 7$; $q_S = p - 3$; $N = 25$;
- 21) $q_D = -p + 5$; $q_S = p - 3$; $N = 10$;
- 22) $q_D = -p + 4$; $q_S = 4p - 1$; $N = 5$;
- 23) $q_D = -2p + 8$; $q_S = 3p - 7$; $N = 15$;
- 24) $q_D = -p + 6$; $q_S = 2p - 9$; $N = 25$;
- 25) $q_D = -2p + 9$; $q_S = 2p - 7$; $N = 20$;
- 26) $q_D = -p + 4$; $q_S = 3p - 4$; $N = 10$;

- 27) $q_D = -p + 7$; $q_S = p - 1$; $N = 5$;
 28) $q_D = -p + 9$; $q_S = p - 3$; $N = 15$;
 29) $q_D = -p + 4$; $q_S = 2p - 2$; $N = 5$;
 30) $q_D = -p + 12$; $q_S = 2p - 6$; $N = 20$.

Пример 3.8

Функция спроса $q_D = -7p + 18$ и предложения $q_S = p + 2$, где q_D и q_S – количество товара, соответственного покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена единицы товара. Найти эластичность спроса и предложения для равновесной цены и определить изменение спроса и предложения при увеличении цены на 5 % от равновесной.

Решение

Найдем точку рыночного равновесия

$$\begin{aligned} -7p + 18 &= p + 2, \\ -8p &= -16, \\ p &= 2, \quad q = 4. \end{aligned}$$

таким образом, равновесная цена составляет 2 ден. ед.

Эластичность спроса от цены выражается формулой

$$E_D(p) = -\frac{p}{q_D} \cdot (q_D)' \quad (3.9)$$

и показывает, на сколько процентов уменьшится спрос при увеличении цены на 1 %.

Поставим необходимые данные в формулу (3.9)

$$E_D(p) = -\frac{p}{-7p + 18} \cdot (-7p + 18)' = -\frac{p(-7)}{-7p + 18} = \frac{7p}{-7p + 18}.$$

Найдем эластичность спроса в равновесной цене

$$E_D(2) = \frac{7 \cdot 2}{-7 \cdot 2 + 18} = 3,5.$$

Поскольку $E_D(2) > 1$, то товар эластичного спроса, т.е. если равновесную цену увеличить на 5 %, то спрос уменьшится на $3,5 \cdot 5 = 17,5$ %.

Эластичность предложения от цены выражается формулой

$$E_S(p) = \frac{p}{q_S} \cdot (q_S)' \quad (3.10)$$

и показывает, на сколько процентов увеличится предложение при увеличении цены на 1 %.

Поставим необходимые данные в формулу (3.10)

$$E_S(p) = \frac{p}{p+2} \cdot (p+2)' = \frac{p}{p+2}.$$

Найдем эластичность предложения в равновесной цене

$$E_S(2) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $E_S(2) < 1$, то товар неэластичного предложения, т.е. если равновесную цену увеличить на 5 %, то предложение увеличится на $\frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5$ %.

Ответ: Эластичность спроса для равновесной цены равна 3,5; эластичность предложения для равновесной цены равна $\frac{1}{2}$. При увеличении равновесной цены на 5 % спрос уменьшится на 17,5 %, а предложение увеличится на 2,5 %.

Раздел IV. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В раздел включены задачи, которые рассматриваются в теме «Функции многих переменных»: нахождение частных производных первого, второго порядка и полного дифференциала функции многих переменных, вычисление смешанных производных, исследование функции многих переменных на глобальный и локальный экстремум. Отметим, что раздел содержит задачи с экономическим содержанием, при решении которых необходимо применить сведения, полученные при изучении данной темы.

При выполнении семестровой работы и самостоятельной подготовке к учебным занятиям целесообразно рассмотреть теоретический материал и методы решения задач, которые представлены в учебных пособиях Н. Ш. Кремера, В.А. Малугина, В.И. Малыхина и в практикумах В.И. Ермакова, Г.Н. Бермана.

Задача 4.1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $z = z(x, y)$.

Данные к условию задачи, соответствующие варианту:

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $z = \frac{3xy}{2x-5y}$; | 11) $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$; | 21) $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$; |
| 2) $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x+y}}$; | 12) $z = \ln(y^2 - e^{-x})$; | 22) $y = \arccos(x + \sqrt{xy})$; |
| 3) $z = \frac{2}{6 - x^2 - y^2}$; | 13) $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}}$; | 23) $z = e^{-x^2 + 3y^2}$; |
| 4) $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$; | 14) $z = 2y^2 - \frac{3x}{x^2 + 5y}$; | 24) $z = \frac{3-y}{5 + x^2 - y^3}$; |
| 5) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$; | 15) $z = \frac{2y}{3 + 2x^2 - e^y}$; | 25) $y = \cos \frac{y^2 - x}{y + x^2}$; |
| 6) $z = \sqrt{y^2 - x^2 + xy}$; | 16) $y = \sin \frac{x^2 - y}{x + y^2}$; | 26) $z = \operatorname{arcctg}(xy^2 + y)$; |
| 7) $z = \arccos(2x^3 + 3y^2)$; | 17) $z = e^{xy} + \sqrt{y^2 + x}$; | 27) $z = x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{x} + 5y}$; |
| 8) $z = 3x + \frac{y}{2 - x + y}$; | 18) $z = \ln(3x^2 - y^4)$; | 28) $z = \operatorname{tg} \frac{2x - y^2}{x}$; |
| 9) $z = \arcsin \frac{x+2}{y^2 + 1}$; | 19) $z = \operatorname{arcctg} \frac{x^3 + 3y}{y + x}$; | 29) $z = e^{-x^2 + \ln(xy)}$; |
| 10) $z = e^{\sqrt{x+3y-7}}$; | 20) $z = \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{x}{x-y}}$; | 30) $z = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2x-5y}}$. |

Пример 4.1

Найти частные производные первого порядка функции $z = e^{x+y^2} + e^{x^2+y}$.

Решение

При дифференцировании функции $z = z(x, y)$ по переменной x считаем постоянной величину y . Таким образом, в соответствии с формулами дифференцирования находим

$$z'_x = e^{x+y^2} \cdot 1 + e^{x^2+y} \cdot 2x = e^{x+y^2} + 2xe^{x^2+y}.$$

При дифференцировании функции $z = z(x, y)$ по переменной y считаем постоянной величину x

$$z'_y = e^{x+y^2} \cdot 2y + e^{x^2+y} \cdot 1 = 2ye^{x+y^2} + e^{x^2+y}.$$

Ответ: $z'_x = e^{x+y^2} + 2xe^{x^2+y};$

$$z'_y = 2ye^{x+y^2} + e^{x^2+y}$$

Задача 4.2. Найти полный дифференциал функции трех переменных $f = f(x, y, z)$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $f = \operatorname{arctg} zx + z^2 + \sqrt{xy};$

2) $f = 2x^3yz - 4xy^5z^2;$

3) $f = \frac{x \ln z + z \ln y}{2x + 3y + z};$

4) $f = 7x^3yz^3 - \sqrt{zxy};$

5) $f = \arcsin(2x + y + zxy);$

6) $f = \ln(3x^2 - 2y^2 + 6z^4);$

7) $f = e^{3y^2 - 2x^3 + 6z^5};$

8) $f = \operatorname{tg} \frac{x^2 + z}{z - y^2};$

9) $f = z^2x^3y^4 - 3x^2y + z;$

10) $f = \operatorname{ctg} \frac{2y^3x + z^4}{z - 1};$

11) $f = xzy^2 + 2yx^2;$

12) $f = \arcsin \frac{xz + 3zy}{z^3};$

13) $f = 2x^2y^2z^2 + x^3 - y^3 + z^3;$

14) $f = \sqrt{3x^2 - y^2} + z;$

15) $f = \arccos(x + 2y + 2z^2xy);$

16) $f = \ln \frac{xyz + x^2}{y^2 + xyz};$

17) $f = \cos(2zx + z^2e^{xy});$

18) $f = z^3 + x^3 + y^3 + 3xyz;$

19) $f = 7z^2x - x^3y^2 + z^3y^4;$

20) $f = zy + \ln(6zx - 3y - 5z)^4;$

21) $f = \operatorname{arcctg} e^{-xzy} + xyz;$

22) $f = 5xz^3y^4 + 2x^2y^7 + z^2;$

23) $f = \sin(3xzy - e^{xyz});$

24) $f = \frac{x \sin y + y \sin x + z + \sin z}{xyz};$

25) $f = \ln(2zx + e^{zxy}) + 3y^2z^2;$

26) $f = \operatorname{arcctg}(zx - \sqrt{zy});$

27) $f = \operatorname{arctg}(z \cdot 2^{xy} + (zxy)^2);$

28) $f = ze^{y^2 - 2x} + x^2 - 2zy;$

29) $f = xyze^{3y - 2x + z};$

30) $f = \frac{z \cos y + y \cos z}{x + y}.$

Пример 4.2

Найти полный дифференциал функции трех переменных

$$f = \arcsin(e^{xyz} + (xyz)^3).$$

Решение

Полным дифференциалом функции многих переменных называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения независимых переменных, т.е.

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz, \quad (4.1)$$

где f'_x , f'_y и f'_z частные производные функции $f = f(x, y, z)$ первого порядка.

Вычислим f'_x , f'_y и f'_z

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{e^{xyz} \cdot yz + 3(xyz)^2 yz}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}} = \frac{yz \cdot e^{xyz} + 3x^2(yz)^3}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}}, \\ f'_y &= \frac{e^{xyz} \cdot xz + 3(xyz)^2 xz}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}} = \frac{xz \cdot e^{xyz} + 3y^2(xz)^3}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}}, \\ f'_z &= \frac{e^{xyz} \cdot xy + 3(xyz)^2 xy}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}} = \frac{xy \cdot e^{xyz} + 3z^2(xy)^3}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}}. \end{aligned}$$

Запишем полный дифференциал функции $f = f(x, y, z)$, подставив найденные частные производные в формулу (4.1)

$$df = \frac{yz \cdot e^{xyz} + 3x^2(yz)^3}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}} dx + \frac{xz \cdot e^{xyz} + 3y^2(xz)^3}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}} dy + \frac{xy \cdot e^{xyz} + 3z^2(xy)^3}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}} dz.$$

Ответ:

$$df = \frac{yz \cdot e^{xyz} + 3x^2(yz)^3}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}} dx + \frac{xz \cdot e^{xyz} + 3y^2(xz)^3}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}} dy + \frac{xy \cdot e^{xyz} + 3z^2(xy)^3}{\sqrt{1 - (e^{xyz} + (xyz)^3)^2}} dz.$$

Задача 4.3. Вычислить значения частных производных функции $z = z(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, $M_0(2; 1; 1)$;
- 2) $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, $M_0(-1; 0; 1)$;
- 3) $3x - 2y + z = xz + 5$, $M_0(2; 2; -1)$;

- 4) $e^z + x + 2y + z = 4$, $M_0(1;1;0)$;
- 5) $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$, $M_0(1;1;-1)$;
- 6) $z^3 + 3xyz + 3y = 7$, $M_0(1;1;1)$;
- 7) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$;
- 8) $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1$, $M_0\left(0; \frac{\pi}{2}; 1\right)$;
- 9) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, $M_0(1;2;1)$;
- 10) $xy = z^2 - 1$, $M_0(0;1;-1)$;
- 11) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$, $M_0(1;1;1)$;
- 12) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$, $M_0(0;2;1)$;
- 13) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \frac{\pi}{2}$, $M_0\left(0; \frac{\pi}{2}; \pi\right)$;
- 14) $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$, $M_0(2;1;2)$;
- 15) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$, $M_0(1;1;1)$;
- 16) $x + y + z + 2 = xyz$, $M_0(2;-1;-1)$;
- 17) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$, $M_0(0;1;-1)$;
- 18) $e^z - xyz - x + 1 = 0$, $M_0(2;1;0)$;
- 19) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$, $M_0(1;-1;2)$;
- 20) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$, $M_0(0;-2;2)$;
- 21) $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$, $M_0(1;2;0)$;
- 22) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0$, $M_0(1;-1;1)$;
- 23) $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$, $M_0(0;1;-1)$;
- 24) $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3$, $M_0(4;3;1)$;
- 25) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59$, $M_0(3;1;4)$;
- 26) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17$, $M_0(-2;-1;2)$;
- 27) $x^3 + 3xyz - z^3 = 27$, $M_0(3;1;3)$;
- 28) $\ln z = x + 2y - z + \ln 3$, $M_0(1;1;3)$;
- 29) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0$, $M_0(2;1;1)$;
- 30) $z^2 = xy - z + x^2 - 4$, $M_0(2;1;1)$.

Пример 4.3

Вычислить значения частных производных функции

$$x \sin y + y \sin z + z \sin x = \pi,$$

заданной неявно, в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 0\right)$.

Решение

Если уравнение вида $F(x, y, z) = 0$ задает функцию двух переменных $z(x, y)$ в неявном виде и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то

$$z'_x = \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (4.2)$$

Представим заданную функцию в виде $F(x, y, z) = 0$

$$x \sin y + y \sin z + z \sin x - \pi = 0,$$

тогда

$$F(x, y, z) = x \sin y + y \sin z + z \sin x - \pi.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$

$$F'_x = (x \sin y + y \sin z + z \sin x - \pi)'_x = \sin y + z \cos x,$$

$$F'_y = (x \sin y + y \sin z + z \sin x - \pi)'_y = x \cos y + \sin z,$$

$$F'_z = (x \sin y + y \sin z + z \sin x - \pi)'_z = y \cos z + \sin x.$$

Подставив найденные производные в формулы (4.2), получим

$$z'_x = \frac{\sin y + z \cos x}{y \cos z + \sin x}, \quad z'_y = -\frac{x \cos y + \sin z}{y \cos z + \sin x}.$$

Следовательно, частные производные в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 0\right)$ будут равны

$$z'_x\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 0\right) = \frac{\sin \frac{3\pi}{2} + 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2} \cdot \cos 0 + \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$z'_y\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 0\right) = -\frac{\frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \sin 0}{\frac{3\pi}{2} \cdot \cos 0 + \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Ответ: $z'_x\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 0\right) = -1, \quad z'_y\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 0\right) = 0.$

Задача 4.4. Найти частные производные второго порядка функции $z = z(x, y)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $z = e^{y^2-2x} + x^2 - 2y$; | 11) $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$; | 21) $z = \sin(3xy - 5)$; |
| 2) $z = xy^4 - 3x^2y + 1$; | 12) $z = \frac{xy + x^2}{y^2 + xy}$; | 22) $z = x \sin y + y \sin x$; |
| 3) $z = e^{3y^2-2x^3+4}$; | | 23) $z = \ln(2x + 3y) + 3y^2$; |
| 4) $z = xy^2 + 2yx^2$; | 13) $z = \operatorname{arctg}(-xy) + e^y$; | 24) $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$; |
| 5) $z = \sqrt{3x^2 - y^2} + x$; | 14) $z = 7x - x^3y^2 + y^4$; | 25) $z = y + (6x - 3y - 5)^4$; |
| 6) $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$; | 15) $z = \arcsin(2x + y)$; | 26) $z = xy - e^{3y-2x+4}$; |
| 7) $z = xy + y + \operatorname{ctg}(xy)$; | 16) $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$; | 27) $z = 2^{xy} + (xy)^2$; |
| 8) $z = \frac{x^2 + y}{x - y^2}$; | 17) $z = \arccos(x - 2y)$; | 28) $z = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{y})$; |
| 9) $z = x \cos y - y \cos x$; | 18) $z = \arcsin(x + 3y)$; | 29) $z = 2x^3y - 4xy^5$; |
| 10) $z = \operatorname{arctg} x + \sqrt{y}$; | 19) $z = 2x + e^{xy} + \cos xy$; | 30) $z = \frac{2y^3x + 1}{x - 1}$. |
| | 20) $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$; | |

Пример 4.4

Найти частные производные второго порядка функции $z = \ln(2x - y) + 2x^3$. Убедиться в том, что равны их смешанные производные.

Решение

Частные производные первого порядка заданной функции имеют вид

$$z'_x = (\ln(2x - y) + 2x^3)'_x = \frac{2}{2x - y} + 6x^2,$$

$$z'_y = (\ln(2x - y) + 2x^3)'_y = \frac{-1}{2x - y} = -\frac{1}{2x - y}.$$

Частные производные второго порядка найдем как частные производные первого порядка от z'_x и z'_y , считая последние новыми функциями

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (2(2x - y)^{-1} + 6x^2)'_x = 2 \cdot (-1)(2x - y)^{-2} \cdot 2 + 12x = \\ &= -\frac{4}{(2x - y)^2} + 12x, \end{aligned}$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (-(2x - y)^{-1})'_y = -(-1)(2x - y)^{-2} \cdot (-1) = -\frac{1}{(2x - y)^2},$$

найдем смешанные производные

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (2(2x-y)^{-1} + 6x^2)'_y = 2 \cdot (-1)(2x-y)^{-2} \cdot (-1) = \frac{2}{(2x-y)^2},$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (-(2x-y)^{-1})'_x = -(-1)(2x-y)^{-2} \cdot 2 = \frac{2}{(2x-y)^2}.$$

$$\text{Ответ: } z''_{xx} = -\frac{4}{(2x-y)^2} + 12x, \quad z''_{yy} = -\frac{1}{(2x-y)^2}, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{2}{(2x-y)^2}.$$

Задача 4.5. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $f(x, y)$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$; | 16) $f(x, y) = (y-2x+5) \cdot e^{x^2-y}$; |
| 2) $f(x, y) = (x-y+1)^2$; | 17) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4 \ln x - 10 \ln y$; |
| 3) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$; | 18) $f(x, y) = (5x+7y-25) \cdot e^{-(x^2+xy+y^2)}$; |
| 4) $f(x, y) = x^2 y^2 (6-x-y)$; | 19) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$; |
| 5) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$; | 20) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$; |
| 6) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{x^2+y^2}$; | 21) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$; |
| 7) $f(x, y) = y^2 + (x-1)^2$; | 22) $f(x, y) = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$; |
| 8) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y$; | 23) $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \sin y$; |
| 9) $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$; | 24) $f(x, y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$; |
| 10) $f(x, y) = xy \sqrt{1-x-y}$; | 25) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; |
| 11) $f(x, y) = \frac{x-y+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$; | 26) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad x > 0, y > 0$; |
| 12) $f(x, y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$; | 27) $f(x, y) = (8x^2 + 3y^2 - 6xy) \cdot e^{2x+3y}$; |
| 13) $f(x, y) = \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$; | 28) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$; |
| 14) $f(x, y) = x^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$; | 29) $f(x, y) = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$; |
| 15) $f(x, y) = xy^2(1-x-y)$; | 30) $f(x, y) = \frac{2x+3y+1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. |

Пример 4.5

Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

Решение

Исследование функции на экстремум проведем по следующей схеме:

1. Находим частные производные заданной функции

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 6y - 39, \quad f'_y(x, y) = 2y - 6x + 18.$$

2. Находим критические точки функции из системы

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Решая систему (4.3)

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y - 39 = 0, \\ 2y - 6x + 18 = 0, \end{cases}$$

получаем

$$x_1 = 1, \quad y_1 = -6; \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 6,$$

т.е. функция имеет две критические точки

$$(1; -6) \text{ и } (5; 6).$$

3. Находим частные производные второго порядка заданной функции

$$f''_{xx}(x, y) = (3x^2 - 6y - 39)'_x = 6x,$$

$$f''_{yy}(x, y) = (2y - 6x + 18)'_y = 2,$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = (3x^2 - 6y - 39)'_y = -6.$$

Введем обозначения

$$A = f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad B = f''_{yy}(x, y) = 2, \quad C = f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -6.$$

4. Составим выражение

$$\Delta = AB - C^2. \quad (4.4)$$

По формуле (4.4) имеем

$$\Delta = 6x \cdot 2 - (-6)^2 = 12x - 36.$$

5. Находим значение Δ в каждой из выше найденных критических точек.

Если значение Δ в исследуемой точке отрицательно, то в данной точке нет экстремума, если значение Δ в исследуемой точке положительно, то точка является точкой экстремума (при $A < 0$ – точка максимума, при $A > 0$ – точка минимума), иначе вопрос о наличии экстремума остается открытым. Таким образом,

$$\Delta(1; -6) = 12 \cdot 1 - 36 = -24 < 0, \text{ т.е. в точке } (1; -6) \text{ экстремума нет;}$$

$\Delta(5; 6) = 12 \cdot 5 - 36 = 24 > 0$, т.е. в точке $(5; 6)$ функция имеет экстремум, определим значение A

$$A(5; 6) = 6 \cdot 5 = 30 > 0,$$

следовательно, $(5; 6)$ – точка минимума функции $f(x, y)$,

$$f_{\min} = f(5; 6) = 5^3 + 6^2 - 6 \cdot 5 \cdot 6 - 39 \cdot 5 + 18 \cdot 6 + 20 = -86.$$

Ответ: $f_{\min} = f(5; 6) = -86$.

Задача 4.6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = z(x, y)$ в области D , ограниченной заданными линиями.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $z = 3x + y - xy$, $D: y = x, y = 4, x = 0$;
- 2) $z = xy - x - 2y$, $D: x = 3, y = x, y = 0$;
- 3) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$;
- 4) $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$;
- 5) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$;
- 6) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$;
- 7) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$;
- 8) $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$;
- 9) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$;
- 10) $z = x^2 + 2xy - 10$, $D: y = 0, y = x^2 - 4$;
- 11) $z = xy - 2x - y$, $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$;
- 12) $z = 0,5x^2 - xy$, $D: y = 8, y = 2x^2$;
- 13) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$;
- 14) $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$;
- 15) $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$;
- 16) $z = 2x^2 + 2xy - 0,5y^2 - 4x$, $D: y = 2x, y = 2, x = 0$;
- 17) $z = x^2 - 2xy + 2,5y^2 - 2x$, $D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$;
- 18) $z = xy - 3x - 2y$, $D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$;
- 19) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$, $D: x = 2, y = 0, y = x + 2$;
- 20) $z = x^2y(4 - x - y)$, $D: x = 0, y = 0, y = 6 - x$;
- 21) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$;
- 22) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $D: x + 2y = 4, x - 2y = 4$;
- 23) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x = 3, y = 0, y = x + 1$;
- 24) $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$;
- 25) $z = x^2 + xy - 2$, $D: y = 0, y = 4x^2 - 4$;
- 26) $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$;
- 27) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $D: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$;
- 28) $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$, $D: x = 0, y = 0, y + x + 2 = 0$;
- 29) $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $D: x = 0, y = 0, y + x = 6$;
- 30) $z = -x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y$, $D: x = -2, y = 0, y = -x$.

Пример 4.6

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ в области $D: y = 0, y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$.

Решение

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции в заданной области по следующей схеме:

1. Построим область D (рис. 4).
2. Найдем критические точки заданной функции.

Частные производные функции $z = z(x, y)$ имеют вид

$$z'_x = 4x, \quad z'_y = 6y,$$

тогда решением системы (3.3)

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Точка $(0; 0)$ – критическая точка функции.

3. Если критические точки лежат в области D , то находим значение функции $z(x, y)$ в этих точках.

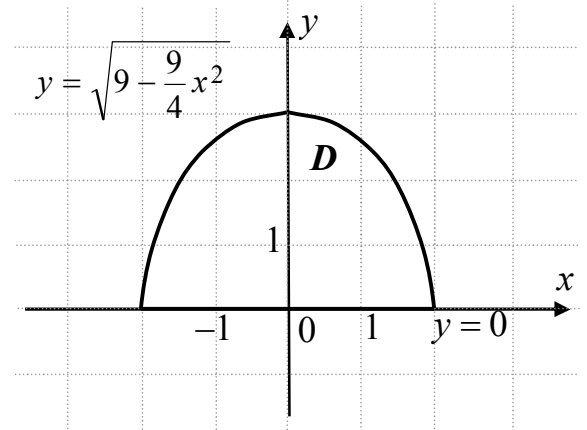


Рис. 4

$$(0; 0) \in D,$$

$$z(0; 0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^2 + 1 = 1.$$

4. Исследуем функцию на границе заданной области.

а) Если $y = 0$, то исходная функция принимает вид

$$z(x; 0) = 2x^2 + 1, \text{ где } -2 \leq x \leq 2.$$

Таким образом, необходимо найти критические точки функции одной переменной $z(x) = 2x^2 + 1$ при $-2 \leq x \leq 2$

$$z'_x = 4x, \quad z'_x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Найденная точка удовлетворяет условию $-2 \leq x \leq 2$, найдем значение $z(x)$ в этой точке

$$z(0) = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1.$$

и на концах отрезка

$$z(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9, \quad z(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 1 = 9.$$

б) Если $y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$, то исходная функция принимает вид

$$z\left(x; \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}\right) = 2x^2 + 3\sqrt{\left(9 - \frac{9}{4}x^2\right)^2} + 1 = 2x^2 + 27 - \frac{27}{4}x^2 + 1 =$$

$$= -\frac{19}{4}x^2 + 28, \text{ где } -2 \leq x \leq 2.$$

Следовательно, необходимо найти критические точки функции одной переменной $z(x) = -\frac{19}{4}x^2 + 28$ при $-2 \leq x \leq 2$

$$z'_x = -\frac{19}{2}x, \quad z'_x = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ при этом } y = \sqrt{9 - \frac{9}{4} \cdot 0^2} = 3.$$

Найденная точка удовлетворяет условию $-2 \leq x \leq 2$, найдем значение $z(x)$ в этой точке

$$z(0) = -\frac{19}{4} \cdot 0^2 + 28 = 28.$$

5. Из всех найденных значений функции z нужно выбрать наибольшее и наименьшее.

Из полученных значений

$$z(0; 0) = 1, \quad z(2; 0) = z(-2; 0) = 9, \quad z(0; 3) = 28,$$

следует

$$z_{\text{наиб}}^D = z(0; 3) = 28, \quad z_{\text{наим}}^D = z(0; 0) = 1.$$

$$\text{Ответ: } z_{\text{наиб}}^D = z(0; 3) = 28, \quad z_{\text{наим}}^D = z(0; 0) = 1.$$

Задача 4.7. Найти значения величин используемых ресурсов $(x; y)$, при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция $K(x, y)$ (в денежном выражении) и стоимость p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурса.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $K(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, $p_1 = 4$, $p_2 = \frac{1}{48}$;
- 2) $K(x, y) = 10\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}$, $p_1 = 2$, $p_2 = \frac{2}{3}$;
- 3) $K(x, y) = 10\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, $p_1 = 2$, $p_2 = 4$;
- 4) $K(x, y) = 24\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}$, $p_1 = 27$, $p_2 = 4$;
- 5) $K(x, y) = 18\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}$, $p_1 = 4$, $p_2 = 2$;
- 6) $K(x, y) = 20\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{y}$, $p_1 = 8$, $p_2 = 3$;
- 7) $K(x, y) = 10\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y}$, $p_1 = 2$, $p_2 = 8$;

- 8) $K(x, y) = 18\sqrt{x}\sqrt[3]{y}, \quad p_1 = \frac{1}{48}, \quad p_2 = 2;$
- 9) $K(x, y) = 20\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1;$
- 10) $K(x, y) = 10\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{y}, \quad p_1 = \frac{4}{3}, \quad p_2 = 2;$
- 11) $K(x, y) = 18\sqrt{x}\sqrt[3]{y}, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 4;$
- 12) $K(x, y) = 24\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}, \quad p_1 = 6, \quad p_2 = 4;$
- 13) $K(x, y) = 30\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{y}, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 6;$
- 14) $K(x, y) = 40\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y}, \quad p_1 = 6, \quad p_2 = 8;$
- 15) $K(x, y) = 15\sqrt[3]{x}\sqrt{y}, \quad p_1 = \frac{1}{24}, \quad p_2 = 4;$
- 16) $K(x, y) = 12\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}, \quad p_1 = 4, \quad p_2 = \frac{1}{3};$
- 17) $K(x, y) = 18\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}, \quad p_1 = 8, \quad p_2 = 4;$
- 18) $K(x, y) = 10\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y}, \quad p_1 = 4, \quad p_2 = 2;$
- 19) $K(x, y) = 20\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{y}, \quad p_1 = \frac{2}{3}, \quad p_2 = 2;$
- 20) $K(x, y) = 12\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 6;$
- 21) $K(x, y) = 6\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2;$
- 22) $K(x, y) = 20\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{4}{3};$
- 23) $K(x, y) = 30\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y}, \quad p_1 = 16, \quad p_2 = 8;$
- 24) $K(x, y) = 12\sqrt[3]{x}\sqrt{y}, \quad p_1 = \frac{1}{12}, \quad p_2 = 2;$
- 25) $K(x, y) = 20\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y}, \quad p_1 = 8, \quad p_2 = 2;$
- 26) $K(x, y) = 10\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{y}, \quad p_1 = 27, \quad p_2 = 4;$
- 27) $K(x, y) = 18\sqrt[3]{x}\sqrt{y}, \quad p_1 = \frac{1}{16}, \quad p_2 = 2;$
- 28) $K(x, y) = 16\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = \frac{4}{3};$
- 29) $K(x, y) = 24\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y}, \quad p_1 = 4, \quad p_2 = 27;$
- 30) $K(x, y) = 30\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{y}, \quad p_1 = 8, \quad p_2 = 1.$

Пример 4.7

Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, где x – количество единиц первого ресурса, y – второго. Стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго – 10 ден. ед. Найти максимальную прибыль при использовании ресурсов.

Решение

Производственная функция в денежном выражении равна доходу от использования ресурсов. Издержки при этом составляют

$$C(x, y) = 5x + 10y.$$

Таким образом, функция прибыли, максимальное значение которой необходимо найти, равна

$$P(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y.$$

Частные производные функции $P(x, y)$ равны

$$P'_x(x, y) = \frac{15\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}} - 5, \quad P'_y(x, y) = \frac{10\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}} - 10,$$

тогда, найдя решение системы (4.3), получим

$$x = 81, \quad y = 27.$$

Частные производные второго порядка функции $P(x, y)$ имеют вид

$$P''_{xx}(x, y) = -\frac{15\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x^3}}, \quad P''_{yy}(x, y) = -\frac{20\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y^5}}, \quad P''_{xy}(x, y) = P''_{yx}(x, y) = \frac{5}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}}.$$

По формуле (4.4) найдем Δ

$$\Delta = -\frac{15\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x^3}} \cdot -\frac{20\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y^5}} - \left(\frac{5}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}} \right)^2 = \frac{25}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y^4}}.$$

Заметим, что выражение $\Delta > 0$ для любых значений переменных x и y , отличных от нуля, следовательно,

$$\Delta(81; 27) > 0,$$

т.е. точка $(81; 27)$ является точкой экстремума функции $P(x, y)$.

$$P''_{xx}(81; 27) = -\frac{15\sqrt[3]{27}}{2\sqrt{81^3}} = -\frac{5}{162} < 0,$$

значит, что найденная критическая точка есть точка максимума, при этом

$$P_{\max} = P(81; 27) = 135 \text{ ден. ед.}$$

Ответ: максимальная прибыль при использовании ресурсов составляет 135 ден. ед.

Задача 4.8. Задана функция спроса $Q = f(p, p_A, r)$, где p – цена товара, p_A – цена альтернативного товара, r – доходы потребителей. Найти эластичность спроса от цены; перекрестный коэффициент эластичности и определить являются ли товары взаимозаменяемые или взаимодополняющие; эластичность спроса от доходов и определить является ли товар качественным при $p = p_0$, $p_A = p_1$, $r = r_0$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $f(p, p_A, r) = 100 - 2p - p_A + 0,2r$, $p_0 = 12$, $p_1 = 11$, $r_0 = 1500$;
- 2) $f(p, p_A, r) = 300 - p - 2p_A - 0,1r$, $p_0 = 17$, $p_1 = 15$, $r_0 = 1800$;
- 3) $f(p, p_A, r) = 150 - 4p + 3p_A + 0,2r$, $p_0 = 15$, $p_1 = 12$, $r_0 = 1000$;
- 4) $f(p, p_A, r) = 150 - 3p + 4p_A + 0,1r$, $p_0 = 13$, $p_1 = 10$, $r_0 = 1200$;
- 5) $f(p, p_A, r) = 200 - 4p - p_A + 0,3r$, $p_0 = 18$, $p_1 = 16$, $r_0 = 1400$;
- 6) $f(p, p_A, r) = 150 - 4p + 3p_A - 0,1r$, $p_0 = 8$, $p_1 = 12$, $r_0 = 1100$;
- 7) $f(p, p_A, r) = 200 - 2p - 3p_A + 0,4r$, $p_0 = 15$, $p_1 = 13$, $r_0 = 900$;
- 8) $f(p, p_A, r) = 250 - 3p - 4p_A - 0,1r$, $p_0 = 7$, $p_1 = 9$, $r_0 = 1000$;
- 9) $f(p, p_A, r) = 250 - 4p - 3p_A + 0,3r$, $p_0 = 9$, $p_1 = 8$, $r_0 = 1100$;
- 10) $f(p, p_A, r) = 300 - 4p - 5p_A + 0,4r$, $p_0 = 8$, $p_1 = 7$, $r_0 = 1200$;
- 11) $f(p, p_A, r) = 400 - p + 2p_A - 0,3r$, $p_0 = 15$, $p_1 = 17$, $r_0 = 900$;
- 12) $f(p, p_A, r) = 150 - p + 4p_A + 0,2r$, $p_0 = 13$, $p_1 = 11$, $r_0 = 1500$;
- 13) $f(p, p_A, r) = 300 - 3p + 4p_A - 0,3r$, $p_0 = 16$, $p_1 = 20$, $r_0 = 700$;
- 14) $f(p, p_A, r) = 50 - p - p_A + 0,2r$, $p_0 = 10$, $p_1 = 13$, $r_0 = 1000$;
- 15) $f(p, p_A, r) = 300 - 4p - 5p_A + 0,3r$, $p_0 = 11$, $p_1 = 13$, $r_0 = 1300$;
- 16) $f(p, p_A, r) = 250 - 2p - p_A - 0,1r$, $p_0 = 10$, $p_1 = 8$, $r_0 = 1500$;
- 17) $f(p, p_A, r) = 150 - 3p + 2p_A + 0,3r$, $p_0 = 20$, $p_1 = 18$, $r_0 = 1000$;
- 18) $f(p, p_A, r) = 300 - 4p + 5p_A - 0,2r$, $p_0 = 9$, $p_1 = 11$, $r_0 = 1000$;
- 19) $f(p, p_A, r) = 100 - p - 2p_A + 0,1r$, $p_0 = 12$, $p_1 = 15$, $r_0 = 1000$;
- 20) $f(p, p_A, r) = 200 - 2p + 3p_A + 0,1r$, $p_0 = 13$, $p_1 = 15$, $r_0 = 1300$;
- 21) $f(p, p_A, r) = 300 - 3p - 2p_A - 0,2r$, $p_0 = 9$, $p_1 = 10$, $r_0 = 1100$;
- 22) $f(p, p_A, r) = 200 - 3p + p_A + 0,1r$, $p_0 = 12$, $p_1 = 10$, $r_0 = 1200$;
- 23) $f(p, p_A, r) = 300 - p + 2p_A + 0,3r$, $p_0 = 15$, $p_1 = 12$, $r_0 = 1100$;
- 24) $f(p, p_A, r) = 250 - 4p + p_A + 0,4r$, $p_0 = 15$, $p_1 = 17$, $r_0 = 1500$;
- 25) $f(p, p_A, r) = 200 - 3p - p_A + 0,1r$, $p_0 = 15$, $p_1 = 12$, $r_0 = 1200$;
- 26) $f(p, p_A, r) = 300 - 4p + 2p_A - 0,2r$, $p_0 = 15$, $p_1 = 17$, $r_0 = 800$;

- 27) $f(p, p_A, r) = 200 - p + p_A + 0,1r$, $p_0 = 7$, $p_1 = 9$, $r_0 = 800$;
 28) $f(p, p_A, r) = 200 - 3p - 2p_A + 0,3r$, $p_0 = 10$, $p_1 = 11$, $r_0 = 1000$;
 29) $f(p, p_A, r) = 200 - 3p + p_A - 0,1r$, $p_0 = 13$, $p_1 = 12$, $r_0 = 900$;
 30) $f(p, p_A, r) = 200 - 3p - 4p_A + 0,2r$, $p_0 = 13$, $p_1 = 15$, $r_0 = 1100$.

Пример 4.8

Задана функция спроса $Q = f(p, p_A, r) = 100 - 2p + p_A + 0,1r$, где p – цена товара, p_A – цена альтернативного товара, r – доходы потребителей. Найти эластичность спроса от цены; перекрестный коэффициент эластичности и определить являются товары взаимозаменяемые или взаимодополняющие; эластичность спроса от доходов и определить является ли товар качественным при $p = 10$, $p_A = 12$, $r = 1000$.

Решение

Эластичность спроса от собственной цены вычисляется по формуле

$$E_p = -\frac{p}{Q} \cdot Q'_p \quad (4.5)$$

и показывает приблизительно уменьшение спроса при увеличении цены на 1%.

Перекрестный коэффициент эластичности равен

$$E_A = \frac{p_A}{Q} \cdot Q'_{p_A} \quad (4.6)$$

и определяет приблизительно, как изменится спрос на товар при изменении цены альтернативного товара на 1%.

Эластичность спроса от доходов потребителей определяется по формуле

$$E_r = \frac{r}{Q} \cdot Q'_r \quad (4.7)$$

и приблизительно показывает изменение спроса на товар при увеличении доходов потребителей на 1%.

Вычислим сначала величину спроса Q при указанных значениях

$$Q = f(10; 12; 1000) = 100 - 2 \cdot 10 + 12 + 0,1 \cdot 1000 = 192.$$

Далее вычисляем частную производную Q'_p и по формуле (4.5) находим эластичность спроса от цены

$$Q'_p = -2, \quad E_p = -\frac{p}{Q} \cdot (-2) = \frac{2p}{Q},$$

при заданных значениях переменных получаем

$$E_p = \frac{2 \cdot 10}{192} = 0,104.$$

Аналогично, вычисляя

$$Q'_{p_A} = 1,$$

находим перекрестный коэффициент эластичности

$$E_A = \frac{p_A}{Q} \cdot 1 = \frac{12}{192} = 0,062.$$

Значение E_A положительно, поэтому товары являются взаимозаменяемыми (при $E_A < 0$ – взаимодополняющими).

Теперь находим Q'_r

$$Q'_r = 0,1$$

и эластичность спроса от доходов

$$E_r = \frac{r}{Q} \cdot 0,1 = \frac{1000}{192} \cdot 0,1 = 0,52.$$

Поскольку $E_r > 0$, то с ростом доходов спрос будет увеличиваться, т.е. товар является качественным (если $E_r < 0$, то товар является низкосортным, с ростом доходов его потребление будет уменьшаться).

Ответ: эластичность спроса от цены составляет 0,104; перекрестный коэффициент эластичности равен 0,062, товары являются взаимозаменяемыми; эластичность спроса от доходов составляет 0,52, товар является качественным.

ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)

Факультет математики, механики и компьютерных наук

Кафедра _____

Семестровая работа № 2 (Часть _____) по дисциплине

«_____»

Выполнил(а): студент(ка) гр. _____
группа

ФИО

Вариант № _____

Проверил(а): _____
Должность

ФИО

Регистрационные данные:

Дата _____ Дата _____ Дата _____

Челябинск

20 _____

Результаты проверки семестровой работы студента(ки) гр. _____

Номер задачи	Проверка 1	Проверка 2	Проверка 3
Итог			
Дата			
Подпись преподавателя			