МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.И. Назарова, А.В. Келлер

МАТЕМАТИКА

Сборник контрольных заданий
Часть 1

Челябинск
2014

ВВЕДЕНИЕ

Расчетно-графическая работа (РГР) является одним из видов самостоятельной работы студентов, входит в учебный план дисциплины «Математика» как обязательный элемент учебной деятельности.

Данный сборник заданий включают подборку задач по темам, соответствующим дисциплине «Математика» первого семестра укрупненной группы направлений подготовки 38.00.00 – Экономика и управление, а именно «Элементы теории множеств», «Комплексные числа», «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», «Линейное программирование».

Для выполнения работы студент должен знать перечень заданий, которые необходимо выполнить, и номер своего варианта.

Набор заданий, которые будут включены в РГР студентов каждого из направлений подготовки, определяет преподаватель.

Номер варианта определяется порядковым номером студента в списке, представленном в журнале группы. Номер каждого задания состоит из двух частей: первое число определяет номер раздела, к которому относится задание, второе число – порядковый номер задания в данном разделе.

Работа выполняется в отдельной тетради (12–18 листов) в клеточку.

Обложка тетради оформляется в печатном виде в соответствии с образцом, представленном в приложении 1. В местах пропусков должны быть внесены соответствующие данные выполнившего работу студента и преподавателя, который будет проверять семестровое задание. Регистрационные данные вносятся секретарем кафедры при поступлении работы.

На последнюю страницу тетради (обложку) клеится лист проверки, представленный в приложении 2. На листе проверки необходимо указать данные студента, а также номера заданий, которые были включены в семестровую работу.

Требования при выполнении работы:

- условие каждой задачи вклеивается в тетрадь в печатном виде (или пишется от руки разборчивым почерком),
- приводится полное решение с необходимыми пояснениями, вычислениями и расчетами,
- после решения записывается ответ (если задание содержит несколько пунктов, то ответ необходимо записывать для каждого пункта решения),
- графические построения выполняются карандашом,
- текст решения всех задач должен быть в письменном виде,
- для отметок и замечаний преподавателя должны быть оставлены поля (3–4 см),
- решение задач должно быть представлено по порядку.

РГР сдается на кафедру до указанного преподавателем срока и регистрируется секретарем кафедры. Работа принимается на проверку только в том случае, если содержит все задания, которые были включены в РГР, и удовлетворяет требованиям к оформлению.

На проверку РГР преподавателю необходимо не менее 7 дней со дня сдачи работы.

Результаты проверки РГР преподаватель заносит в списки, находящиеся на кафедре, по мере проверки работ.

Если РГР содержит все задания, удовлетворяет предъявляемым требованиям к оформлению и выполнена без серьезных ошибок, то она считается допущенной к экзамену, иначе возвращается на доработку. Для чего РГР следует взять у преподавателя (или у секретаря кафедры) выполнить в течение 2–3 дней работу над ошибками в этой же тетради и сдать для повторной проверки на кафедру.

Рекомендуется выполнение заданий РГР по мере изучения соответствующих тем, поскольку это способствует более глубокому усвоению полученных знаний и своевременному формированию умений. Необходимо отметить, что правильное своевременное выполнение РГР является одним из основных параметров, определяющих успешность освоения предмета.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического моделирования

МАТЕМАТИКА

Сборник контрольных заданий
Часть 1

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2014

Одобрено
учебно-методической комиссией факультета
Математики, механики и компьютерных наук

Рецензент:

Математика: сборник контрольных заданий / составители Е.И. Назарова, А.В. Келлер. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – Ч. 1. – 120 с.

В сборник включены задачи по темам: «Элементы теории множеств», «Комплексные числа», «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Линейное программирование», а также задания, формирующие умения использовать методы математики для решения профессиональных задач. Сборник содержит образцы решения и оформления всех приведенных задач.

Целью сборника заданий является систематизация знаний студентов в соответствии с изучаемыми разделами дисциплины «Математика» первого семестра укрупненной группы направлений подготовки 38.00.00 – Экономика и управление; предназначен для самостоятельной работы студентов в течение семестра, а также при подготовке к экзамену (зачету).

© Издательский центр ЮУрГУ, 2014

Раздел I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Раздел включает в себя задачу на основные действия над множествами: пересечение, объединение и разность двух множеств.

При решении подобных задач рекомендуется повторить следующий теоретический материал: понятие множества, элементы множества, операции над множествами, диаграммы Эйлера-Венна, отраженный в учебных пособиях и сборниках задач Л.Н. Журбенко, М.С. Красса и Б.П. Чупрынова, В.И. Ермакова и В.А. Малугина. Перечисленные пособия включают и другие типы задач по теории множеств, которые можно рассмотреть при самостоятельной подготовки к занятиям.

Задача 1.1. Даны множества *A*, *B*, *C* и *D*. Найти а) $A \cup B$, $C \cup D$; б) $A \cap B$, $C \cap D$; в) $A \setminus B$, $C \setminus D$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $A = \{ 3; 2; 1; 5; 9 \}$, $B = \{ 5; 9; 7 \}$,
$C = \{ x | x \in (-3; 5) \}$, $D = \{ x | x \in [-2; 7) \}$;

2) $A = \{ 6; 9; 2; 3; 4 \}$, $B = \{ 1; 4; 6 \}$,
$C = \{ x | x \in (-\infty; 2) \}$, $D = \{ x | x \in (-4; 10) \}$;

3) $A = \{ 4; 5; 1; 3; 8 \}$, $B = \{ 4; 1; 5; 9 \}$,
$C = \{ x | x \in (2; +\infty) \}$, $D = \{ x | x \in [-3; 4) \}$;

4) $A = \{ 9; 4; 6; 8; 3 \}$, $B = \{ 1; 4; 9 \}$,
$C = \{ x | x \in (-\infty; 5] \}$, $D = \{ x | x \in [-5; 5) \}$;

5) $A = \{ 1; 9; 5; 6; 4 \}$, $B = \{ 5; 1; 3; 0 \}$,
$C = \{ x | x \in [3; +\infty) \}$, $D = \{ x | x \in (-\infty; 6] \}$;

6) $A = \{ 9; 8; 0; 6; 2 \}$, $B = \{ 8; 4; 2; 6 \}$,
$C = \{ x | x \in (-2; 6) \}$, $D = \{ x | x \in [-3; 10) \}$;

7) $A = \{ 8; 7; 0; 1; 5 \}$, $B = \{ 8; 4; 6 \}$,
$C = \{ x | x \in [-2; 4] \}$, $D = \{ x | x \in (3; 7) \}$;

8) $A = \{ 3; 1; 8; 6; 5 \}$, $B = \{ 3; 1; 2; 6 \}$,
$C = \{ x | x \in [-3; 6) \}$, $D = \{ x | x \in (-2; 6] \}$;

9) $A = \{ 7; 9; 5; 2; 4 \}$, $B = \{ 7; 9; 1; 4; 0 \}$,
$C = \{ x | x \in (-5; 7) \}$, $D = \{ x | x \in [0; 6) \}$;

10) $A = \{ 1; 8; 6; 3 \}$, $B = \{ 3; 2; 5; 7 \}$,
$C = \{ x | x \in (-\infty; 0) \}$, $D = \{ x | x \in (-7; 3) \}$;

11) $A=\{\ 4;3;2;6;10\ \}$, $\quad B=\{6;10;8\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in(2;8)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in[-3;4)\ \}$;

12) $A=\{\ 7;10;3;4;5\ \}$, $\quad B=\{2;5;7\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in(-5;+\infty)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in[-7;4)\ \}$;

13) $A=\{\ 5;6;2;4;9\ \}$, $\quad B=\{\ 5;2;6;10\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in[3;10)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in(-\infty;5]\ \}$;

14) $A=\{10;5;7;9;4\ \}$, $\quad B=\{\ 2;5;10\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in[-5;8)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in(-5;6]\ \}$;

15) $A=\{\ 2;10;6;7;5\ \}$, $\quad B=\{\ 6;2;4;1\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in[4;+\infty)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in(-3;6]\ \}$;

16) $A=\{10;9;1;7;3\ \}$, $\quad B=\{\ 9;5;3;7\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in(-2;8)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in[-3;9)\ \}$;

17) $A=\{\ 9;8;1;2;6\ \}$, $\quad B=\{\ 9;5;7\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in(-\infty;7]\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in[0;+\infty)\ \}$;

18) $A=\{\ 4;2;9;7;6\ \}$, $\quad B=\{\ 4;2;3;7\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in[-1;10)\}$, $\quad D=\{\ x|\,x\in(-10;1]\}$;

19) $A=\{\ 8;10;6;3;5\ \}$, $\quad B=\{\ 8;10;2;5;1\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in(-9;0)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in(-7;4)\ \}$;

20) $A=\{\ 2;9;7;4\ \}$, $\quad B=\{\ 4;3;6;8\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in(-4;+\infty)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in[-9;4)\ \}$;

21) $A=\{\ 2;1;0;4;8\ \}$, $\quad B=\{\ 4;8;6\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in(10;18)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in[0;14)\ \}$;

22) $A=\{\ 5;8;1;2;3\ \}$, $\quad B=\{\ 0;3;5\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in[-5;0)\ \}$, $\quad D=\{\ x|\,x\in(0;6]\ \}$;

23) $A=\{\ 3;4;0;2;7\ \}$, $\quad B=\{\ 3;0;4;8\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in(-\infty;-3]\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in[-7;10)\ \}$;

24) $A=\{\ 8;3;5;7;2\ \}$, $\quad B=\{\ 0;3;8\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in(0;6)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in[-1;9)\ \}$;

25) $A=\{\ 0;8;4;5;3\ \}$, $\quad B=\{\ 4;0;2;8\ \}$,
$C=\{\ x|\,x\in[-4;+\infty)\ \}$, $\quad D=\{x|\,x\in(13;16]\ \}$;

26) $A=\{\ 8;7;9;5;1\ \},\quad B=\{\ 7;3;1;5\ \},$
$C=\{\ x|\,x\in(-\infty;+\infty)\ \},\quad D=\{\,x|\,x\in[-5;10)\ \};$

27) $A=\{\ 7;6;3;0;4\ \},\quad B=\{\ 7;3;5\ \},$
$C=\{\ x|\,x\in[-7;7)\ \},\quad D=\{\,x|\,x\in(-5;7]\ \};$

28) $A=\{\ 2;0;7;5;4\ \},\quad B=\{\ 2;0;1;5\ \},$
$C=\{\ x|\,x\in[-1;+\infty)\ \},\quad D=\{\,x|\,x\in(-3;12]\ \};$

29) $A=\{\ 6;8;4;1;3\ \},\quad B=\{\ 6;8;0;3\ \},$
$C=\{\ x|\,x\in(-\infty;-7]\ \},\quad D=\{\,x|\,x\in[-4;+\infty)\ \};$

30) $A=\{\ 0;7;5;2\ \},\quad B=\{\ 2;1;4;6\ \},$
$C=\{\ x|\,x\in(0;6)\ \},\quad D=\{\,x|\,x\in[1;4)\ \}.$

Пример 1.1

Даны множества $A=\{\ 4;1;3;2;5;7\ \}$, $B=\{\ 4;8\ \}$, $C=\{\ x|\,x\in(-4;6]\ \}$ **и** $D=\{\,x|\,x\in[-3;+\infty)\ \}$**.**

Найти а) $A\cup B$**,** $C\cup D$**; б)** $A\cap B$**,** $C\cap D$**; в)** $A\setminus B$**,** $C\setminus D$**.**

Решение

а) По определению *объединением* двух множеств является множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств, следовательно,

$$A\cup B=\{\ 4;\ 1;\ 3;\ 2;\ 5;\ 7;\ 8\}.$$

На числовой прямой заштрихуем области, соответствующие множествам C и D (рис. 1), тогда

$$C\cup D=\{\,x|\,x\in(-4;+\infty)\ \}.$$

б) По определению *пересечением* двух множеств является множество, состоящее из элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств (для множеств C и D воспользуемся рис. 1), следовательно,

$$A\cap B=\{4\},\ C\cap D=\{\,x|\,x\in[-3;6]\ \}.$$

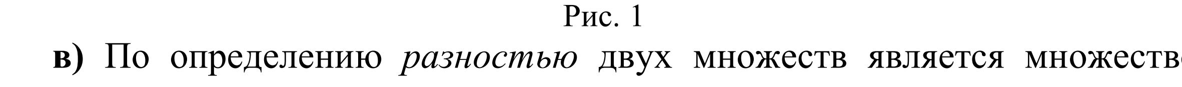


Рис. 1

в) По определению *разностью* двух множеств является множество, состоящее из элементов, которые принадлежат первому, но не принадлежат второму множеству, следовательно,

$$A\setminus B=\{\ 1;\ 3;\ 2;\ 5;\ 7\ \},\ C\setminus D=\{\,x|\,x\in(-4;-3)\ \}.$$

Ответ:

а) $A \cup B = \{\ 4;\ 1;\ 3;\ 2;\ 5;\ 7;\ 8\}$, $C \cup D = \{x | x \in (-4; +\infty)\}$;

б) $A \cap B = \{4\}$, $C \cap D = \{x | x \in [-3; 6]\}$;

в) $A \setminus B = \{\ 1;\ 3;\ 2;\ 5;\ 7\ \}$, $C \setminus D = \{x | x \in (-4; -3)\}$.

Раздел II. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В данном разделе представлены задачи, направленные на усвоение понятий комплексное число, модуль комплексного числа и его аргумент, комплексная плоскость. Также в раздел включены задачи на основные действия над комплексными числами (сложение, умножение, деление, извлечение корня, возведение в степень); различные формы записи комплексных чисел; решение уравнений на множестве комплексных чисел.

Общие сведения о комплексных числах и примеры решения задач приводятся в учебных пособиях Н.Ш. Кремера, В.И. Малыхина и А.П. Рябушко.

Задача 2.1. Даны комплексные числа z_1, z_2 и z_3. Необходимо

а) найти число $z = \dfrac{2{z_2}^2}{z_3 - z_1}$;

б) изобразить на комплексной плоскости данные комплексные числа, найти их модули и аргументы;

в) записать комплексное число z_1 в тригонометрической форме, z_2 в показательной форме.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 3+2i$, $z_3 = 5-2i$;

2) $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 5+2i$, $z_3 = 5+2i$;

3) $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 3-4i$, $z_3 = 7-2i$;

4) $z_1 = 4-3i$, $z_2 = 8+2i$, $z_3 = 2-5i$;

5) $z_1 = 3-5i$, $z_2 = 3-5i$, $z_3 = 4-2i$;

6) $z_1 = 2+i$, $z_2 = 7+2i$, $z_3 = 1-2i$;

7) $z_1 = 1-3i$, $z_2 = 6+i$, $z_3 = 9+2i$;

8) $z_1 = 1+4i$, $z_2 = 2+2i$, $z_3 = 6-i$;

9) $z_1 = 5+3i$, $z_2 = 3-2i$, $z_3 = 4+3i$;

10) $z_1 = 6-3i$, $z_2 = 2+5i$, $z_3 = 5-2i$;

11) $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 7+6i$, $z_3 = 6-7i$;

12) $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-3i$, $z_3 = 7+3i$;

13) $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 3-5i$, $z_3 = 2-5i$;

14) $z_1 = 1-3i$, $z_2 = 3+4i$, $z_3 = 7+2i$;

15) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = 4 - i$;
16) $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 4 + 3i$, $z_3 = 1 + 2i$;
17) $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 6 + 2i$, $z_3 = 3 - 3i$;
18) $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 2 - 5i$;
19) $z_1 = 3 - 3i$, $z_2 = 2 - 4i$, $z_3 = 7 - 3i$;
20) $z_1 = 3 + 7i$, $z_2 = 2 + 8i$, $z_3 = 1 - 4i$;
21) $z_1 = 4 + 4i$, $z_2 = 7 - 2i$, $z_3 = 1 - 3i$;
22) $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 5 - 2i$;
23) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 7 - 9i$, $z_3 = 1 + 2i$;
24) $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 6 - 2i$, $z_3 = 8 + 3i$;
25) $z_1 = 4 - 4i$, $z_2 = 7 + 2i$, $z_3 = 4 + 3i$;
26) $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = 2 - 2i$, $z_3 = 6 + 7i$;
27) $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 5 + 7i$, $z_3 = 8 - 9i$;
28) $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = 3 - 5i$, $z_3 = 9 - 2i$;
29) $z_1 = 8 + 3i$, $z_2 = 4 - 7i$, $z_3 = 3 - 7i$;
30) $z_1 = 7 + 2i$, $z_2 = 9 - 2i$, $z_3 = 1 - 5i$.

Пример 2.1

Даны комплексные числа, $z_1 = 1 - 3i$ $z_2 = 4 + i$ **и** $z_3 = 5$**. Необходимо**

а) найти число $z = \dfrac{2{z_2}^2}{z_3 - z_1}$**;**

б) изобразить на комплексной плоскости данные комплексные числа, найти их модули и аргументы;

в) записать комплексное число z_1 **в тригонометрической форме,** z_2 **в показательной форме.**

Решение

а) Для вычисления значения числа z подставим в заданное выражение значения z_1, z_2, z_3 и выполним соответствующие преобразования

$$z = \frac{2 \cdot (4+i)^2}{5 - (1-3i)} = \frac{2 \cdot \left(16 + 8i + i^2\right)}{4 + 3i} = \frac{2 \cdot (16 + 8i - 1)(4 - 3i)}{(4+3i)(4-3i)} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(60+32i-45i-24i^2\right)}{16-9i^2} = \frac{2\cdot(84-13i)}{25} = \frac{168}{25} - \frac{26}{25}i.$$

Ответ: $z = \frac{168}{25} - \frac{26}{25}i$.

б) Для изображения числа на комплексной плоскости необходимо построить точку с координатами $(x; y)$, где x и y соответственно равны действительной и мнимой частям заданного комплексного числа (рис. 2), тогда,

$z_1 = 1 - 3i$ соответствует точка $(1; -3)$;

$z_2 = 4 + i$ соответствует точка $(4; 1)$;

$z_3 = 5$ соответствует точка $(5; 0)$.

По определению, модуль комплексного числа

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (2.1)$$

где x и y соответственно действительная и мнимая части комплексного числа.

Найдем модули заданных чисел по формуле (2.1), для нахождения аргументов комплексных чисел воспользуемся рис. 2

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10};$$

$$\mathrm{Arg} z_1 = \alpha + 2\pi n, n \in Z,$$

где

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{-3}{1},\ \alpha = \mathrm{arctg}(-3),$$

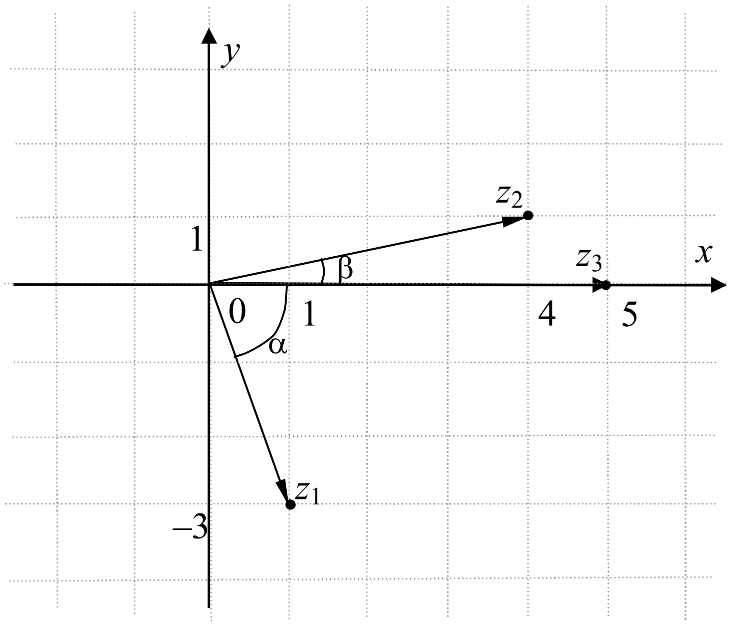


Рис. 2

таким образом,

$$\mathrm{Arg} z_1 = \mathrm{arctg}(-3) + 2\pi n, n \in Z.$$

$$|z_2| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17};$$

$$\mathrm{Arg} z_2 = \beta + 2\pi n, n \in Z,$$

где

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{4},\ \beta = \mathrm{arctg}\frac{1}{4},$$

таким образом,

$$\mathrm{Arg}z_2 = \mathrm{arctg}\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$|z_3| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 0} = 5;$$

поскольку z_3 лежит на оси Ox, то

$$\mathrm{Arg}z_3 = 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $|z_1| = \sqrt{10}$, $\mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{arctg}(-3) + 2\pi n, n \in Z$;

$|z_2| = \sqrt{17}$, $\mathrm{Arg}\, z_2 = \mathrm{arctg}\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z$;

$|z_3| = 5$, $\mathrm{Arg}z_3 = 2\pi n, n \in Z$.

в) Показательная форма записи комплексного числа z

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}; \tag{2.2}$$

тригонометрическая форма записи комплексного числа z

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{2.3}$$

где $|z|$ – модуль числа, $\varphi = \arg z$ – главное значение аргумента.

Из формул (2.2) и (2.3) следует, что для записи комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах необходимо найти их модуль и главные значения аргументов ($-\pi < \arg z \le \pi$). Поскольку эти значения мы уже находили в предыдущем пункте, то воспользуемся этими данными.

Таким образом,

$$z_1 = \sqrt{10}(\cos(\mathrm{arctg}(-3)) + i\sin(\mathrm{arctg}(-3))) =$$
$$= \sqrt{10}(\cos(\mathrm{arctg}3) - i\sin(\mathrm{arctg}3));$$

$$z_2 = \sqrt{17} \cdot e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{4} i}.$$

Ответ: $z_1 = \sqrt{10}(\cos(\mathrm{arctg}3) - i\sin(\mathrm{arctg}3))$; $z_2 = \sqrt{17} \cdot e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{4} i}$.

Задача 2.2. Найти все корни заданных уравнений и изобразить их на комплексной плоскости.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) а) $z^4 + 1 = 0$; б) $2z^2 + 3z + 5 = 0$;
2) а) $z^3 - 1 = 0$; б) $z^2 + 2z + 5 = 0$;
3) а) $z^2 + 1 + i = 0$; б) $z^2 + 3z + 4 = 0$;
4) а) $z^5 + 1 = 0$; б) $2z^2 - 2z + 5 = 0$;
5) а) $z^6 - 1 = 0$; б) $2z^2 + z + 5 = 0$;
6) а) $z^7 + 1 = 0$; б) $2z^2 + 3z + 2 = 0$;
7) а) $z^8 - 1 = 0$; б) $z^2 + z + 9 = 0$;
8) а) $z^6 + 1 + i = 0$; б) $z^2 + 2z + 6 = 0$;
9) а) $z^3 - 1 + \sqrt{3}i = 0$; б) $z^2 - z + 5 = 0$;

10) а) $z^5 - 1 - i = 0$; б) $z^2 + 3z + 5 = 0$;
11) а) $z^2 - 1 + i = 0$; б) $2z^2 - z + 5 = 0$;
12) а) $z^3 - 8 = 0$; б) $3z^2 + 3z + 5 = 0$;
13) а) $z^4 + 16 = 0$; б) $z^2 + 3z + 6 = 0$;
14) а) $z^4 - 1 = 0$; б) $z^2 + z + 5 = 0$;
15) а) $z^3 + 1 = 0$; б) $2z^2 - z + 3 = 0$;
16) а) $z^5 - 1 = 0$; б) $z^2 + z + 1 = 0$;
17) а) $z^6 + 1 = 0$; б) $z^2 + z + 2 = 0$;
18) а) $z^7 - 1 = 0$; б) $2z^2 + z + 1 = 0$;
19) а) $z^8 + 1 = 0$; б) $z^2 + 2z + 3 = 0$;
20) а) $z^3 + 8 = 0$; б) $3z^2 + 2z + 1 = 0$;
21) а) $z^4 - 16 = 0$; б) $2z^2 + z + 6 = 0$;
22) а) $z^3 - 1 + i = 0$; б) $z^2 + z + 7 = 0$;
23) а) $z^4 + 1 - i = 0$; б) $3z^2 + z + 3 = 0$;
24) а) $z^4 + 1 + \sqrt{3}i = 0$; б) $z^2 + 3z + 6 = 0$;
25) а) $z^5 - 1 - \sqrt{3}i = 0$; б) $z^2 + z + 4 = 0$;
26) а) $z^6 + 1 - \sqrt{3}i = 0$; б) $z^2 + 2z + 4 = 0$;
27) а) $z^3 - \sqrt{3} + i = 0$; б) $3z^2 + z + 1 = 0$;
28) а) $z^4 - \sqrt{3} - i = 0$; б) $z^2 + z + 7 = 0$;
29) а) $z^3 + \sqrt{3} + i = 0$; б) $6z^2 + 2z + 3 = 0$;
30) а) $z^3 + \sqrt{3} - i = 0$; б) $7z^2 + 2z + 4 = 0$.

Пример 2.2

Найти все корни уравнений а) $z^3 + 2 - 2i = 0$**; б)** $z^2 - z + 5 = 0$**.**

Решение

а) Выразим z из уравнения

$$z^3 + 2 - 2i = 0 \Rightarrow z^3 = -2 + 2i \Rightarrow z = \sqrt[3]{-2 + 2i}.$$

Все корни заданного уравнения являются значениями корня третей степени из комплексного числа $z_0 = -2 + 2i$. Воспользуемся формулой для вычисления корней степени n из комплексного числа z

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), 0 \le k \le (n-1), \qquad (2.4)$$

где $|z_0|$ – модуль числа, $\varphi = \arg z_0$ – главное значение аргумента, n – степень корня. Найдем все необходимые данные для формулы (2.4)

$$|z_0| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8},\ \arg z_0 = \frac{3\pi}{4},\ n = 3.$$

Подставив найденные значения в формулу (2.4), получим

$$\sqrt[3]{-2 + 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}\right), 0 \le k \le 2.$$

Последовательно подставляя вместо k значения 0, 1, 2, найдем три корня исходного уравнения:

$$z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{{}^{3\pi}\!/_{4} + 0}{3} + i\sin\frac{{}^{3\pi}\!/_{4} + 0}{3}\right) = \sqrt{\sqrt[3]{8}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i;$$

$$z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{{}^{3\pi}\!/_{4} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{{}^{3\pi}\!/_{4} + 2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

$$z_3 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{{}^{3\pi}\!/_{4} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{{}^{3\pi}\!/_{4} + 4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Изобразим найденные корни на комплексной плоскости (рис. 3):

Ответ:

$$z_1 = 1 + i;$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

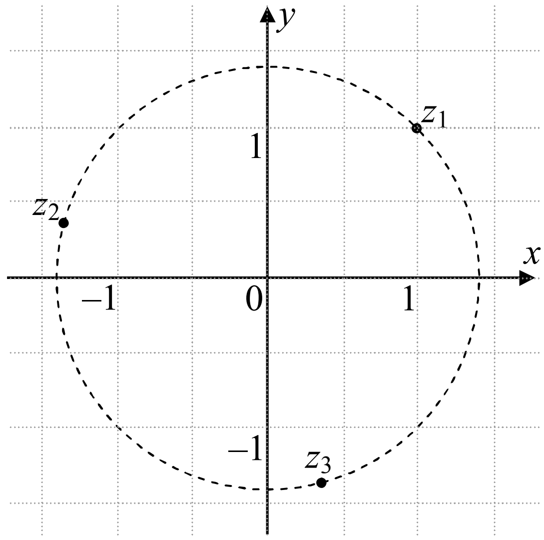


Рис. 3

б) $z^2 - z + 5 = 0$ –квадратное уравнение.

Найдем дискриминант

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -19.$$

Поскольку дискриминант отрицательный, то уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня.

Вычислим корень из дискриминанта:

$$\sqrt{D} = \sqrt{-19} = \sqrt{-1 \cdot 19} = \sqrt{i^2 \cdot 19} = \sqrt{19}\, i.$$

Найдем корни квадратного уравнения и изобразим их на комплексной плоскости (рис. 4):

$$z_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{19}\, i}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2} i;$$

$$z_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{19}\, i}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2} i.$$

Ответ: $z_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2} i$;

$z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2} i$.

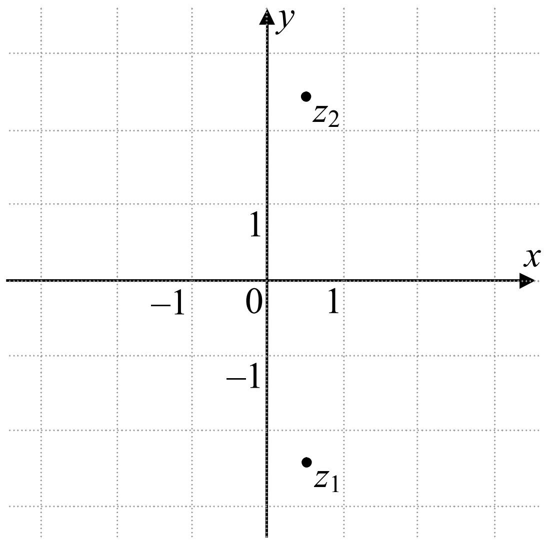


Рис. 4

Задача 2.3. Найти и построить на комплексной плоскости области, которым принадлежат точки $z = x + iy$, удовлетворяющие указанным условиям.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $|z-(3-5i)| < 4$;
2) $1 < |z-i| < 3$;
3) $\operatorname{Re} z > 1$;
4) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \le 2$;
5) $\operatorname{Im}(2iz) < 1$;
6) $0 < |z+i| < 2$;
7) $\operatorname{Re}(iz) + \operatorname{Im}(iz) > 1$;
8) $|z-(2-3i)| > 2$;
9) $0 < \operatorname{Re} \bar{z} + \operatorname{Im} \bar{z} < 2$;
10) $0 < \operatorname{Im} z < 2$;
11) $2 < |z-(1+i)| < 4$;
12) $1 < \operatorname{Re}(i\bar{z}) < 3$;
13) $|z-5i)| < 3$;
14) $\operatorname{Re}(2iz) > 1$;
15) $\operatorname{Im} z < 1$;
16) $1 < |z+1-i| < 4$;
17) $0 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2$;
18) $0 < \operatorname{Re} z < 3$;
19) $1 < \operatorname{Re}(iz) + \operatorname{Im}(iz) < 2$;
20) $|z+3i| > 5$;
21) $\operatorname{Re} z \le 2$;
22) $0 < \operatorname{Im}(3iz) < 2$;
23) $1 < \operatorname{Re}(iz) < 3$;
24) $0 < |z-1-i| < 5$;
25) $\operatorname{Im}(iz) \ge 2$;
26) $\operatorname{Re}(3iz) \le 1$;
27) $|z-1-i| > 4$;
28) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 2$;
29) $0 < \operatorname{Im}(2i\bar{z}) < 2$;
30) $\operatorname{Im} z \ge 1$.

Пример 2.3

Найти и построить на комплексной плоскости области, которым принадлежат точки $z = x + iy$, удовлетворяющие условию $2 \le \mathrm{Re}(z+1) \le 4$.

Решение

Преобразуем заданное неравенство

$$2 \le \mathrm{Re}(x+iy+1) \le 4,$$

$$2 \le \mathrm{Re}(x+1+iy) \le 4,$$

поскольку выражение $\mathrm{Re}(x+1+iy)$ определяет действительную часть числа, записанного в скобках, то можно перейти к следующему неравенству

$$2 \le x+1 \le 4,$$

откуда

$$1 \le x \le 3.$$

Таким образом, условие $2 \le \mathrm{Re}(z+1) \le 4$ определяет на комплексной плоскости область, множество точек $(x; y)$ которой, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} -\infty < y < +\infty, \\ 1 \le x \le 3. \end{cases}$$

На комплексной плоскости данная область представлена на рис. 5.

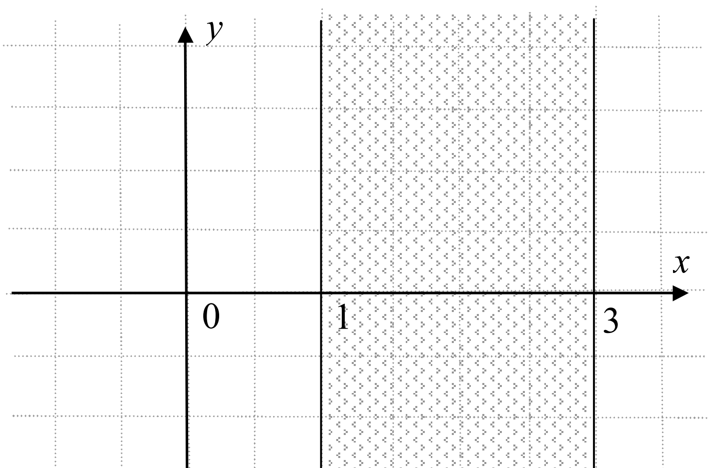


Рис. 5

Ответ: $\begin{cases} -\infty < y < +\infty, \\ 1 \le x \le 3. \end{cases}$

Раздел III. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В данный раздел включены основные типы задач, которые рассматриваются в теме «Линейная алгебра»: вычисление определителей, действия над матрицами, собственные значения и собственные векторы матриц, системы линейных уравнений, а также задачи с экономическим содержанием, при решении которых возможно применение элементов линейной алгебры.

При решении задач рекомендуется повторить соответствующий теоретический материал, рассмотренный на лекциях по данным темам или рассматриваемый в учебной литературе. Элементы линейной алгебры в учебных пособиях Л.Н. Журбекно, Н.Ш. Кремера и В.А. Малугина изложены в объеме, достаточном для студентов экономических специальностей. Более того, практикумы и задачники этих же авторов можно использовать для самостоятельной работы по изучению данных тем.

Задача 3.1. Для данной квадратной матрицы найти

а) минор M_{ij} элемента a_{ij};

б) алгебраическое дополнение A_{ji} элемента a_{ji};

в) ее определитель, получив предварительно нули в *i*-й строке или *j*-ом столбце.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $i=2, j=3$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $i=4, j=3$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $i=3, j=1$;

6) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $i=3, j=1$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $i=3, j=2$;

7) $\begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $i=1, j=4$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ 3 & -15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$, $i=2, j=4$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $i=2, j=2$;

9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, i=4, j=2;

10) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, i=2, j=1;

11) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, i=3, j=3;

12) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, i=3, j=4;

13) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, i=1, j=2;

14) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, i=2, j=1;

15) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, i=3, j=2;

16) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, i=4, j=3;

17) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, i=2, j=2;

18) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, i=4, j=3;

19) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, i=1, j=4;

20) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, i=3, j=2;

21) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, i=4, j=4;

22) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, i=2, j=3;

23) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 10 & -15 \\ -2 & 7 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 5 & 13 \end{pmatrix}$, i=1, j=1;

24) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, i=4, j=1;

25) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, i=3, j=3;

26) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=1;

27) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, i=3, j=3;

28) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, i=1, j=4;

29) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, i=3, j=4;

30) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, i=4, j=2.

Пример 3.1

Для матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **найти а) минор** M_{13} **элемента** a_{13}**; б) алгебраическое дополнение** A_{31} **элемента** a_{31}**; в) ее определитель, получив предварительно нули в первой строке.**

Решение

а) *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} матрицы четвертого порядка является определитель матрицы третьего порядка, полученной из исходной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Тогда,

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3+0-8-0-1-0=-6.$$

Ответ: – 6.

б) *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} матрицы четвертого порядка является его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \qquad (3.1)$$

Тогда,

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3+8+0-(-1)-0-0=6.$$

Ответ: 6.

в) Значение определителя не изменится, если к элементам одного столбца (строки) прибавить элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и тоже число, отличное от нуля. Используя данное свойство, преобразуем определитель к виду, когда он содержит первую строку с максимальным количеством нулей

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4\text{ столбец} + 2\text{ столбец} \\ 4\text{ столбец} \cdot (-3) + 1\text{ столбец} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -1 \\ -7 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

.

Поскольку определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения, то после преобразований, вычислим определитель, разложив его по первой строке

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -1 \\ -7 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{14} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -7 & 2 & 2 \end{vmatrix} == -(0 + 6 - 140 - 0 - 10 - 24) = 168.$$

Ответ: 168.

Задача 3.2. Выполнив действия над матрицами, найти матрицу *K*. Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $K = 3A^T B - 2CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -7 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

2) $K = 4A^T B + 6CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

3) $K = 5A^T B + 2CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

4) $K = 4AB + 6CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

5) $K = 2AB - 4CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

6) $K = 5A^T B - 2CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -7 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix};$$

7) $K = 4AB - 3CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

8) $K = 4A^T B - 5CD$,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

9) $K = 3AB - 4CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

10) $K = -6AB - 3CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

11) $K = 5AB - 3CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

12) $K = 5AB - 2C^T D$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix};$$

13) $K = 5A^T B - 6CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

14) $K = 6AB - 3CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

15) $K = AB - 4CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

16) $K = 4AB - 6CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

17) $K = 5AB - 3CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

18) $K = 4AB - 5CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

19) $K = -6AB - 3CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

20) $K = 7AB - 3CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

21) $K = 5AB - 4C^T D$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

22) $K = 2A^T B - 3CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

23) $K = 4AB - 3CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

24) $K = 3A^T B - 5CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

25) $K = -6AB + 2CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

26) $K = AB - 5CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

27) $K = 4AB - 6CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

28) $K = 4A^T B - 5CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix};$$

29) $K = 5A^T B - 6CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

30) $K = 3AB - 5CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.2

Выполнив действия над матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

найти матрицу $K = -4AB + 3CD^T$.

Решение

Выполним вычисление по действиям, в соответствии с порядком и правилами действий над матрицами.

Вычислим произведение $A \cdot B$ (каждый элемент i-й строки, $i = 1,2$, матрицы A умножаем на соответствующие элементы j-го столбца, $j = 1,2,3$, матрицы B, полученные произведения складываем)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&-2&0\\1&-2&6&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-1\\0&1&4\\1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6+0-2+0&-4+3-4+0&-2+12-6+0\\3-0+6+2&-2-2+12+1&-1-8+18+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-5&4\\11&9&13\end{pmatrix}.$$

Найдем значение выражения $C\cdot D^T$

$$C\cdot D^T=\begin{pmatrix}2&1&-3\\-2&4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&5&-1\\1&4&0\end{pmatrix}^T=$$

$$=\begin{pmatrix}2&1&-3\\-2&4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&1\\1&5&4\\-2&-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6+1+6&0+5+3&2+4-0\\-6+4+0&0+20+0&-2+16+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&8&6\\-2&20&14\end{pmatrix}.$$

Умножим каждый элемент матрицы $A\cdot B$ на (– 4)

$$-4AB=-4\cdot\begin{pmatrix}4&-5&4\\11&9&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\cdot4&-4\cdot(-5)&-4\cdot4\\-4\cdot11&-4\cdot9&-4\cdot13\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-6&20&-16\\-44&-36&-52\end{pmatrix},$$

каждый элемент матрицы $C\cdot D^T$ на 3

$$3CD^T=3\cdot\begin{pmatrix}13&8&6\\-2&20&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot13&3\cdot8&3\cdot6\\3\cdot(-2)&3\cdot20&3\cdot14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39&24&18\\-6&60&42\end{pmatrix}.$$

Полученные матрицы сложим и найдем матрицу K

$$K=\begin{pmatrix}-16&20&-16\\-44&-36&-52\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}39&24&18\\-6&60&42\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-16+39&20+24&-16+18\\-44-6&-36+60&-52+42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&44&2\\-50&24&-10\end{pmatrix}.$$

Ответ: $K=\begin{pmatrix}23&44&2\\-50&24&-10\end{pmatrix}.$

Задача 3.3. Исследовать систему линейных уравнений на совместность. В случае совместности системы определить количество решений и решить ее

а) матричным методом (методом обратной матрицы);

б) по формулам Крамера.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\begin{cases} 2x + 6y + 5z = 3, \\ 5x + 3y - 2z = -7, \\ 7x + 4y - 3z = -10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y + z = -1, \\ -3x + 4y - 2z = -7, \\ 2x + 3y - 4z = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 5y - 4z = 1, \\ 4x + 5y - 2z = 1, \\ x - 6y - 4z = 11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = -4, \\ -x + 4y - 3z = 0, \\ 7x + 3y - 4z = -6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + 5y - z = 13, \\ 3x + y - 6z = 2, \\ 10x - 3y - 4z = 10; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + y - 5z = 0, \\ 8x - 4y - 5z = 7, \\ 2x - 3y - 4z = -3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x + 7y + 4z = -1, \\ 4x + 5y - 2z = 1, \\ x - 4y - 5z = 10; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x - 2y + z = 2, \\ 3x + y - 2z = 8, \\ 2x - 3y - 4z = -1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - y + z = 1, \\ 3x - 4y + 5z = 0, \\ 2x - 5y + 4z = -4; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x + 5y - 4z = 3, \\ 4x - 5y - 2z = -3, \\ x + 3y - 4z = 0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x - 7y - 4z = 9, \\ 4x - 5y + 3z = -2, \\ x + 6y - 4z = -3; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ -3x + 5y - z = -1, \\ 2x + 3y - z = 7; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x + 7y - 5z = 4, \\ 3x + y - 5z = -1, \\ 2x - 8y - 4z = -10; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1, \\ 4x + 5y - 2z = 3, \\ x - 6y - 4z = -10; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 5x - 4y + 2z = 11, \\ 2x + 3y - 4z = -5; \end{cases}$

16) $\begin{cases} x + 4y - 5z = 1, \\ 3x - 5y + 7z = -9, \\ x + 6y - 5z = 5; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x - 3y + z = -2, \\ -8x + 4y - 2z = -4, \\ 2x + 7y - z = 9; \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ x + 6y - 5z = -4, \\ 2x - 7y - 4z = -2; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x + 5y - 8z = 11, \\ 4x + y - 2z = 6, \\ x - 2y - 3z = -3; \end{cases}$

20) $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ -3x + y + 5z = 6, \\ 2x - 4y - 4z = -6; \end{cases}$

21) $\begin{cases} x+2y+6z=-3, \\ 4x+3y-2z=9, \\ 2x-3y+4z=-5; \end{cases}$

22) $\begin{cases} -2x+4y-z=1, \\ 3x+5y-5z=3, \\ 2x-7y+4z=-1; \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2x+7y-4z=2, \\ 4x+3y-6z=6, \\ x-5y-4z=-1; \end{cases}$

24) $\begin{cases} x+2y+4z=-7, \\ 3x-4y+2z=-1, \\ 2x+3y+z=-6; \end{cases}$

25) $\begin{cases} 2x+y-z=-3, \\ 3x+4y-5z=8, \\ 2x-3y+5z=3; \end{cases}$

26) $\begin{cases} 2x-y-8z=0, \\ 3x+5y-3z=13, \\ 2x+7y-4z=16; \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2x+7y-4z=5, \\ 4x-5y-3z=-4, \\ x+5y-4z=2; \end{cases}$

28) $\begin{cases} x+7y+z=-2, \\ -4x+5y-2z=6, \\ 2x+6y-4z=2; \end{cases}$

29) $\begin{cases} 4x+y-z=4, \\ 3x+y-5z=-1, \\ 2x-7y+4z=-1; \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x+7y-4z=7, \\ 4x+y-2z=7, \\ x-2y-4z=4. \end{cases}$

Пример 3.3

Исследовать систему линейных уравнений на совместность. В случае совместности системы определить количество решений и решить ее

а) матричным методом (методом обратной матрицы);

б) по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ -x-y+2z=-3, \\ 3x+y+z=2; \end{cases}$$

Решение

По теореме Кронекера–Капелли система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрица этой системы.

Введем обозначения: A – основная матрица системы, $A|B$ – расширенная матрица системы, тогда

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Поскольку ранг матрицы системы равен числу ненулевых строк данной матрицы, если она приведена к ступенчатому виду, и элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, то приведем матрицы A и $A|B$ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-1&3\\-1&-1&2&-3\\3&1&1&2\end{array}\right)\sim\left[\begin{array}{c}\text{1 строка и 2 строка}\\\text{поменяем местами}\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&2&-3\\2&3&-1&3\\3&1&1&2\end{array}\right)\sim\left[\begin{array}{l}\text{1 стр.}\cdot 2+\text{2 стр.}\\\text{1 стр.}\cdot 3+\text{3 стр.}\end{array}\right]\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&2&-3\\0&1&3&-3\\0&-2&7&-7\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{l}\text{2 стр.}\cdot 2+\\+\text{3 стр.}\end{array}\right]\sim\underbrace{\left(\begin{array}{c|c}\overbrace{\begin{array}{ccc}-1&-1&2\\0&1&3\\0&0&13\end{array}}^{A}&\begin{array}{c}-3\\-3\\-13\end{array}\end{array}\right)}_{A|B}.$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A|B=3$, следовательно, система совместна. Кроме того, ранг матриц совпадает с количеством переменных, поэтому система имеет единственное решение.

а) Для решения системы матричным методом запишем ее в матричном виде

$$\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&-1&2\\3&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$$

или

$$A\cdot X=B,$$

где A – основная матрица системы, B – матрица-столбец свободных коэффициентов, X – матрица-столбец неизвестных.

Вычислим определитель матрицы коэффициентов

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3&-1\\-1&-1&2\\3&1&1\end{vmatrix}=-2+1+18-3-4+3=13.$$

Поскольку $|A|=13\neq 0$, то матрица A не вырождена, значит существует обратная матрица, и решение системы можно найти по формуле

$$X=A^{-1}\cdot B, \qquad (3.2)$$

где A^{-1} – обратная матрица для матрицы A.

Обратную матрицу найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5,$

Подставив найденные значения алгебраических дополнений элементов матрицы A в формулу (3.3), получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 7 & 5 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу неизвестных по формуле (3.2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 7 & 5 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$.

Ответ: $(1; 0; -1)$.

б) Ранее было определено, что система имеет единственное решение, следовательно, возможно решение по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{3.4}$$

где Δ – определитель матрицы системы, Δ_x, Δ_y и Δ_z – определители, полученные из определителя основной матрицы заменой соответственно первого, второго и третьего столбца на столбец свободных коэффициентов.

Вычислим значения выражений необходимые для формул (3.4)

$\Delta = 13$ (вычислено выше),

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+3+12-2-6+9=13,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6+2+18-9-8+3=0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4-3-27+9+6+6=-13.$$

Найдем значения переменных, подставив полученные значения в формулы (3.4)

$$x = \frac{13}{13} = 1,\ y = \frac{0}{13} = 0,\ z = \frac{-13}{13} = -1.$$

Ответ: $(1;0;-1)$.

Задача 3.4. Исследовать систему линейных уравнений на совместность, в случае совместности системы найти ее общее решение. Выполнить проверку.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\begin{cases} 2x_1+5x_2-x_3+3x_4+x_5=1, \\ 3x_1-x_2+x_3+3x_4-2x_5=2, \\ 5x_1+4x_2+6x_4-x_5=3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+3x_4-x_5=-1, \\ x_1+5x_2-2x_3+x_4+2x_5=-2, \\ x_1+3x_2-2x_3-3x_4+x_5=-4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5=1, \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=2, \\ 4x_1+x_2+x_3-x_4+3x_5=3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-3x_4+x_5=1, \\ 3x_1+x_2-x_3+x_4+2x_5=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3+5x_4=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-3x_4+x_5=1, \\ x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5=1, \\ 4x_1+5x_2+x_3-x_4+5x_5=3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+7x_2+5x_3-3x_4-x_5=-1, \\ 3x_1+x_2+4x_3-6x_4=2, \\ x_1-13x_2-3x_3+x_5=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5=1, \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=2, \\ 4x_1+x_2+3x_3+5x_4+x_5=3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x_1-x_2-4x_3+3x_4-x_5=-2, \\ x_1+3x_2+2x_3-5x_4+2x_5=1, \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4-5x_5=1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4-x_5=1, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4+2x_5=3, \\ 4x_1+x_2+2x_3-2x_4+x_5=4; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+3x_4=1, \\ 5x_1+x_2-7x_3+13x_4=6, \\ 4x_1+3x_2+x_3-6x_4=-2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 5; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 = -3; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 3; \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 3; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 6x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 8x_3 + 9x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 4; \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 + 8x_2 - 6x_3 - x_4 = -3; \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 - 3x_5 = 4, \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$

21) $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 2x_2 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + 9x_3 + x_5 = 5; \end{cases}$

22) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_4 = -10, \\ 3x_1 + x_2 - 9x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_5 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

24)

$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 = -8, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$

25) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 9, \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 + x_4 = 6, \\ -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3; \end{cases}$

26) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$

27) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 4; \end{cases}$

28) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 = -1; \end{cases}$

29) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 + x_5 = 11, \\ x_1 - 9x_2 + 11x_3 - 5x_4 = -10, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_5 = 1; \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Пример 3.4

Исследовать систему линейных уравнений на совместность, в случае совместности системы найти ее общее решение. Выполнить проверку.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение

Для решения систем m линейных уравнений с n неизвестными в общем виде применимы методы Гаусса и Жордана–Гаусса. Составим расширенную матрицу системы

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

В соответствии с методом Жордана–Гаусса будем выполнять следующие операции: в ненулевой строке основной матрицы системы выберем элемент – разрешающий элемент; в столбце, соответствующем выбранному элементу с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы получим нули. Далее будем повторять аналогичные действия (выбирать элементы необходимо в разных строках матрицы) до тех пор, пока разрешающие элементы не будут выбраны во всех строках:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} \langle 1\rangle & 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} 1 \text{ строка} \cdot (-2) + 2 \text{ строка} \\ 1 \text{ строка} \cdot 1 + 3 \text{ строка} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left[3 \text{ строка} \cdot (-1)\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & \langle 1\rangle & -3 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} 3 \text{ строка} \cdot (-4) + 2 \text{ строка} \\ 3 \text{ строка} \cdot 1 + 1 \text{ строка} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 21 & 0 & 11 & -4 & 12 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left[2 \text{ строка} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -21/4 & 0 & -11/4 & \langle 1\rangle & -3 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5/4 & 0 & 7/4 & 0 & 0 \\ 0 & -21/4 & 0 & -11/4 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{matrix}\text{2 строка и 3 строка}\\ \text{поменяем местами}\end{matrix}\right] \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5/4 & 0 & 7/4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -21/4 & 0 & -11/4 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|B = 3$, значит, система совместна. Кроме того, ранг матриц меньше количества переменных, поэтому система имеет бесконечно много решений.

Столбцы, в которых в процессе решения были выбраны разрешающие элементы, образуют единичную матрицу, а соответствующие им переменные являются базисными.

Исходная система эквивалентна следующей системе уравнений, которую записываем на основе последней матрицы

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{5}{4}x_2 \qquad + \dfrac{7}{4}x_4 \qquad = 0, \\ \quad -7x_2 + x_3 - 3x_4 \qquad = -2, \\ -\dfrac{21}{4}x_2 \qquad - \dfrac{11}{4}x_4 + x_5 = -3, \end{cases}$$

x_1, x_3, x_5 – базисные переменные, x_2, x_4 – свободные переменные.

Выразим из каждого уравнения базисные переменные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{4}x_2 - \dfrac{7}{4}x_4, \\ x_3 = 7x_2 + 3x_4 - 2, \\ x_5 = \dfrac{21}{4}x_2 + \dfrac{11}{4}x_4 - 3, \end{cases}$$

Свободные переменные принимают произвольные значения, а значения базисных переменных вычисляются в соответствии с полученными выражениями.

Пусть $x_2 = a$, $x_4 = b$, тогда получим общее решение системы

$$X = \left(-\frac{5}{4}a - \frac{7}{4}b;\, a;\, 7a + 3b - 2;\, b;\, \frac{21}{4}a + \frac{11}{4}b - 3 \right), a \in R, b \in R.$$

Для проверки подставим найденное решение в исходную систему

$$\begin{cases} -\dfrac{5}{4}a - \dfrac{7}{4}b + 3a - (7a + 3b - 2) + 2b + \dfrac{21}{4}a + \dfrac{11}{4}b - 3 = -1, \\ 2 \cdot \left(-\dfrac{5}{4}a - \dfrac{7}{4}b \right) - a + 2 \cdot (7a + 3b - 2) + 3b - 2 \cdot \left(\dfrac{21}{4}a + \dfrac{11}{4}b - 3 \right) = 2, \\ -\left(-\dfrac{5}{4}a - \dfrac{7}{4}b \right) + 4a + b - \left(\dfrac{21}{4}a + \dfrac{11}{4}b - 3 \right) = 3. \end{cases}$$

Упростив каждое уравнение в системе, получим

$$\begin{cases} -1 = -1, \\ 2 = 2, \\ 3 = 3. \end{cases}$$

Все равенства верные, значит, решение системы найдено верно.

Ответ:

$$X = \left(-\frac{5}{4}a - \frac{7}{4}b;\ a;\ 7a + 3b - 2;\ b;\ \frac{21}{4}a + \frac{11}{4}b - 3 \right),\ a \in R, b \in R.$$

Задача 3.5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 25) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 19) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$;

30) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 3.5</u>

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где A – заданная матрица, E – единичная матрица, λ – независимая переменная.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix}\text{разложим определитель по} \\ \text{элементам тертьего столбца}\end{matrix}\right] =$$

$$= (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left(-\lambda\cdot(2-\lambda)-1\cdot 3\right) =$$

$$= (1-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-2\lambda-3\right) = 0.$$

Решая полученное уравнение, найдем его корни λ_1, λ_2, λ_3 – собственные значения исходной матрицы

$$(1-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-2\lambda-3\right)=0,$$

$$(1-\lambda)=0, \quad \left(\lambda^2-2\lambda-3\right)=0,$$

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1.$$

Далее найдем собственные векторы матрицы, соответствующие каждому из собственных чисел.

Пусть $X^T=\left(x_1, x_2, x_3\right)$ – искомый собственный вектор.

Составим систему однородных уравнений $\left(A-\lambda E\right)\cdot X=0$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1+(2-\lambda)x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта однородная система линейных уравнений имеет множество решений, так как определитель ее матрицы коэффициентов равен нулю.

Пусть $\lambda=\lambda_1=3$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} -3x_1+3x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы методом Жордана – Гаусса

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \langle 1\rangle & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & \langle 1 \rangle & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

x_1, x_3 – базисные переменные, x_2 – свободная переменная, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_2 & x_2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } x_2 \text{ – любое число.}$$

В качестве собственного вектора достаточно взять любое частное решение системы. Положим $x_2 = 1$, тогда собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 3$, будет равен

$$\mathrm{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = \lambda_2 = 1$ и $\lambda = \lambda_3 = -1$ аналогично приведенному выше решению составляем и находим решение соответствующей системы однородных уравнений.

Пусть $\lambda = \lambda_2 = 1$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Общее решение системы данной системы найдем методом Жордана – Гаусса,
откуда получим,

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

x_1, x_2 – базисные переменные, x_3 – свободная переменная, таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \text{ где } x_3 \text{ – любое число.}$$

Положим $x_3 = 1$, тогда собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 1$, будет равен

$$X^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda=\lambda_3=-1$, тогда система примет вид

$$\begin{cases}x_1+3x_2 & =0,\\ x_1+3x_2 & =0,\\ x_1-\ x_2+2x_3=0.\end{cases}$$

Найдем общее решение системы методом Жордана – Гаусса

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ \langle 1\rangle & -1 & 2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 4 & -2 & 0\\ 0 & 4 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & \langle 1\rangle & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\end{array}\right),$$

откуда

$$\begin{cases}-2x_2+x_3=0,\\ x_1+3x_2=0,\end{cases}$$

x_1, x_3 – базисные переменные, x_2 – свободная переменная, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$X^{T}=\begin{pmatrix}-3x_2 & x_2 & 2x_2\end{pmatrix},\text{ где } x_2 \text{ – любое число.}$$

Положим $x_2=1$, тогда собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1=-1$, будет равен

$$X^{(3)}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$;

$$X^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ X^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ X^{(3)}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Задача 3.6. Предприятие выпускает три вида изделий с использованием четырех типов сырья. Нормы затрат сырья на каждое изделие определены матрицей затрат *A*, себестоимость единицы сырья отражена в матрице *C*. Найти общие затраты на сырье при плане выпуска продукции, указанном в матрице *B*.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 1 по 15:

1) $A=\begin{pmatrix}2&1&8&1\\4&3&2&3\\7&5&0&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}23\\10\\14\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}7&6&2&4\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}3&1&7&1\\2&3&1&3\\7&5&0&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}20\\13\\14\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}7&5&2&7\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}4&2&8&1\\3&2&2&5\\7&5&2&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}23\\11\\15\end{pmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}6&6&2&4\end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}2&3&1&1\\4&3&7&2\\7&5&8&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}32\\10\\20\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}8&3&2&4\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}8&1&1&1\\4&3&2&5\\2&5&0&6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}25\\9\\14\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}8&6&3&4\end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}2&1&4&1\\5&3&2&7\\7&5&1&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}27\\13\\6\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}9&2&4&4\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}8&2&0&4\\4&1&2&3\\3&5&2&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}17\\15\\13\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}6&7&4&2\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}2&1&5&1\\1&3&2&3\\6&5&9&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}22\\11\\4\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2&6&7&4\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}3&1&8&0\\9&7&2&3\\7&5&2&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}18\\11\\10\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3&5&1&2\end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix}1&2&7&1\\4&3&2&3\\6&5&1&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}19\\10\\10\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1&8&3&4\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}3&1&9&1\\4&4&2&3\\6&5&2&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}30\\10\\20\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2&1&2&3\end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix}2&2&8&3\\0&3&1&3\\7&6&5&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}13\\24\\14\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}7&6&8&4\end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

14) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 13 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Предприятие выпускает три вида изделий с использованием четырех типов сырья. Нормы затрат сырья на каждое изделие определены матрицей затрат *A*, стоимость доставки единицы сырья каждого типа отражена в матрице *D*. Найти общие затраты на транспортировку сырья при плане выпуска продукции, указанном в матрице *B*.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 16 по 30:

16) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

17) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

18) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

19) $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 22 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

20) $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 24 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

21) $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 19 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

22) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 1 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \\ 7 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

23) $A=\begin{pmatrix}4&1&2&2\\3&0&7&3\\7&5&1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}19\\12\\17\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}4&5&1&3\end{pmatrix}$;

24) $A=\begin{pmatrix}2&1&7&2\\4&2&4&9\\0&5&1&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}14\\18\\20\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}4&5&9&4\end{pmatrix}$;

25) $A=\begin{pmatrix}5&3&8&5\\3&0&6&3\\7&5&1&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}8\\21\\14\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}6&7&1&2\end{pmatrix}$;

26) $A=\begin{pmatrix}7&1&8&2\\4&3&4&5\\2&4&1&5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}10\\17\\9\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}5&7&8&4\end{pmatrix}$;

27) $A=\begin{pmatrix}5&7&0&2\\4&3&4&3\\7&5&2&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}19\\11\\9\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}3&5&2&7\end{pmatrix}$;

28) $A=\begin{pmatrix}8&1&6&2\\4&0&8&3\\3&5&1&7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}25\\11\\16\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}3&1&1&4\end{pmatrix}$;

29) $A=\begin{pmatrix}5&5&8&2\\7&9&4&5\\3&0&1&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}10\\13\\14\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}2&5&3&6\end{pmatrix}$;

30) $A=\begin{pmatrix}1&1&9&2\\4&6&3&3\\7&5&1&8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}22\\11\\13\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}8&4&9&4\end{pmatrix}$.

<u>Пример 3.6</u>

Предприятие выпускает три вида изделий с использованием четырех типов сырья. Нормы затрат сырья на каждое изделие определены матрицей затрат $A=\begin{pmatrix}2&4&6&2\\3&2&2&3\\0&3&1&4\end{pmatrix}$, **себестоимость единицы сырья отражена в матрице** $C=\begin{pmatrix}4&2&1&3\end{pmatrix}$. **Найти общие затраты на сырье при плане выпуска продукции, указанном в матрице** $B=\begin{pmatrix}21\\12\\31\end{pmatrix}$.

Решение

Найдем затраты каждого вида сырья на выпуск всей запланированной продукции

$$A^T B=\begin{pmatrix}2&3&0\\4&2&3\\6&2&1\\2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}21\\12\\31\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}78\\201\\181\\202\end{pmatrix}.$$

Вычислим общие затраты на все сырье

$$C\cdot\left(A^T B\right)=\begin{pmatrix}4&2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}78\\201\\181\\202\end{pmatrix}=\left(1501\right).$$

Ответ: общие затраты на сырье составят 1501 ден.ед.

Задача 3.7. В статистической линейной модели Леонтьева многоотраслевой экономики задана матрица коэффициентов прямых затрат A. Проверить выполнение необходимого и достаточного условия продуктивности данной матрицы.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $A=\begin{pmatrix}0,3&0,4&0,1\\0,5&0,5&0,6\\0,2&0,1&0,2\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}0,3&0,4&0,1\\0,4&0,5&0,6\\0,2&0,2&0,2\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}0,2&0,3&0,2\\0,6&0,4&0,5\\0,2&0,3&0,2\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}0,4&0,2&0,2\\0,4&0,4&0,6\\0,2&0,3&0,2\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}0,4&0,2&0,2\\0,4&0,5&0,6\\0,2&0,3&0,2\end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}0,6&0,2&0,2\\0,3&0,5&0,6\\0,2&0,3&0,2\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}0,2&0,2&0,2\\0,5&0,4&0,5\\0,1&0,3&0,4\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}0,1&0,2&0,2\\0,7&0,4&0,5\\0,2&0,3&0,3\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}0,1&0,3&0,2\\0,7&0,4&0,5\\0,2&0,3&0,3\end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix}0,1&0,2&0,3\\0,7&0,4&0,4\\0,1&0,4&0,3\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}0,3&0,1&0,3\\0,4&0,3&0,7\\0,3&0,6&0,3\end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix}0,3&0,1&0,1\\0,4&0,3&0,6\\0,2&0,6&0,2\end{pmatrix}$;

$$13)\ A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,2\\ 0,6 & 0,4 & 0,6\\ 0,2 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix};\qquad 22)\ A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,1\\ 0,3 & 0,3 & 0,6\\ 0,2 & 0,5 & 0,2\end{pmatrix};$$

$$14)\ A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,4 & 0,6\\ 0,1 & 0,3 & 0,2\end{pmatrix};\qquad 23)\ A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,1 & 0,2\\ 0,3 & 0,3 & 0,5\\ 0,2 & 0,3 & 0,2\end{pmatrix};$$

$$15)\ A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,2\\ 0,7 & 0,4 & 0,6\\ 0,1 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix};\qquad 24)\ A=\begin{pmatrix}0,2 & 0 & 0,2\\ 0,3 & 0,5 & 0,5\\ 0,4 & 0,5 & 0,3\end{pmatrix};$$

$$16)\ A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,5 & 0,6\\ 0,1 & 0,3 & 0,2\end{pmatrix};\qquad 25)\ A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,3 & 0,6\\ 0,2 & 0,5 & 0,2\end{pmatrix};$$

$$17)\ A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,5\\ 0,2 & 0,3 & 0,1\end{pmatrix};\qquad 26)\ A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,2\\ 0,6 & 0,4 & 0,6\\ 0,2 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix};$$

$$18)\ A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,3 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,5\\ 0,2 & 0,3 & 0,2\end{pmatrix};\qquad 27)\ A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,3 & 0,2\\ 0,6 & 0,4 & 0,5\\ 0,2 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix};$$

$$19)\ A=\begin{pmatrix}0,8 & 0,3 & 0,3\\ 0,1 & 0,4 & 0,4\\ 0,1 & 0,3 & 0,2\end{pmatrix};\qquad 28)\ A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,2\\ 0,4 & 0,4 & 0,5\\ 0,2 & 0,2 & 0,3\end{pmatrix};$$

$$20)\ A=\begin{pmatrix}0,8 & 0,4 & 0,3\\ 0,1 & 0,4 & 0,4\\ 0,1 & 0,3 & 0,2\end{pmatrix};\qquad 29)\ A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,3\\ 0,4 & 0,4 & 0,5\\ 0,2 & 0,2 & 0,3\end{pmatrix};$$

$$21)\ A=\begin{pmatrix}0,7 & 0,4 & 0,3\\ 0,1 & 0,4 & 0,4\\ 0,1 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix};\qquad 30)\ A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,3 & 0,3\\ 0,4 & 0,3 & 0,5\\ 0,2 & 0,2 & 0,1\end{pmatrix}.$$

Пример 3.7

В статистической линейной модели Леонтьева многоотраслевой экономики задана матрица коэффициентов прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,2\\ 0,6 & 0,4 & 0,6\\ 0,2 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}$. **Проверить выполнение необходимого и достаточного условия продуктивности данной матрицы.**

Решение

Матрица A называется продуктивной, если она определяет технологию, обеспечивающую любому объекту выпуск некоторого количества готовой продукции.

Критерий продуктивности матрицы говорит о том, что матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда существует матрица $S=(E-A)^{-1}$ и все ее элементы не отрицательны.

Найдем матрицу $(E-A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,6 & 0,6 & -0,6 \\ -0,2 & -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$|E-A| = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,6 & 0,6 & -0,6 \\ -0,2 & -0,2 & 0,8 \end{vmatrix} = -0,06 \neq 0,$$

матрица $S=(E-A)^{-1}$ существует. В соответствии с формулой (3.3) найдем элементы этой матрицы:

$A_{11}=0,36$; $A_{21}=0,28$; $A_{31}=0,3$;

$A_{12}=0,6$; $A_{22}=0,6$; $A_{32}=0,6$;

$A_{13}=0,24$; $A_{23}=0,22$; $A_{33}=0,3$.

Откуда по необходимому и достаточному условию продуктивности следует, что матрица A продуктивна.

Ответ: матрица A продуктивна.

Задача 3.8. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Расходы каждого типа сырья по видам продукции и запасы сырья на предприятии даны в таблице. Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

Тип сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.**			**Запас сырья, вес.ед.**
	1	**2**	**3**	
I	1	5	2	910
II	3	2	3	870
III	2	1	4	740

2)

Тип сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.**			**Запас сырья, вес.ед.**
	1	**2**	**3**	
I	2	4	1	830
II	4	3	4	1230
III	1	2	3	690

3)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	4	2	890
II	3	2	3	830
III	2	1	2	510

4)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	1	3	770
II	2	2	3	780
III	3	1	2	650

5)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	5	2	410
II	3	2	3	630
III	2	1	4	550

6)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	2	1	780
II	1	2	2	550
III	3	3	4	1090

7)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	4	2	380
II	3	2	3	630
III	2	1	2	410

8)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	3	5	1040
II	3	2	1	650
III	1	1	3	500

9)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	1	5	980
II	2	4	3	990
III	3	5	2	1130

10)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	2	1	610
II	1	2	2	320
III	3	3	4	730

11)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	4	970
II	1	5	1	810
III	4	3	2	1000

12)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	1	5	860
II	2	4	3	570
III	3	5	2	650

13)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	4	2	790
II	3	2	3	870
III	2	1	2	540

14)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	3	5	1030
II	3	2	1	620
III	1	1	3	510

15)

Тип сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.**			**Запас сырья, вес.ед.**
	1	**2**	**3**	
I	3	1	3	600
II	2	2	3	510
III	3	1	2	530

16)

Тип сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.**			**Запас сырья, вес.ед.**
	1	**2**	**3**	
I	4	2	1	750
II	1	2	2	540
III	3	3	4	1050

17)

Тип сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.**			**Запас сырья, вес.ед.**
	1	**2**	**3**	
I	3	2	2	770
II	1	3	1	570
III	4	3	2	1000

18)

Тип сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.**			**Запас сырья, вес.ед.**
	1	**2**	**3**	
I	3	2	4	700
II	1	5	1	340
III	4	3	2	710

19)

Тип сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.**			**Запас сырья, вес.ед.**
	1	**2**	**3**	
I	5	3	3	1210
II	1	1	2	430
III	3	4	3	1110

20)

Тип сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.**			**Запас сырья, вес.ед.**
	1	**2**	**3**	
I	2	3	5	1080
II	3	2	1	670
III	1	1	3	530

21)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	1	5	1060
II	2	4	3	1000
III	3	5	2	1130

22)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	4	1	800
II	4	3	4	1200
III	1	2	3	650

23)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	5	3	3	900
II	1	1	2	290
III	3	4	3	690

24)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	5	2	930
II	3	2	3	830
III	2	1	4	690

25)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	2	560
II	1	3	1	280
III	4	3	2	710

26)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	4	920
II	1	5	1	840
III	4	3	2	970

27)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	5	3	3	1160
II	1	1	2	410
III	3	4	3	1090

28)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	4	1	810
II	4	3	4	1150
III	1	2	3	630

29)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	2	740
II	1	3	1	580
III	4	3	2	970

30)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	1	3	750
II	2	2	3	760
III	3	1	2	650

Пример 3.8

Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Расходы каждого типа сырья по видам продукции и запасы сырья на предприятии даны в таблице

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	1	1	550
II	3	2	1	850
III	1	1	3	750

Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Решение

Объем выпуска продукции – количество изделий каждого вида, которое может выпускать предприятие при заданных запасах сырья, если даны расходы каждого типа по видам продукции.

Исходя из этого, обозначим x_1 – количество производимых изделий первого вида, x_2 – количество производимых изделий второго вида, x_3 – количество производимых изделий третьего вида.

В соответствии с введенными обозначениями и данными о расходе и запасам сырья по видам изделий составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 550, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 850, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 750. \end{cases}$$

Значения переменных x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие этой системе, и будут определять объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья. Решим систему методом Жордана – Гаусса

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 550 \\ 3 & 2 & 1 & 850 \\ \langle 1 \rangle & 1 & 3 & 750 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -5 & -950 \\ 0 & -1 & -8 & -1400 \\ 1 & 1 & 3 & 750 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \langle 1 \rangle & 5 & 950 \\ 0 & -1 & -8 & -1400 \\ 1 & 1 & 3 & 750 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 950 \\ 0 & 0 & -3 & -450 \\ 1 & 0 & -2 & -200 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 950 \\ 0 & 0 & \langle 1 \rangle & 150 \\ 1 & 0 & -2 & -200 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 1 & 0 & 0 & 100 \end{array}\right).$$

Откуда,

$$\begin{cases} x_2 = 200, \\ x_3 = 150, \\ x_1 = 100. \end{cases}$$

Ответ: при заданных запасах сырья возможно производить 100 изделий первого вида, 200 изделий второго вида, 150 изделий третьего вида.

Раздел IV. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

В разделе «Векторная алгебра» рассматриваются задачи, направленные на усвоение понятий вектора и базиса; задачи на основные действия с векторами, на нахождение координат вектора в новом базисе.

Для решения задач рекомендуется повторить теоретический материал, рассмотренный на лекциях по данным темам и рассматриваемый в учебной литературе авторов Д.Т. Письменный, Д.В. Клетеника. Практикумы А.П. Рябушко и Н. Ш. Кремера кроме текстов задач и примеров их решения содержат краткие теоретические сведения, что может способствовать систематизации подходов к решению выделенных типов задач.

Задача 4.1. Даны векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и вектор $\vec{a}$. Доказать, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\vec{e}_1=(5;4;1)$, $\vec{e}_2=(-3;5;2)$, $\vec{e}_3=(2;-1;3)$, $\vec{a}=(7;23;4)$;
2) $\vec{e}_1=(2;-1;4)$, $\vec{e}_2=(-3;0;-2)$, $\vec{e}_3=(4;5;-3)$, $\vec{a}=(0;11;-14)$;
3) $\vec{e}_1=(-1;1;2)$, $\vec{e}_2=(2;-3;-5)$, $\vec{e}_3=(-6;3;-1)$, $\vec{a}=(28;-19;-7)$;
4) $\vec{e}_1=(1;3;4)$, $\vec{e}_2=(-2;5;0)$, $\vec{e}_3=(3;-2;-4)$, $\vec{a}=(13;-5;-4)$;
5) $\vec{e}_1=(1;-1;1)$, $\vec{e}_2=(-5;-3;1)$, $\vec{e}_3=(2;-1;0)$, $\vec{a}=(-15;-10;5)$;
6) $\vec{e}_1=(3;1;2)$, $\vec{e}_2=(-7;-2;-4)$, $\vec{e}_3=(-4;0;3)$, $\vec{a}=(16;6;15)$;
7) $\vec{e}_1=(-3;0;1)$, $\vec{e}_2=(2;7;-3)$, $\vec{e}_3=(-4;3;5)$, $\vec{a}=(-16;33;13)$;
8) $\vec{e}_1=(5;1;2)$, $\vec{e}_2=(-2;1;-3)$, $\vec{e}_3=(4;-3;5)$,$\vec{a}=(15;-15;24)$;
9) $\vec{e}_1=(0;2;-3)$, $\vec{e}_2=(4;-3;-2)$, $\vec{e}_3=(-5;-4;0)$, $\vec{a}=(0;-5;-4)$;
10) $\vec{e}_1=(3;-1;2)$, $\vec{e}_2=(-2;3;1)$, $\vec{e}_3=(4;-5;-3)$, $\vec{a}=(-3;2;-3)$;
11) $\vec{e}_1=(5;3;1)$, $\vec{e}_2=(-1;2;-3)$, $\vec{e}_3=(3;-4;2)$, $\vec{a}=(-9;34;-20)$;
12) $\vec{e}_1=(3;1;-3)$, $\vec{e}_2=(-2;4;1)$, $\vec{e}_3=(1;-2;5)$, $\vec{a}=(1;12;-20)$;
13) $\vec{e}_1=(6;1;-3)$, $\vec{e}_2=(3;2;1)$, $\vec{e}_3=(-1;-3;4)$, $\vec{a}=(15;6;-17)$;
14) $\vec{e}_1=(4;2;3)$, $\vec{e}_2=(-3;1;-8)$, $\vec{e}_3=(2;-4;5)$, $\vec{a}=(-12;14;-31)$;
15) $\vec{e}_1=(-2;1;3)$, $\vec{e}_2=(3;-6;2)$, $\vec{e}_3=(-5;-3;-1)$, $\vec{a}=(31;-6;22)$;
16) $\vec{e}_1=(1;3;6)$, $\vec{e}_2=(-3;4;-5)$, $\vec{e}_3=(1;-7;2)$, $\vec{a}=(-2;17;5)$;
17) $\vec{e}_1=(7;2;1)$, $\vec{e}_2=(5;1;-2)$, $\vec{e}_3=(-3;4;5)$, $\vec{a}=(26;11;1)$;

18) $\vec{e}_1 = (3; 5; 4)$, $\vec{e}_2 = (-2; 7; -5)$, $\vec{e}_3 = (6; -2; 1)$, $\vec{a} = (6; -9; 22)$;
19) $\vec{e}_1 = (5; 3; 2)$, $\vec{e}_2 = (2; -5; 1)$, $\vec{e}_3 = (-7; 4; -3)$, $\vec{a} = (36; 1; 15)$;
20) $\vec{e}_1 = (11; 1; 2)$, $\vec{e}_2 = (-3; 3; 4)$, $\vec{e}_3 = (-4; -2; 7)$, $\vec{a} = (-5; 11; -15)$;
21) $\vec{e}_1 = (9; 5; 3)$, $\vec{e}_2 = (-3; 2; 1)$, $\vec{e}_3 = (4; -7; 4)$, $\vec{a} = (-10; -13; 8)$;
22) $\vec{e}_1 = (7; 2; 1)$, $\vec{e}_2 = (3; -5; 6)$, $\vec{e}_3 = (-6; 4; 5)$, $\vec{a} = (-4; 11; 20)$;
23) $\vec{e}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{e}_2 = (-5; 3; -1)$, $\vec{e}_3 = (-6; 4; 5)$, $\vec{a} = (-4; 11; 20)$;
24) $\vec{e}_1 = (-2; 5; 1)$, $\vec{e}_2 = (3; 2; -7)$, $\vec{e}_3 = (4; -3; 2)$, $\vec{a} = (-4; 22; -13)$;
25) $\vec{e}_1 = (3; 1; 2)$, $\vec{e}_2 = (-4; 3; -1)$, $\vec{e}_3 = (2; 3; 4)$, $\vec{a} = (14; 14; 20)$;
26) $\vec{e}_1 = (3; -1; 2)$, $\vec{e}_2 = (-2; 4; 1)$, $\vec{e}_3 = (4; -5; -1)$, $\vec{a} = (-5; 11; 1)$;
27) $\vec{e}_1 = (4; 5; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 3; 1)$, $\vec{e}_3 = (-3; -6; 7)$, $\vec{a} = (19; 33; 0)$;
28) $\vec{e}_1 = (1; -3; 1)$, $\vec{e}_2 = (-2; -4; 3)$, $\vec{e}_3 = (0; -2; 3)$, $\vec{a} = (-8; -10; 13)$;
29) $\vec{e}_1 = (5; 7; -2)$, $\vec{e}_2 = (-3; 1; 3)$, $\vec{e}_3 = (1; -4; 6)$, $\vec{a} = (14; 9; -1)$;
30) $\vec{e}_1 = (-1; 4; 3)$, $\vec{e}_2 = (3; 2; -4)$, $\vec{e}_3 = (-2; -7; 1)$, $\vec{a} = (6; 20; -3)$.

Пример 4.1

Даны векторы $\vec{e}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{e}_2 = (3; -1; 1)$, $\vec{e}_3 = (-1; 2; 1)$ и вектор $\vec{a} = (3; -3; 2)$. Доказать, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе

Решение

Базисом в трехмерном векторном пространстве называется совокупность трех линейно независимых векторов, поэтому для доказательства того, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис, необходимо доказать, что они линейно независимы.

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ линейно зависимы, если существуют такие числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = \vec{0}, \tag{4.1}$$

в противном случае векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ линейно независимы.

Записывая в выражение (4.1) координаты $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в виде вектор-столбцов, получим

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача доказательства линейной независимости сводится к решению системы

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - \gamma = 0, \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 0, \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Решив систему методом Жордана – Гаусса, получим

$$\begin{cases} \gamma = 0, \\ \alpha = 0, \\ \beta = 0, \end{cases}$$

т.е. для данных векторов условие (4.1) выполняется только при $\alpha = \beta = \gamma = 0$, следовательно, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ линейно независимые, т.е. они образуют базис в трехмерном векторном пространстве.

Любой вектор данного пространства можно представить и притом единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \vec{a}, \tag{4.2}$$

где $(x; y; z)$ – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, которые и требуется найти.

Записав координаты $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{a}$ в виде вектор–столбцов в выражении (4.2), составим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3, \\ -x - y + 2z = -3, \\ 3x + y + z = 2. \end{cases}$$

Данную систему решаем одним из известных способов (по формулам Крамера, матричным методом или методом Жордана – Гаусса) и получаем

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = -1.$$

Ответ: $\vec{a}(1; 0; -1)_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$.

Задача 4.2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти а) единичный вектор $\vec{a}_0$; б) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; в) проекцию вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$; г) координаты вектора $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\vec{a} = (-3; 1; 4)$, $\vec{b} = (1; 2; -2)$, $m = 3$, $n = -2$;

2) $\vec{a} = (3; -1; 2)$, $\vec{b} = (-1; 1; -2)$, $m = -4$, $n = 0{,}5$;

3) $\vec{a} = (1; -1; 4)$, $\vec{b} = (2; 1; 3)$, $m = -1$, $n = 2$;

4) $\vec{a} = (-4; 1; 2)$, $\vec{b} = (-1; 3; 1)$, $m = -2$, $n = 3$;

5) $\vec{a} = (-2; -1; -4)$, $\vec{b} = (1; 5; -2)$, $m = -3$, $n = -1$;

6) $\vec{a}=(1;2;2),\ \vec{b}=(-4;1;6),\ m=2,\ n=3$;

7) $\vec{a}=(-6;-3;2),\ \vec{b}=(3;2;-6),\ m=-1,\ n=4$;

8) $\vec{a}=(2;1;-2),\ \vec{b}=(-1;0;-2),\ m=4,\ n=2$;

9) $\vec{a}=(-2;1;-2),\ \vec{b}=(12;5;0),\ m=3,\ n=-3$;

10) $\vec{a}=(8;7;-4),\ \vec{b}=(2;-1;2),\ m=-3,\ n=1$;

11) $\vec{a}=(3;0;4),\ \vec{b}=(2;1;-2),\ m=-2,\ n=5$;

12) $\vec{a}=(1;-1;6),\ \vec{b}=(-6;3;2),\ m=-1,\ n=-5$;

13) $\vec{a}=(8;15;0),\ \vec{b}=(-2;2;-1),\ m=-4,\ n=3$;

14) $\vec{a}=(4;19;-2),\ \vec{b}=(2;-1;-2),\ m=-1,\ n=5$;

15) $\vec{a}=(6;-3;-2),\ \vec{b}=(2;-5;2),\ m=-2,\ n=3$;

16) $\vec{a}=(3;6;-2),\ \vec{b}=(-2;-1;2),\ m=-3,\ n=-2$;

17) $\vec{a}=(5;7;-4),\ \vec{b}=(4;3;0),\ m=4,\ n=6$;

18) $\vec{a}=(1;-2;-2),\ \vec{b}=(3;5;2),\ m=-3,\ n=-6$;

19) $\vec{a}=(2;-2;-1),\ \vec{b}=(2;1;-2),\ m=-4,\ n=2$;

20) $\vec{a}=(10;-4;-7),\ \vec{b}=(2;1;-2),\ m=-1,\ n=7$;

21) $\vec{a}=(-2;-6;-3),\ \vec{b}=(2;-4;-7),\ m=7,\ n=3$;

22) $\vec{a}=(0;7;-24),\ \vec{b}=(2;-12;1),\ m=5,\ n=-7$;

23) $\vec{a}=(4;3;-13),\ \vec{b}=(5;0;7),\ m=-3,\ n=8$;

24) $\vec{a}=(4;0;-3),\ \vec{b}=(5;-13;0),\ m=-8,\ n=-2$;

25) $\vec{a}=(7;0;12),\ \vec{b}=(3;-2;8),\ m=-2,\ n=10$;

26) $\vec{a}=(9;13;0),\ \vec{b}=(-1;1;4),\ m=-4,\ n=8$;

27) $\vec{a}=(10;7;4),\ \vec{b}=(-1;2;-8),\ m=-7,\ n=4$;

28) $\vec{a}=(-2;8;3),\ \vec{b}=(0;12;-7),\ m=9,\ n=-6$;

29) $\vec{a}=(-7;-1;4),\ \vec{b}=(-1;3;2),\ m=5,\ n=-9$;

30) $\vec{a}=(4;-1;-7),\ \vec{b}=(11;-3;0),\ m=-2,\ n=-5$.

Пример 4.2

Даны векторы $\vec{a}=(-2;1;0)$ и $\vec{b}=(-1;2;7)$. Найти а) единичный вектор $\vec{a}_0$; б) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; в) проекцию вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$; г) координаты вектора $\vec{c}=-2\vec{a}+6\vec{b}$.

Решение

а) Если задан вектор $\vec{a}\left(a_1, a_2, a_3\right)$, то соответствующий ему единичный вектор имеет координаты

$$\vec{a}_0\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right), \qquad (4.3)$$

где $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ – модуль вектора $\vec{a}\left(a_1, a_2, a_3\right)$.

Найдем модуль вектора $\vec{a} = (-2; 1; 0)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

Подставим координаты и модуль вектора $\vec{a}$ в формулу (4.3):

$$\vec{a}_0\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0\right).$$

Ответ: $\vec{a}_0\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0\right)$.

б) Угол φ между двумя векторами можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \qquad (4.4)$$

где $\vec{a} \cdot \vec{b}$ – скалярное произведение данных векторов, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ – их модули.

Координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ даны, поэтому сразу подставим их в формулу (4.4.) и определим косинус искомого угла

$$\cos\varphi = \frac{-2\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 0\cdot 7}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{54}} = \frac{4}{3\sqrt{30}},$$

откуда $\varphi = \arccos\frac{4}{3\sqrt{30}}$.

Ответ: $\arccos\frac{4}{3\sqrt{30}}$.

в) По рис. 6 определяем, что

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi \text{ или } \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

В предыдущем пункте было найдено $|\vec{b}| = 3\sqrt{6}$, $\cos\varphi = \frac{4}{3\sqrt{30}}$,

следовательно,

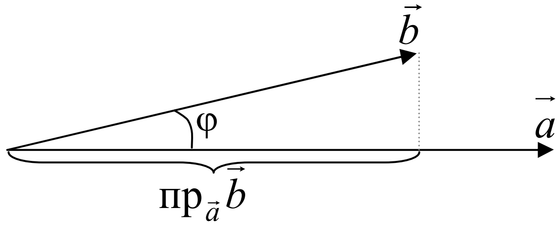


Рис. 6

$$\text{пр}_{\vec a}\vec b = 3\sqrt{6}\cdot\frac{4}{3\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

г) Найдем координаты вектора $\vec c$ в соответствии с правилами сложения и умножения вектора на число и порядком арифметических действий

$$\vec c = -2\vec a + 6\vec b = -2\cdot(-2;1;0) + 6\cdot(-1;2;7) =$$
$$= (4;-2;0) + (-6;12;42) = (-2;10;42).$$

Ответ: $(-2;10;42)$.

Задача 4.3. Даны векторы $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$. Необходимо определить, будут ли векторы $\vec a$ и $\vec c$ коллинеарны, векторы $\vec b$ и $\vec c$ ортогональны.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\vec a = 2\vec i - 3\vec j + \vec k$, $\vec b = 6\vec j + 4\vec k$, $c = 5\vec i + 2\vec j - 3\vec k$;

2) $\vec a = 3\vec i - 4\vec j + \vec k$, $\vec b = \vec i - 2\vec j + 7\vec k$, $c = -1{,}5\vec i - 2\vec j - 0{,}5\vec k$;

3) $\vec a = 2\vec i - 4\vec j - 2\vec k$, $\vec b = 7\vec i + 3\vec j$, $c = -\vec i + 2\vec j + \vec k$;

4) $\vec a = 2\vec i - 6\vec j + 4\vec k$, $\vec b = -7\vec i + 2\vec k$, $c = \vec i - 3\vec j + 2\vec k$;

5) $\vec a = 4\vec i + 2\vec j - \vec k$, $\vec b = 10\vec i + 5\vec j - 2\vec k$, $c = \vec i + 5\vec k$;

6) $\vec a = 3\vec i - 2\vec j + \vec k$, $\vec b = 2\vec j - 3\vec k$, $c = -3\vec i + 2\vec j - \vec k$;

7) $\vec a = 4\vec i - \vec j + 3\vec k$, $\vec b = 2\vec i + 3\vec j - 5\vec k$, $c = 7\vec i + 2\vec j + 4\vec k$;

8) $\vec a = 4\vec i + 2\vec j - 3\vec k$, $\vec b = 2\vec i + \vec k$, $c = -12\vec i - 6\vec j + 9\vec k$;

9) $\vec a = -\vec i + 5\vec k$, $\vec b = -3\vec i + 2\vec j + 2\vec k$, $c = -2\vec i - 4\vec j + \vec k$;

10) $\vec a = 6\vec i - 4\vec j + 6\vec k$, $\vec b = \vec i + -8\vec k$, $c = 9\vec i - 6\vec j + 9\vec k$;

11) $\vec a = 5\vec i - 3\vec j + 4\vec k$, $\vec b = 2\vec i - 4\vec j - 2\vec k$, $c = 3\vec i + 5\vec j - 7\vec k$;

12) $\vec a = 4\vec i + 6\vec j - 2\vec k$, $\vec b = -4\vec i + 3\vec j - 7\vec k$, $c = 6\vec i + 9\vec j - 3\vec k$;

13) $\vec a = 7\vec i - 5\vec k$, $\vec b = -5\vec i + 2\vec j - 2\vec k$, $c = 2\vec i + 3\vec j - 2\vec k$;

14) $\vec a = -4\vec i - 6\vec j + 2\vec k$, $\vec b = -\vec i + 5\vec j - 3\vec k$, $c = 2\vec i + 3\vec j - \vec k$;

15) $\vec a = -3\vec j + 5\vec k$, $\vec b = -4\vec i + 2\vec j - 3\vec k$, $c = 6\vec i + 6\vec j - 4\vec k$;

16) $\vec a = 2\vec i + 3\vec j - 2\vec k$, $\vec b = -3\vec i + 8\vec j$, $c = 8\vec i + 12\vec j - 8\vec k$;

17) $\vec a = -9\vec i + 2\vec k$, $\vec b = 2\vec i - 4\vec j - 2\vec k$, $c = 3\vec i + 5\vec j - 7\vec k$;

18) $\vec a = 3\vec i - 15\vec j + 21\vec k$, $\vec b = 9\vec i - 3\vec j + \vec k$, $c = \vec i - 5\vec j + 7\vec k$;

19) $\vec a = 5\vec i + \vec j - 2\vec k$, $\vec b = -2\vec i + 4\vec j - 2\vec k$, $c = 7\vec i + 4\vec j + \vec k$;

20) $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=-9\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $c=-5\vec{i}+10\vec{j}-20\vec{k}$;

21) $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-7\vec{j}+5\vec{k}$, $c=3\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$;

22) $\vec{a}=\vec{i}-11\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k}$, $c=5\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$;

23) $\vec{a}=4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}$, $c=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$;

24) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$, $c=6\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$;

25) $\vec{a}=-3\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}-22\vec{k}$, $c=3\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$;

26) $\vec{a}=-3\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+6\vec{k}$, $c=6\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$;

27) $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$, $c=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$;

28) $\vec{a}=5\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}$, $c=2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$;

29) $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=-9\vec{i}+4\vec{k}$, $c=3\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$;

30) $\vec{a}=5\vec{i}-6\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+8\vec{j}-6\vec{k}$, $c=3\vec{j}+4\vec{k}$;

Пример 4.3

Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$ и $c=5\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$. Необходимо определить, будут ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ортогональны.

Решение

Координаты векторов пропорциональны тогда и только тогда, когда векторы являются коллинеарными. Проверим пропорциональность координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$

$$\frac{2}{5}\neq\frac{0}{2}\neq\frac{-1}{1},$$

поскольку равенства не верны, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны.

Скалярное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы являются ортогональными. Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot5+1\cdot2-7\cdot1=5+2-7=0,$$

т.к. $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ортогональны.

Ответ: $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны; $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ортогональны.

Раздел V. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

В раздел включены задачи, которые рассматриваются в теме «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»: составление различных уравнений прямых на плоскости и в пространстве; определение взаимного расположения прямых на плоскости, прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве; изображение кривых второго порядка. Необходимо отметить, что в данном разделе представлены задачи экономического содержания, при решении которых применяются сведения из аналитической геометрии на плоскости.

При решении задач аналитической геометрии целесообразно воспользоваться учебными пособиями следующих авторов: Д.В. Клетеника, Н. Ш. Кремера, Д.Т. Письменного, В.И. Малыхина, т.к. в данной литературе рассматривается более широкий круг задач, которые можно использовать для самостоятельной подготовки по данной теме. Применение аналитической геометрии к решению экономических задач изложено в учебных изданиях М.С. Красса и В.И. Ермакова.

Задача 5.1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*. Необходимо

а) написать уравнения сторон треугольника;

б) написать уравнение высоты треугольника проведенной из вершины *C* к стороне *AB* и найти ее длину;

в) написать уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины *B* к стороне *AC*;

г) найти углы треугольника и установить его вид (прямоугольный, остроугольный, тупоугольный);

д) найти длины сторон треугольника и определить его тип (разносторонний, равнобедренный, равносторонний);

е) найти координаты центра тяжести (точка пересечения медиан) треугольника *ABC*;

ж) найти координаты ортоцентра (точка пересечения высот) треугольника *ABC*.

К каждому из пунктов а) – в) решения сделать рисунки в системе координат. На рисунках обозначить соответствующие пунктам задачи линии и точки.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $A(3;4), B(2;-1), C(-5;0)$; 4) $A(-3;-4), B(-6;7), C(-1;1)$;

2) $A(-4;-5), B(3;3), C(5;-2)$; 5) $A(4;-5), B(2;2), C(7;4)$;

3) $A(-3;3), B(4;-1), C(-2;-4)$; 6) $A(-3;4), B(-2;-1), C(7;1)$;

7) $A(3;-2), B(-5;-4), C(-1;6)$;
8) $A(2;5), B(-3;4), C(-2;-3)$;
9) $A(-3;2), B(-2;-5), C(6;-1)$;
10) $A(6;-4), B(-3;-7), C(-1;2)$;
11) $A(-2;-1), B(7;3), C(4;-3)$;
12) $A(3;4), B(6;2), C(1;1)$;
13) $A(-4;-5), B(-2;2), C(2;-2)$;
14) $A(3;-4), B(2;1), C(-1;-3)$;
15) $A(-4;5), B(3;-3), C(5;2)$;
16) $A(-6;-4), B(3;-7), C(1;2)$;
17) $A(3;2), B(2;-5), C(-6;-1)$;
18) $A(2;1), B(-7;3), C(-4;-3)$;
19) $A(4;-5), B(-3;3), C(-5;-2)$;
20) $A(3;5), B(-4;-3), C(2;-4)$;
21) $A(-3;-2), B(5;-4), C(1;6)$;
22) $A(-2;5), B(3;4), C(4;-4)$;
23) $A(-3;-5), B(4;2), C(-2;4)$;
24) $A(3;2), B(-5;4), C(-1;-6)$;
25) $A(2;-5), B(-3;-4), C(2;4)$;
26) $A(-3;-2), B(-2;5), C(6;1)$;
27) $A(-6;4), B(3;7), C(1;-2)$;
28) $A(2;1), B(-7;-3), C(-4;3)$;
29) $A(-3;4), B(-6;-7), C(1;-1)$;
30) $A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)$.

Пример 5.1

Даны координаты вершин треугольника *ABC*: $A(4;3), B(-2;1), C(3;-4)$. Необходимо а) написать уравнения сторон треугольника; б) написать уравнение высоты треугольника проведенной из вершины *C* к стороне *AB* и найти ее длину; в) написать уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины *B* к стороне *AC*; г) найти длины сторон треугольника и определить его тип (разносторонний, равнобедренный, равносторонний); д) найти углы треугольника и установить его вид (прямоугольный, остроугольный, тупоугольный); е) найти координаты центра тяжести (точка пересечения медиан) треугольника *ABC*; ж) найти координаты ортоцентра (точка пересечения высот) треугольника *ABC*.

Решение

а) Для каждой стороны треугольника известны координаты двух точек, которые лежат на искомых линиях, значит уравнения сторон треугольника – уравнения прямых, проходящих через две заданные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \qquad (5.1)$$

где $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ соответствующие координаты точек.

Таким образом, подставляя в формулу (5.1) координаты соответствующих прямым точек получаем

$$AB:\ \frac{x-4}{-2-4}=\frac{y-3}{1-3},\quad AC:\ \frac{x-4}{3-4}=\frac{y-3}{-4-3},\quad BC:\ \frac{x+2}{3+2}=\frac{y-1}{-4-1},$$

откуда после преобразований записываем уравнения сторон

$$AB:\ x-3y+5=0,\quad AC:\ 7x-y-25=0,\quad BC:\ x+y+1=0.$$

На рис. 7 изобразим соответствующие сторонам треугольника ABC прямые.

Ответ:

AB: $x-3y+5=0$, AC: $7x-y-25=0$, BC: $x+y+1=0$.

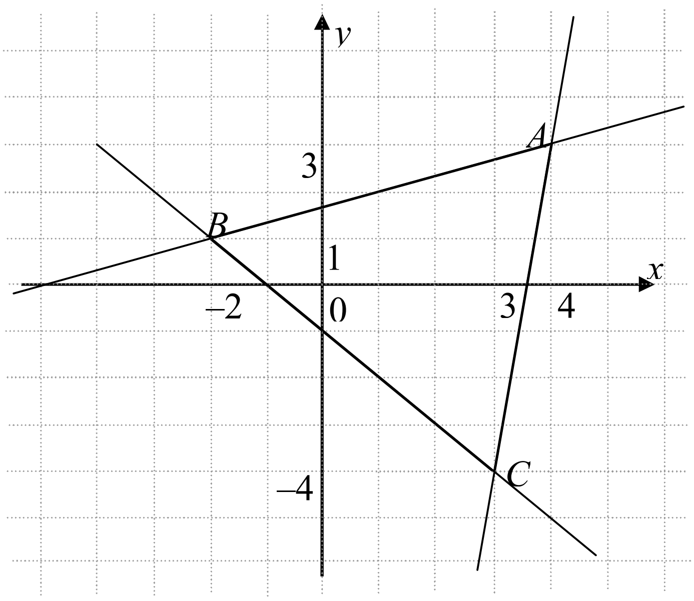


Рис. 7

б) Пусть CH – высота, проведенная из вершины C к стороне AB. Поскольку CH проходит через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, то составим уравнение прямой по следующей формуле

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0, \qquad (5.2)$$

где $(a;b)$ – координаты вектора перпендикулярного искомой прямой, $(x_0;y_0)$ – координаты точки, принадлежащей этой прямой. Найдем координаты вектора, перпендикулярного прямой CH, и подставим в формулу (5.2)

$$\overrightarrow{AB}(-6;-2)\perp CH,\ C(3;-4)\in CH,$$
$$CH:\quad -6(x-3)-2(y+4)=0,$$
$$3(x-3)+(y+4)=0,$$
$$3x+y-5=0.$$

Найдем длину высоты CH как расстояние от точки C до прямой AB

$$CH=\frac{|ax_C+by_C+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (5.3)$$

где $ax+by+c=0$ – уравнение прямой AB, $(x_C;y_C)$ – координаты точки C.

В предыдущем пункте было найдено

$$AB:\ x-3y+5=0.$$

Подставив данные в формулу (5.3), получим

$$CH = \frac{\left|3 - 3\cdot(-4) + 5\right|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}},$$

На рис. 8 изобразим треугольник и найденную высоту CH.

Ответ: $CH: \quad 3x + y - 5 = 0$.

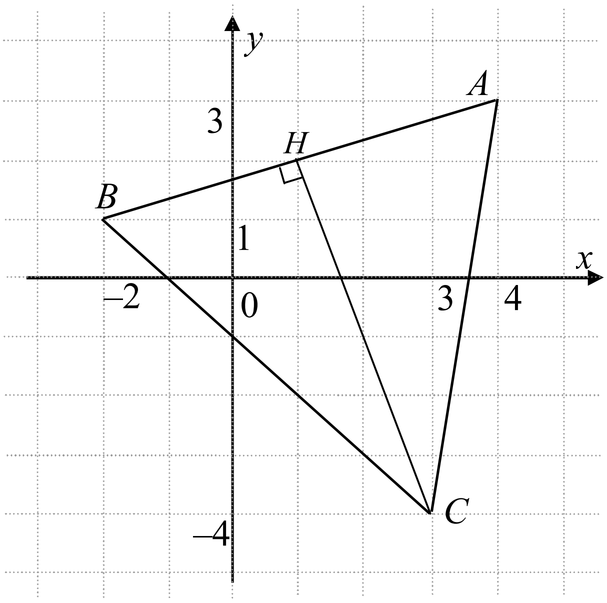


Рис. 8

в) медиана BB_1 треугольника ABC делит сторону AC на две равные части, т.е. точка B_1 является серединой отрезка AC. Исходя из этого, можно найти координаты $\left(x_{B_1}; y_{B_1}\right)$ точки B_1

$$x_{B_1} = \frac{x_A + x_C}{2},\ y_{B_1} = \frac{y_A + y_C}{2}, \tag{5.4}$$

где $(x_A; y_A)$ и $(x_C; y_C)$ – координаты соответственно точек A и C, подставив которые в формулы (5.4), получим

$$x_{B_1} = \frac{4+3}{2} = 3{,}5;\ y_{B_1} = \frac{3+(-4)}{2} = -0{,}5.$$

Уравнение медианы BB_1 треугольника ABC составим как уравнение прямой, проходящей через точки $B(-2; 1)$ и $B_1(3{,}5; -0{,}5)$ по формуле (5.1)

$$BB_1:\quad \frac{x-(-2)}{3{,}5-(-2)} = \frac{y-1}{-0{,}5-1},$$

$$3x + 11y - 5 = 0.$$

Ответ: $BB_1: 3x + 11y - 5 = 0$ (рис. 9).

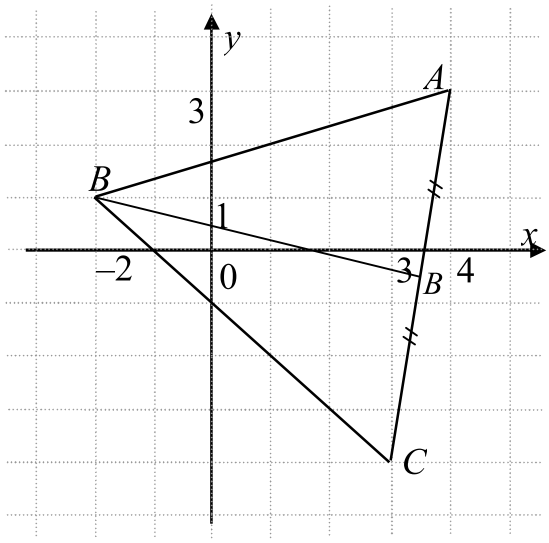


Рис. 9

г) Длины сторон треугольника найдем как длины соответствующих векторов, т.е.

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{10}\,,\ AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 5\sqrt{2}\,,\ BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 5\sqrt{2}\,.$$

Стороны AC и BC треугольника ABC равны, значит, треугольник является равнобедренным с основанием AB.

Ответ: треугольник ABC равнобедренный с основанием AB;

$AB = 2\sqrt{10}\,,\ AC = BC = 5\sqrt{2}\,.$

д) Углы треугольника ABC найдем как углы между векторами, исходящими из соответствующих вершин данного треугольника, т.е.

$$\angle ABC = \angle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right),\ \angle BAC = \angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right),\ \angle ACB = \angle\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right).$$

Поскольку треугольник равнобедренный с основанием AB, то

$$\angle ABC =,\ \angle BAC$$

Углы между векторами вычислим по формуле (4.4), для которой потребуются скалярные произведения векторов $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Найдем координаты и модули векторов, необходимых для вычисления углов

$$\overrightarrow{BA}(6;2),\ \left|\overrightarrow{BA}\right| = 2\sqrt{10},\ \overrightarrow{BC}(5,-5),\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = 5\sqrt{2}\,;$$

$$\overrightarrow{CA}(1,7),\ \left|\overrightarrow{CA}\right| = 5\sqrt{2}\,,\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC},\ \left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|.$$

Подставляя найденные данные в формулу (4.4), получим

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{6\cdot 5 + 2\cdot(-5)}{2\sqrt{10}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1\cdot(-5) + 7\cdot 5}{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{3}{5},$$

Поскольку значения косинусов всех найденных углов положительны, то треугольник ABC является остроугольным.

Ответ: треугольник ABC остроугольный;

$$\cos\angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\angle ACB = \frac{3}{5}.$$

е) Пусть M – центр тяжести треугольника ABC, тогда координаты $(x_M; y_M)$ точки M можно найти, по формулам (5.5)

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \qquad (5.5)$$

где $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ и $(x_C; y_C)$ – координаты соответственно точек A, B и C, следовательно,

$$x_M = \frac{4 + (-2) + 3}{3} = \frac{5}{3},\ y_M = \frac{3 + 1 + (-4)}{3} = 0.$$

Ответ: $M\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ – центр тяжести треугольника ABC.

ж) Пусть R – ортоцентр треугольника ABC. Найдем координаты точки R как координаты точки пересечения высот треугольника. Уравнение высоты CH было найдено в пункте **б)**. Найдем уравнение высоты AH_1:

$$\overrightarrow{BC}(5; -5) \perp AH_1,\ A(4;3) \in AH_1,$$
$$AH_1:\quad 5(x-4) - 5(y-3) = 0,$$
$$x - y - 1 = 0.$$

Поскольку $R = CH \cap AH_1$, то решение системы

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

является координатами точки R, откуда находим $R\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $R\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ – ортоцентр треугольника ABC.

Задача 5.2. Фиксированные издержки на предприятии при выпуске некоторой продукции составляют F руб. в месяц, переменные издержки – V_0 руб. за единицу продукции, при этом выручка составляет R_0 руб. за единицу изготовленной продукции. Составить функцию прибыли $P(q)$ (q – количество произведенной продукции); построить ее график и определить точку безубыточности.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $F = 10\,000, \quad V_0 = 35, \quad R_0 = 50$;
2) $F = 4000, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 15$;
3) $F = 12\,000, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 55$;
4) $F = 7000, \quad V_0 = 20, \quad R_0 = 30$;
5) $F = 1000, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 15$;
6) $F = 11\,500, \quad V_0 = 45, \quad R_0 = 55$;
7) $F = 3000, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 10$;
8) $F = 7500, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 45$;
9) $F = 16\,000, \quad V_0 = 50, \quad R_0 = 65$;
10) $F = 13\,000, \quad V_0 = 40, \quad R_0 = 50$;
11) $F = 11\,000, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 45$;
12) $F = 13\,500, \quad V_0 = 25, \quad R_0 = 30$;
13) $F = 4000, \quad V_0 = 10, \quad R_0 = 20$;
14) $F = 6500, \quad V_0 = 20, \quad R_0 = 25$;
15) $F = 10\,500, \quad V_0 = 40, \quad R_0 = 60$;
16) $F = 2000, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 10$;
17) $F = 15\,000, \quad V_0 = 50, \quad R_0 = 60$;
18) $F = 18\,000, \quad V_0 = 70, \quad R_0 = 90$;
19) $F = 9000, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 55$;
20) $F = 9500, \quad V_0 = 25, \quad R_0 = 35$;
21) $F = 6000, \quad V_0 = 15, \quad R_0 = 25$;
22) $F = 18\,500, \quad V_0 = 65, \quad R_0 = 75$;
23) $F = 8500, \quad V_0 = 25, \quad R_0 = 40$;
24) $F = 2500, \quad V_0 = 15, \quad R_0 = 20$;
25) $F = 8000, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 45$;
26) $F = 19\,500, \quad V_0 = 65, \quad R_0 = 85$;
27) $F = 5000, \quad V_0 = 15, \quad R_0 = 25$;
28) $F = 14\,000, \quad V_0 = 45, \quad R_0 = 50$;
29) $F = 19\,000, \quad V_0 = 70, \quad R_0 = 75$;
30) $F = 1500, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 25$.

Пример 5.2

Фиксированные издержки на предприятии при выпуске некоторой продукции составляют $F = 1500$ руб. в месяц, переменные издержки – $V_0 = 12$ руб. за единицу продукции, при этом выручка составляет $R_0 = 22$ руб. за единицу изготовленной продукции. Составить функцию прибыли $P(q)$ (q – количество произведенной продукции); построить ее график и определить точку безубыточности.

Решение

Вычислим совокупные издержки на производстве при выпуске q единиц некоторой продукции

$$C(q) = F + V_0 q \quad \Rightarrow \quad C(q) = 1500 + 12q.$$

Если будет продано q единиц продукции, то совокупный доход составит

$$R(q) = R_0 q \quad \Rightarrow \quad R(q) = 22q.$$

Исходя из полученных функций совокупного дохода и совокупных издержек, найдем функцию прибыли

$$P(q) = R(q) - C(q),$$
$$P(q) = 22q - (1500 + 12q),$$
$$P(q) = 10q - 1500.$$

Точка безубыточности – точка, в которой прибыль равна нулю, или точка, в которой совокупные издержки равны совокупному доходу

$$C(q) = R(q),$$
$$1500 + 12q = 22q,$$

откуда находим

$q = 150$ – точка безубыточности.

Для построения графика (рис. 10) функции прибыли найдем еще одну точку

$$q = 300, \quad P(300) = 1500.$$

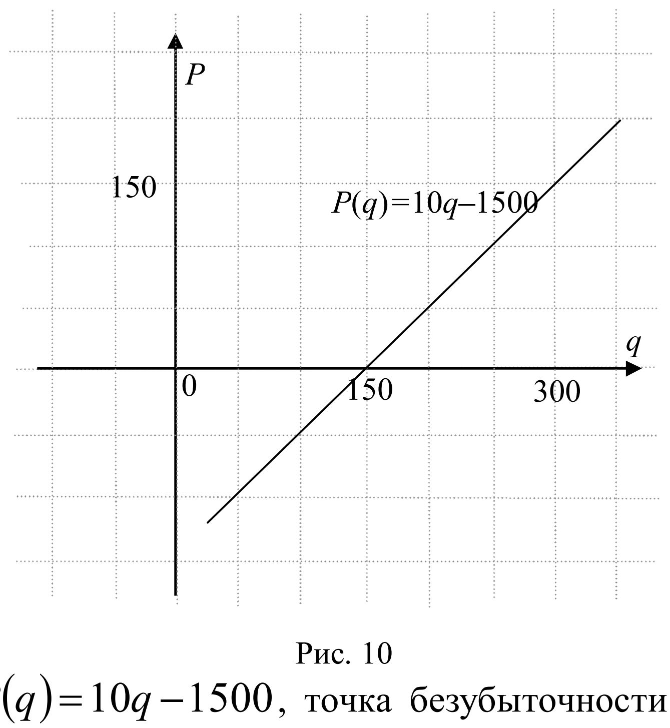


Рис. 10

Ответ: функция прибыли $P(q) = 10q - 1500$, точка безубыточности $q = 150$.

Задача 5.3. Законы спроса и предложения на некоторый товар соответственно определяются уравнениями $p=p_D(q)$, $p=p_S(q)$, где p – цена на товар, q – количество товара. Предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_D, а предложение – только ценой p_S, получаемой поставщиками. Необходимо

а) определить точку рыночного равновесия;

б) точку равновесия после введения налога, равного t. Определить увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж;

в) найти субсидию s, которая приведет к увеличению объема продаж на q_0 ед. относительно изначального (определенного в пункте а));

г) найти новую точку равновесия и доход правительства при введении налога, пропорционального цене и равного N%;

д) определить, сколько денег будет израсходовано правительством на скупку излишка при установлении минимальной цены, равной p_0.

К каждому пункту решения сделать рисунок в системе координат. На рисунке обозначить соответствующие пункту задачи линии и точки.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $p_D=-2q+10,\quad p_S=q+4,\quad t=2,\quad q_0=2,\quad N=10,\quad p_0=8$;
2) $p_D=-3q+13,\quad p_S=q+1,\quad t=3,\quad q_0=1,\quad N=25,\quad p_0=9$;
3) $p_D=-q+7,\quad p_S=q+1,\quad t=1,\quad q_0=2,\quad N=15,\quad p_0=6$;
4) $p_D=-2q+12,\quad p_S=2q+4,\quad t=2,\quad q_0=3,\quad N=20,\quad p_0=10$;
5) $p_D=-3q+17,\quad p_S=2q+2,\quad t=3,\quad q_0=1,\quad N=25,\quad p_0=8$;
6) $p_D=-3q+9,\quad p_S=2q+4,\quad t=1,\quad q_0=1,\quad N=15,\quad p_0=7$;
7) $p_D=-2q+10,\quad p_S=q+1,\quad t=1,\quad q_0=1,\quad N=10,\quad p_0=8$;
8) $p_D=-q+15,\quad p_S=2q+3,\quad t=2,\quad q_0=7,\quad N=5,\quad p_0=5$;
9) $p_D=-2q+12,\quad p_S=3q+2,\quad t=3,\quad q_0=2,\quad N=20,\quad p_0=3$;
10) $p_D=-3q+18,\quad p_S=2q+3,\quad t=1,\quad q_0=2,\quad N=15,\quad p_0=7$;
11) $p_D=-q+13,\quad p_S=4q+3,\quad t=1,\quad q_0=6,\quad N=30,\quad p_0=9$;
12) $p_D=-q+15,\quad p_S=2q+6,\quad t=1,\quad q_0=3,\quad N=20,\quad p_0=5$;
13) $p_D=-q+12,\quad p_S=q+8,\quad t=2,\quad q_0=5,\quad N=5,\quad p_0=6$;
14) $p_D=-3q+18,\quad p_S=q+2,\quad t=3,\quad q_0=1,\quad N=10,\quad p_0=9$;
15) $p_D=-q+6,\quad p_S=q+2,\quad t=2,\quad q_0=2,\quad N=15,\quad p_0=5$;
16) $p_D=-q+7,\quad p_S=2q+1,\quad t=1,\quad q_0=2,\quad N=20,\quad p_0=7$;
17) $p_D=-4q+17,\quad p_S=q+2,\quad t=3,\quad q_0=1,\quad N=15,\quad p_0=6$;

18) $p_D = -q + 8, \quad p_S = 2q + 2, \quad t = 1, \quad q_0 = 1, \quad N = 30, \quad p_0 = 4$;
19) $p_D = -2q + 17, \quad p_S = 2q + 1, \quad t = 3, \quad q_0 = 3, \quad N = 5, \quad p_0 = 8$;
20) $p_D = -4q + 20, \quad p_S = 4q + 4, \quad t = 3, \quad q_0 = 2, \quad N = 15, \quad p_0 = 3$;
21) $p_D = -q + 10, \quad p_S = 3q + 2, \quad t = 2, \quad q_0 = 5, \quad N = 10, \quad p_0 = 7$;
22) $p_D = -2q + 19, \quad p_S = q + 1, \quad t = 4, \quad q_0 = 2, \quad N = 30, \quad p_0 = 10$;
23) $p_D = -q + 13, \quad p_S = 3q + 1, \quad t = 1, \quad q_0 = 6, \quad N = 10, \quad p_0 = 6$;
24) $p_D = -q + 14, \quad p_S = 2q + 5, \quad t = 3, \quad q_0 = 6, \quad N = 25, \quad p_0 = 5$;
25) $p_D = -q + 15, \quad p_S = 3q + 7, \quad t = 2, \quad q_0 = 5, \quad N = 5, \quad p_0 = 4$;
26) $p_D = -2q + 19, \quad p_S = 3q + 4, \quad t = 3, \quad q_0 = 3, \quad N = 25, \quad p_0 = 5$;
27) $p_D = -2q + 18, \quad p_S = q + 6, \quad t = 4, \quad q_0 = 2, \quad N = 5, \quad p_0 = 6$;
28) $p_D = -q + 9, \quad p_S = q + 1, \quad t = 1, \quad q_0 = 3, \quad N = 10, \quad p_0 = 7$;
29) $p_D = -q + 9, \quad p_S = 2q + 3, \quad t = 2, \quad q_0 = 4, \quad N = 25, \quad p_0 = 3$;
30) $p_D = -2q + 11, \quad p_S = q + 2, \quad t = 3, \quad q_0 = 1, \quad N = 30, \quad p_0 = 4$.

Пример 5.3

Законы спроса и предложения на некоторый товар соответственно определяются уравнениями $p_D = -2q + 9$, $p_S = q + 3$, где p – цена на товар, q – количество товара. Предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_D, а предложение – только ценой p_S, получаемой поставщиками. Необходимо

а) определить точку рыночного равновесия;

б) точку равновесия после введения налога $t = 1$. Определить увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж;

в) найти субсидию s, которая приведет к увеличению объема продаж на $q_0 = 2$ ед. относительно изначального (определенного в пункте а));

г) найти новую точку равновесия и доход правительства при введении налога, пропорционального цене и равного $N = 15\%$;

д) определить, сколько денег будет израсходовано правительством на скупку излишка при установлении минимальной цены, $p_0 = 6$.

Решение

а) Находим точку рыночного равновесия из условия $p_D = p_S$ (рис. 11):

$$-2q + 9 = q + 3,$$
$$-3q = -6,$$
$$q = 2; \; p = 5.$$

Ответ: $M(2;5)$ – точка рыночного равновесия.

б) Если введен налог $t=1$, то система уравнений для определения точки равновесия примет вид

$$D: \quad p_D = -2q+9,$$
$$S: \quad p_S = q+3,$$
$$p_D = p_S + 1.$$

Используя соотношение между ценой на рынке p_C и ценой p_S, получаемой поставщиками, имеем следующие выражения для определения точки рыночного равновесия

$$-2q+9 = q+4,$$
$$p_D = q+4.$$

Откуда находим новую точку рыночного равновесия

$$M'\left(\frac{5}{3};\frac{17}{3}\right) \text{ (рис. 12).}$$

Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличилась на $\frac{17}{3}-5=\frac{2}{3}$ ден. ед., а равновесный объем уменьшился на $2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$ ед.

Ответ: $M'\left(\frac{5}{3};\frac{17}{3}\right)$ – точка равновесия после введения налога $t=1$, равновесная цена увеличилась на $\frac{2}{3}$ ден. ед., равновесный объем уменьшился на $\frac{1}{3}$ ед.

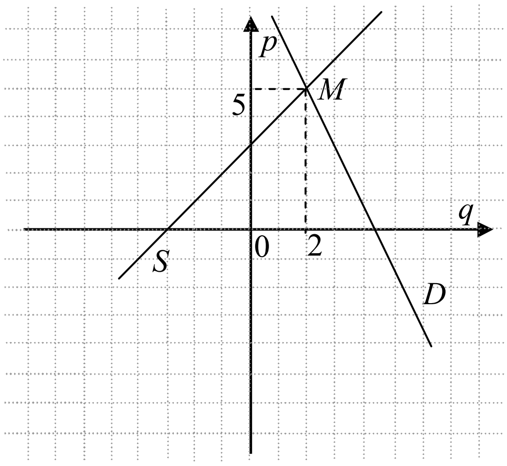


Рис. 11

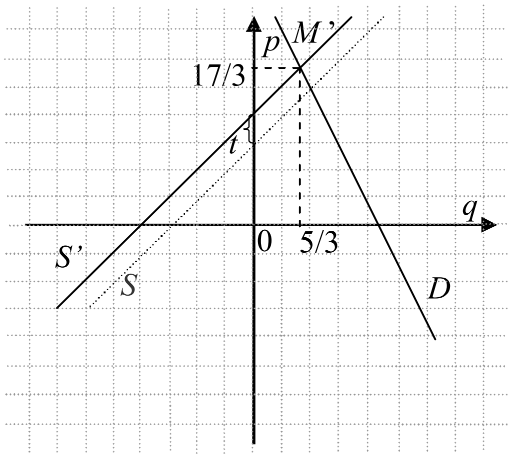


Рис. 12

в) Если предоставляется субсидия, то система для определения точки равновесия имеет вид

$$D: \quad p_D = -2q + 9,$$
$$S: \quad p_S = q + 3,$$
$$p_D = p_S - s.$$

Новый объем продаж равен $2 + 2 = 4$ единицы, подставляем $q = 4$ в систему, находим

$$p_D = 1; \quad p_S = 7; \quad s = 7 - 1 = 6.$$

Ответ: субсидия, которая приведет к увеличению объема продаж на 2 ед. относительно изначального, должна быть равна 6 ден. ед. (рис. 13).

г) Если налог составляет 15%, то вся рыночная цена составляет 115%, из них 100% получают поставщики товара, 15% – государство. Итак, поставщики получают

$$p_S = \frac{100}{115} p_D = \frac{20}{23} p_D.$$

Таким образом, система для определения новой точки рыночного равновесия имеет вид

$$\begin{cases} p_D = -2q + 9, \\ \dfrac{20}{23} p_D = q + 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим новую точку рыночного равновесия

$$M''\left(\frac{37}{21}; \frac{115}{21}\right),$$

при этом доход правительства R будет равен

$$R = \left(1 - \frac{20}{23}\right) \cdot \frac{37}{21} \cdot \frac{115}{21} = \frac{185}{147} = 1\frac{38}{147}.$$

На рис. 14 доход правительства соответствует площади заштрихованного прямоугольника.

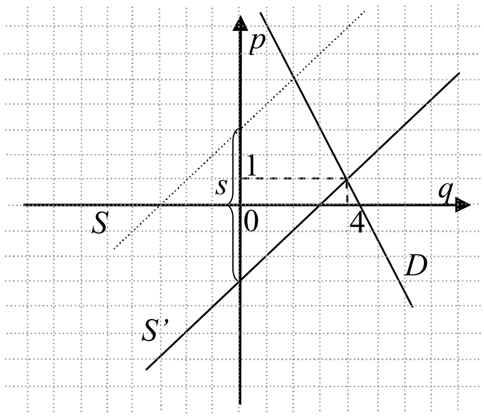


Рис. 13

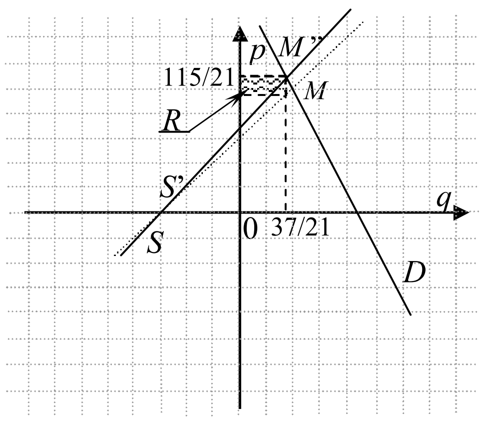


Рис. 14

Ответ: $M''\left(\frac{37}{21};\frac{115}{21}\right)$ – точка равновесия, $R=1\frac{38}{147}$ ден. ед. – доход правительства при введении налога, пропорционального цене и равного 15%.

д) Если установлена минимальная цена, то из уравнений спроса и предложения можно найти объемы спроса и предложения, соответствующие данной цене. Если минимальная цена выше равновесной цены, то объем предложения превышает объем спроса, тогда разницу между ними скупает правительство.

При $p_0=6$ находим

$$q_D=\frac{-p_0+9}{2}=\frac{-6+9}{2}=1{,}5$$

$$q_S=p_0-3=6-3=3.$$

Таким образом, затраты правительства составят

$$(q_S-q_D)\cdot p_0=(3-1{,}5)\cdot 6=9.$$

На рис. 15 затраты правительства соответствуют площади заштрихованного прямоугольника.

Ответ: правительством будет израсходовано 9 ден. ед. на скупку излишка при установлении минимальной цены, равной 6.

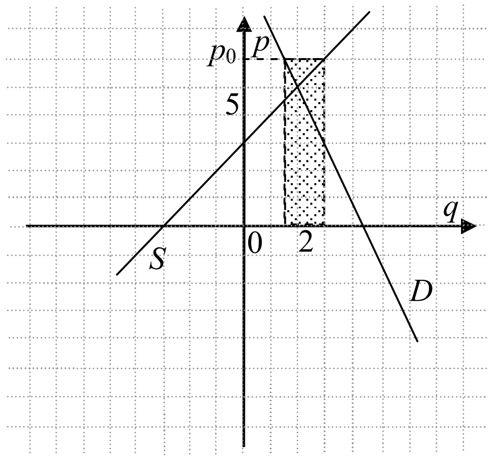


Рис. 15

Задача 5.4. Даны четыре точки *A*, *B*, *C*, *D*. Необходимо

а) написать уравнения плоскостей *ABC* и *BCD*;

б) написать уравнения прямых *BC* и *AD*;

в) найти расстояние от точки *A* до плоскости *BCD*.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $A(5;2;7)$, $B(7;-6;-9)$, $C(-7;-6;3)$, $D(1;-5;2)$;

2) $A(-2;-5;-1)$, $B(-6;-7;9)$, $C(4;-5;1)$, $D(2;1;4)$;

3) $A(-6;-3;-5)$, $B(5;1;7)$, $C(3;5;-1)$, $D(4;-2;9)$;

4) $A(7;4;2)$, $B(-5;3;-9)$, $C(1;-5;3)$, $D(7;-9;1)$;
5) $A(-8;2;7)$, $B(3;-5;9)$, $C(2;4;-6)$, $D(4;6;-5)$;
6) $A(4;3;1)$, $B(2;7;5)$, $C(-4;-2;4)$, $D(2;-3;-5)$;
7) $A(-9;-7;4)$, $B(-4;3;-1)$, $C(5;-4;2)$, $D(3;4;4)$;
8) $A(3;5;3)$, $B(-3;2;8)$, $C(-3;-2;6)$, $D(7;8;-2)$;
9) $A(4;2;3)$, $B(-5;-4;2)$, $C(5;-7;-4)$, $D(6;4;-7)$;
10) $A(-4;-2;-3)$, $B(2;5;7)$, $C(6;3;-1)$, $D(6;-4;1)$;
11) $A(3;4;5)$, $B(1;2;3)$, $C(-2;-3;6)$, $D(3;-6;-3)$;
12) $A(-7;-5;6)$, $B(-2;5;-3)$, $C(3;-2;4)$, $D(1;2;2)$;
13) $A(1;3;1)$, $B(-1;4;6)$, $C(-2;-3;4)$, $D(3;4;-4)$;
14) $A(2;4;1)$, $B(-3;-2;4)$, $C(3;5;-2)$, $D(4;2;-3)$;
15) $A(-5;-3;-4)$, $B(1;4;6)$, $C(3;2;-2)$, $D(8;-2;4)$;
16) $A(3;4;2)$, $B(-2;3;-5)$, $C(4;-3;6)$, $D(6;-5;3)$;
17) $A(-4;6;3)$, $B(3;-5;1)$, $C(2;6;-4)$, $D(2;4;-5)$;
18) $A(7;5;8)$, $B(-4;-5;3)$, $C(2;-3;5)$, $D(5;1;-4)$;
19) $A(3;-2;6)$, $B(-6;-2;3)$, $C(1;1;-4)$, $D(4;6;-7)$;
20) $A(-5;-4;-3)$, $B(7;3;-1)$, $C(6;-2;0)$, $D(3;2;-7)$;
21) $A(3;-5;-2)$, $B(-4;2;3)$, $C(1;5;7)$, $D(-2;-4;5)$;
22) $A(7;4;9)$, $B(1;-2;-3)$, $C(-5;-3;0)$, $D(1;-3;4)$;
23) $A(-4;-7;-3)$, $B(-4;-5;7)$, $C(2;-3;3)$, $D(3;2;1)$;
24) $A(-4;-5;-3)$, $B(3;1;2)$, $C(5;7;-6)$, $D(6;-1;5)$;
25) $A(5;2;4)$, $B(-3;5;-7)$, $C(1;-5;8)$, $D(9;-3;5)$;
26) $A(-6;4;5)$, $B(5;-7;3)$, $C(4;2;-8)$, $D(2;8;-3)$;
27) $A(5;3;6)$, $B(-3;-4;4)$, $C(5;-6;8)$, $D(4;0;-3)$;
28) $A(5;-4;4)$, $B(-4;-6;5)$, $C(3;2;-7)$, $D(6;2;-9)$;
29) $A(-7;-6;-5)$, $B(5;1;-3)$, $C(8;-4;0)$, $D(3;4;-7)$;
30) $A(7;-1;-2)$, $B(1;7;8)$, $C(3;7;9)$, $D(-3;-5;2)$.

Пример 5.4

Даны четыре точки $A(-6;2;-5)$, $B(-1;1;0)$, $C(3;0;-1)$, $D(1;-2;2)$. **Необходимо**

а) написать уравнения плоскостей *ABC* и *BCD*;

б) написать уравнения прямых *BC* и *AD*;

в) найти расстояние от точки *A* до плоскости *BCD*.

Решение

а) Для плоскостей, уравнения которых необходимо написать, известны координаты точек, принадлежащих этим плоскостям, значит, для составления уравнений воспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \tag{5.6}$$

где $(x_1;y_1;z_1)$, $(x_2;y_2;z_2)$, $(x_3;y_3;z_3)$ – координаты точек, принадлежащих искомой плоскости.

Подставляя координаты соответствующих каждой плоскости точек в формулу (5.6), получаем

$$ABC:\ \begin{vmatrix} x+6 & y-2 & z+5 \\ -1+6 & 1-2 & 0+5 \\ 3+6 & 0-2 & -1+5 \end{vmatrix}=0,\ BCD:\ \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-0 \\ 3+1 & 0-1 & -1-0 \\ 1+1 & -2-1 & 2-0 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель и упрощая полученные выражения, приводим уравнения плоскостей к общему виду

$$ABC:\ (x+6)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-(y-2)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}+(z+5)\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x+6)\cdot 6-(y-2)\cdot(-25)+(z+5)\cdot(-1)=0,$$

$$6x+25y-z-19=0.$$

$$BCD:\ (x+1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x+1)\cdot(-5)-(y-1)\cdot 10+z\cdot(-10)=0,$$

$$-5x-10y-10z+5=0,$$

$$x+2y+2z-1=0.$$

Ответ: $ABC:\ 6x+25y-z-19=0$,

$BCD:\ x+2y+2z-1=0$.

б) Уравнения BC и AD составим как уравнения прямых, проходящих через две заданные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \tag{5.7}$$

где $(x_1;y_1;z_1)$, $(x_2;y_2;z_2)$ – координаты точек, принадлежащих искомым прямым.

Таким образом, подставляя координаты соответствующих прямым точек в формулу (5.7), получаем

$$BC:\ \frac{x+1}{3+1}=\frac{y-1}{0-1}=\frac{z-0}{-1-0},$$

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}.$$

$$AD:\ \frac{x+6}{1+6}=\frac{y-2}{-2-2}=\frac{z+5}{2+5},$$

$$\frac{x+6}{7}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+5}{7}.$$

Ответ: $BC:\ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$,

$AD:\ \dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+5}{7}$.

в) Расстояние $\rho(M,\alpha)$ от точки M до плоскости α найдем по следующей формуле

$$d=\rho(M,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad (5.8)$$

где $Ax+By+Cz+D=0$ – уравнение плоскости α, (x_0, y_0, z_0) – координаты точки M.

Уравнение плоскости BCD было найдено ранее в пункте **а)**, координаты точки A даны в условии задачи

$$BCD:\ x+2y+2z-1=0,\ A(-6, 2, -5),$$

подставляем эти данные в формулу (5.8)

$$\rho(A,\ BCD)=\frac{|1\cdot(-6)+2\cdot 2+2\cdot(-5)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-13|}{\sqrt{9}}=\frac{13}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{13}{9}$.

Задача 5.5. Даны уравнения плоскостей α и β, а также уравнения прямых l_1 и l_2. Определить

а) взаимное расположение плоскостей α и β и найти угол между ними;

б) взаимное расположение прямых l_1 и l_2, найти угол между ними;

в) взаимное расположение прямой l_1 и плоскости β, найти угол между прямой l_1 и плоскостью β. В том случае, если прямая и плоскость параллельны, найти расстояние между ними; в случае, если

прямая и плоскость пересекаются (в частности перпендикулярны) – найти точку их пересечения.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\alpha: 2x-3y+2z-5=0;\ \beta: -x+1{,}5y-z-1=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1{,}5}=\frac{z}{1};\ l_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{4};$$

2) $\alpha: 2x-3y+2z-5=0;\ \beta: 3x-2y-6z-3=0;$

$$l_1: \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{1};\ l_2: \frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{4};$$

3) $\alpha: 3x-y+2z-5=0;\ \beta: -x+y-z-1=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-4};\ l_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1};$$

4) $\alpha: x-y+2z-2=0;\ \beta: -x+2y-3z-1=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2};\ l_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{4};$$

5) $\alpha: x-y+2z-1=0;\ \beta: -2x+y+3z-1=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1};\ l_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-4};$$

6) $\alpha: x-2y+2z-1=0;\ \beta: -2x+2y-4z-1=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2};\ l_2: \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1};$$

7) $\alpha: x-2y+2z-1=0;\ \beta: x+4y+1{,}5z-3=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2};\ l_2: \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1};$$

8) $\alpha: 2x-y+z-5=0;\ \beta: 4x-2y+2z-7=0;$

$$l_1: \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{1};\ l_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{4};$$

9) $\alpha: x-3y+3z-5=0;\ \beta: 3x+2y+z-1=0;$

$$l_1: \frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1};\ l_2: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3};$$

10) $\alpha: 3x-2y+z=0;\ \beta: -x+z-1=0;$

$$l_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3};\ l_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1};$$

11) $\alpha: -y+2z-2=0;\ \beta: -x-3z-1=0;$

$$l_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-2};\ l_2: \frac{x}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{4};$$

12) $\alpha: x-3y+2z-1=0;\ \beta: x+2y-1=0;$

$$l_1: \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{3};\ l_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{-2};$$

13) $\alpha: x-2y+z-1=0;\ \beta: x+2y-z-3=0;$

$$l_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1};\ l_2: \frac{x-2}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1};$$

14) $\alpha: x-2y+z-1=0;\ \beta: x+4y+z=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{2};\ l_2: \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1};$$

15) $\alpha: -y+2z-5=0;\ \beta: 2y-4z+1=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2};\ l_2: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{4};$$

16) $\alpha: 2x-3y+2z-5=0;\ \beta: 3x-2y-6z-3=0;$

$$l_1: \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1};\ l_2: \frac{x}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{4};$$

17) $\alpha: -y+2z-5=0;\ \beta: -x+y-2z=0;$

$$l_1: \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{0};\ l_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1};$$

18) $\alpha: -3x-y+z-2=0;\ \beta: -x+2y-3z=0;$

$$l_1: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2};\ l_2: \frac{x-2}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{4};$$

19) $\alpha: x+2z-1=0;\ \beta: 3x+2y+3z-2=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{0}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+1}{2};\ l_2: \frac{x}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-3};$$

20) $\alpha: x+2z-7=0;\ \beta: y+3z-5=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{3};\ l_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-4};$$

21) $\alpha: x-2y-1=0;\ \beta: x+4y+z=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z+5}{2};\ l_2: \frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1};$$

22) $\alpha: 2x+z-5=0;\ \beta: -4x-2z+7=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{-2};\ l_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{4};$$

23) $\alpha: x-y+z-5=0;\ \beta: x-2y-3z-2=0;$

$$l_1: \frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{1};\ l_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{4};$$

24) $\alpha: 3x-y+z-5=0;\ \beta: x+2y-3z+1=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{3{,}5};\ l_2: \frac{x}{-3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1};$$

25) $\alpha: x-y-2z=0;\ \beta: -x+2y-1=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{1};\ l_2: \frac{x}{-9}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{3};$$

26) $\alpha: x+y+z-1=0;\ \beta: -2x+y+5=0;$

$$l_1: \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1};\ l_2: \frac{x+3}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-2};$$

27) $\alpha: x-2y=0;\ \beta: -2x+y-3z-1=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-0{,}5}=\frac{z}{1{,}5};\ l_2: \frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{1};$$

28) $\alpha: x+2z-1=0;\ \beta: 4y+z-3=0;$

$$l_1: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{4};\ l_2: \frac{x-3}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1};$$

29) $\alpha: -x-y-5=0;\ \beta: 3x+3y-2=0;$

$$l_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3};\ l_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{5};$$

30) $\alpha: x+2z-5=0;\ \beta: -2x+z-1=0;$

$$l_1: \frac{x-3}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1};\ l_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-1}.$$

Пример 5.5

Даны уравнения плоскостей $\alpha: -x+y+3z-2=0$ и $\beta: -3x+2y+z-1=0$, а также уравнения прямых $l_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+1}{-1}$ и $l_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-1}$. Определить

а) взаимное расположение плоскостей α и β, найти угол между ними;

б) взаимное расположение прямых l_1 и l_2 и угол между ними;

в) взаимное расположение прямой l_1 и плоскости β, найти угол между ними. В том случае, если прямая и плоскость параллельны,

найти расстояние между l_1 и β; в случае, если прямая и плоскость пересекаются (в частности перпендикулярны) – найти точку их пересечения.

Решение

а) Запишем координаты векторов нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ соответственно плоскостей α и β (коэффициенты при переменных в уравнениях данных плоскостей)

$$\vec{n}_1(-1;1;3);\ \vec{n}_2(-3;2;1).$$

Определим взаимное расположение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, т.к. если $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, то $\alpha \parallel \beta$, если $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, то $\alpha \perp \beta$, иначе $\alpha \cap \beta = l$.

$$\frac{-1}{-3} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{3}{1}$$

координаты векторов нормали заданных плоскостей не пропорциональны, следовательно, α и β не параллельны,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8 \neq 0$$

скалярное произведение векторов нормали заданных плоскостей не равно нулю, следовательно, α и β не перпендикулярны, таким образом, плоскости пересекаются под углом φ по прямой l.

Найдем угол φ между плоскостями α и β

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|8|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{151}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{151}}.$$

Ответ: $\alpha \cap \beta = l$, $\varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{151}}$.

б) Запишем координаты направляющих векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ соответственно прямых l_1 и l_2 (знаменатели в уравнениях данных прямых)

$$\vec{a}_1(3;5;-1);\ \vec{a}_2(1;3;-1).$$

Определим взаимное расположение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, т.к. если $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$, то $l_1 \parallel l_2$, если $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$, то $l_1 \perp l_2$, иначе l_1 и l_2 либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся.

$$\frac{3}{1} \neq \frac{5}{3} \neq \frac{-1}{-1}$$

координаты направляющих векторов заданных прямых не пропорциональны, следовательно, l_1 и l_2 не параллельны,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 19 \neq 0$$

скалярное произведение направляющих векторов заданных прямых не равно нулю, следовательно, l_1 и l_2 не перпендикулярны, таким образом, прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся.

Если векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{CB}$ ($C \in l_1, B \in l_2$) – компланарны, то l_1 и l_2 – пересекающиеся прямые, иначе l_1 и l_2 – скрещивающиеся.

Из уравнений прямых l_1 и l_2 находим

$$C(1;\, 2;\, -1) \in l_1,\ B(2;\, -1;\, 1) \in l_1,$$

откуда

$$\overrightarrow{CB}(1;\, -3;\, 2).$$

Найдем определитель, составленный из координат $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{CB}$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 3 - 5 - (-3 + 9 + 10) = 0,$$

поскольку $\Delta = 0$, то векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{CB}$ являются компланарными, значит прямые l_1 и l_2 пересекаются под углом ψ.

Найдем угол ψ между прямыми l_1 и l_2

$$\cos\psi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{|19|}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{11}} = \frac{19}{\sqrt{385}} \Rightarrow \psi = \arccos\frac{19}{\sqrt{385}}.$$

Ответ: l_1 и l_2 пересекаются, $\psi = \arccos\dfrac{19}{\sqrt{385}}$.

в) Выше было определено

$$\vec{n}_2(-3;\, 2;\, 1) \perp \beta,\ \vec{a}_1(3;\, 5;\, -1) \parallel l_1.$$

Исследуем взаимное расположение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{n}_2$, т.к. если $\vec{a}_1 \parallel \vec{n}_2$, то $l_1 \perp \beta$, если $\vec{a}_1 \perp \vec{n}_2$, то $l_1 \parallel \beta$, иначе $l_1 \cap \beta = D$.

$$\frac{3}{-3} \neq \frac{5}{2} \neq \frac{-1}{1}$$

координаты векторов заданных прямой и плоскости не пропорциональны, следовательно, l_1 и β не перпендикулярны,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 0$$

скалярное произведение векторов заданных прямой и плоскости равно нулю, следовательно, l_1 и β параллельны, т.е. $\angle(l_1, \beta) = 0^0$.

Найдем расстояние между прямой l_1 и плоскостью β. Для этого возьмем точку $C(1;\,2;\,-1)\in l_1$ и найдем расстояние от точки C до плоскости β по формуле (5.12)

$$\rho(l_1,\beta)=\rho(C,\beta)=\frac{|-3\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot(-1)-1|}{\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $l_1\parallel\beta$, $\angle(l_1,\beta)=0^0$, $\rho(l_1,\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

Задача 5.6. Построить кривые второго порядка по заданным уравнениям. Для окружности указать центр и радиус; для эллипса и гиперболы – фокусы; для параболы – фокус и директрису.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) а) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; в) $-\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1$;

г) $y^2=9x$;

2) а) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$; б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$; в) $\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{64}=1$;

г) $x^2=-5y$;

3) а) $(x-1)^2+(y+1)^2=16$; б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$; в) $-\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

г) $x^2=-15y$;

4) а) $(x+1)^2+(y-1)^2=25$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; в) $\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{36}=1$;

г) $y^2=8x$;

5) а) $(x-2)^2+(y-4)^2=49$; б) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$; в) $-\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

г) $x^2=-9y$;

6) а) $(x+2)^2+(y+3)^2=36$; б) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{49}=1$; в) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{25}=1$;

г) $x^2=10y$;

7) а) $(x+2)^2+(y-3)^2=10$; б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{49}=1$; в) $-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{49}=1$;

г) $y^2=-5x$;

8) а) $(x-2)^2+(y+3)^2=18$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$;

г) $x^2=-7y$;

9) а) $(x-1)^2+(y-2)^2=11$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$;

г) $y^2=-8x$;

10) а) $(x+1)^2+(y+4)^2=17$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$; в) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$;

г) $x^2=9y$;

11) а) $(x+2)^2+(y+4)^2=12$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$;

г) $x^2=-10y$;

12) а) $(x+4)^2+(y-3)^2=20$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; в) $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$;

г) $x^2=15y$;

13) а) $(x-3)^2+(y+4)^2=14$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$; в) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$;

г) $y^2=7x$;

14) а) $(x-1)^2+(y-5)^2=22$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$; в) $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$;

г) $x^2=-8y$;

15) а) $(x+1)^2+(y+1)^2=8$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$; в) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}=1$;

г) $y^2=15x$;

16) а) $(x-2)^2+(y+4)^2=19$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$; в) $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

г) $x^2=5y$;

17) а) $(x+1)^2+(y+2)^2=6$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{49}=1$;

г) $x^2=8y$;

18) а) $(x+1)^2+(y+5)^2=26$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$; в) $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$;

г) $y^2=5x$;

19) а) $(x+4)^2+(y-2)^2=23$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$;

г) $y^2=12x$;

20) а) $(x+1)^2+(y-2)^2=5$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$; в) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

г) $y^2=-9x$;

21) а) $(x+1)^2+(y-4)^2=29$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$;

г) $x^2=7y$;

22) а) $(x+2)^2+(y-4)^2=15$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$; в) $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$;

г) $y^2=-7x$;

23) а) $(x+1)^2+(y-5)^2=28$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$; в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$;

г) $y^2=10x$;

24) а) $(x-1)^2+(y+2)^2=24$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$;

г) $y^2=-15x$;

25) а) $(x-5)^2+(y+1)^2=13$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$; в) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$;

г) $x^2=-12y$;

26) а) $(x+4)^2+(y+1)^2=31$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$; в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$;

г) $x^2=11y$;

27) а) $(x-2)^2+(y+1)^2=21$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

г) $y^2=-10x$;

28) а) $(x-1)^2+(y+4)^2=27$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$;

г) $y^2=11x$;

29) а) $(x-4)^2+(y-1)^2=7$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$; в) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

г) $x^2=3y$;

30) а) $(x+2)^2+(y-1)^2=30$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$;

г) $y^2=-13x$.

Пример 5.6

Построить кривые второго порядка по заданным уравнениям. Для окружности указать центр и радиус; для эллипса и гиперболы – фокусы; для параболы – фокус и директрису.

а) $(x-1{,}5)^2+(y+2)^2=7$; **б)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$; **в)** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{12}=1$;

г) $x^2=12y$.

Решение

а) $(x-1{,}5)^2+(y+2)^2=7$ – окружность с центром в точке $C(1{,}5;-2)$ и радиусом $R=\sqrt{7}$ (рис. 16).

б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$ – эллипс (рис. 17), $a=2$ – малая полуось; $b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ – большая полуось. Учитывая, что большая полуось расположена по оси Oy, фокусы будут иметь следующие координаты

$$F_1(0;-c);\quad F_2(0;c),$$

где $c^2=b^2-a^2$.

Найдем координаты фокусов

$$c^2=8-4\Rightarrow c=2,$$

тогда

$$F_1(0;-2);\quad F_2(0;2).$$

в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{12}=1$ – гипербола (рис. 18), $a=3$ – действительная полуось; $b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ – мнимая полуось. Учитывая, что действительная полуось расположена по оси Ox, фокусы будут иметь следующие координаты

$$F_1(-c;0);\quad F_2(c;0),$$

где $c^2=b^2+a^2$.

Найдем координаты фокусов

$$c^2=9+12\Rightarrow c=\sqrt{21},$$

тогда

$$F_1(-\sqrt{21};0);\quad F_2(\sqrt{21};0).$$

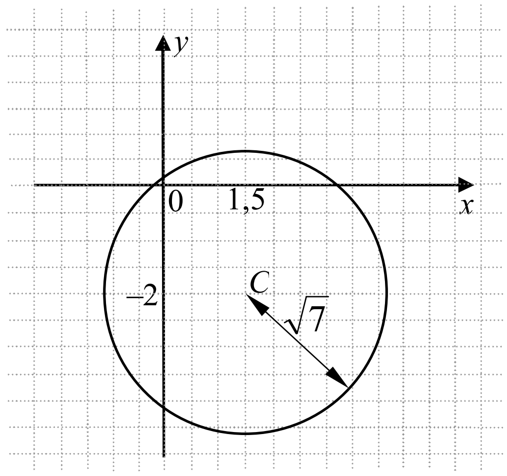


Рис. 16

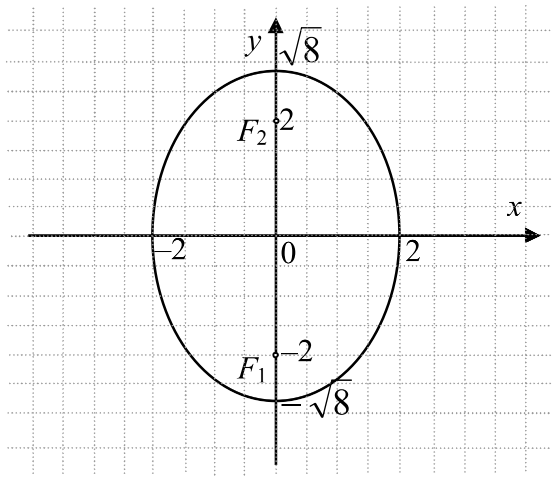


Рис. 17

г) $x^2 = 12y$ – парабола с вершиной в точке $O(0;\,0)$, Oy – ось симметрии; $p = 6$ – параметр параболы (рис. 19). Ветви параболы направлены вверх, т.к. $p > 0$.

Найдем координаты фокуса и уравнение директрисы параболы

$$F\left(0;\frac{p}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad F(0;\,3);$$

$$d : y = -\frac{p}{2} \quad\Rightarrow\quad d : y = -3.$$

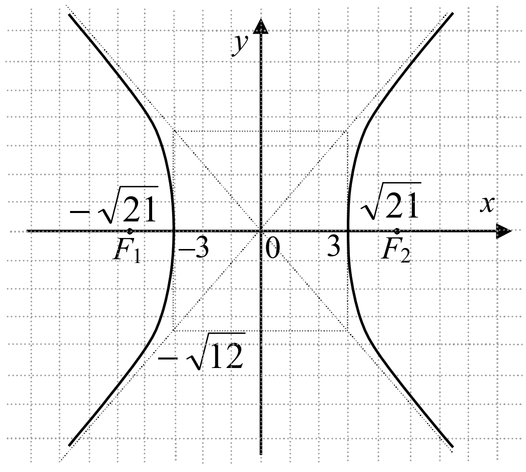


Рис. 18

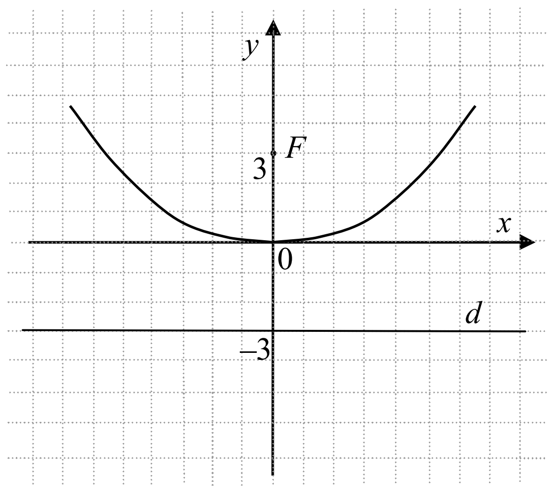


Рис. 19

Задача 5.7. С помощью выделения полного квадрата и переноса начала координат упростить уравнение линии и определить ее тип. Сделать рисунок.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$;   3) $6x^2 - y^2 - 36x + 12y - 48 = 0$;

2) $5x^2 + 2y^2 + 10x - 8y - 17 = 0$;   4) $y^2 - 8y + 2x + 18 = 0$;

5) $-2x^2+y^2-12x+12y-8=0$;
6) $2x^2+y^2-12x+4y+6=0$;
7) $-3x^2-6x+3y+18=0$;
8) $x^2-2y^2-6x+4y-6=0$;
9) $y^2-4y+3x-6=0$;
10) $x^2+y^2-6x-4y+9=0$;
11) $x^2+y^2-4x-6y+2=0$;
12) $-2x^2+6x-y+4=0$;
13) $x^2+y^2-6x+2y+1=0$;
14) $x^2-2y^2-4x+12y-8=0$;
15) $x^2+y^2-4x-4y-4=0$;
16) $-2y^2-8y+4x-3=0$;
17) $x^2+y^2-8x+2y+13=0$;
18) $x^2+y^2-4x-6y+9=0$;
19) $x^2+2y^2-6x+4y+2=0$;
20) $x^2-6x-8y+5=0$;
21) $x^2+y^2+2x-6y+1=0$;
22) $4x^2-y^2-8x+8y=0$;
23) $x^2+y^2-2x+8y+13=0$;
24) $3x^2+y^2-6x+4y-4=0$;
25) $3y^2-6y+2x-10=0$;
26) $-x^2+y^2-2x+12y-5=0$;
27) $2x^2+3y^2-6x+12y-2=0$;
28) $2x^2-8x+3y-18=0$;
29) $y^2-4y+2x+8=0$;
30) $-x^2+y^2+6x+4y-4=0$.

Пример 5.7

С помощью выделения полного квадрата и переноса начала координат упростить уравнение линии и определить ее тип:

$$2x^2+5y^2+8x-10y-17=0.$$

Сделать рисунок.

Решение.

Для выделения полного квадрата сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители за скобки:

$$2(x^2+4x)+5(y^2-2y)-17=0,$$

тогда,

$$2(x^2+4x+4)-8+5(y^2-2y+1)-5-17=0,$$

откуда получим

$$2(x+2)^2+5(y-1)^2=30,$$

поделим обе части уравнения на свободный коэффициент

$$\frac{(x+2)^2}{15}+\frac{(y-1)^2}{6}=1.$$

Таким образом, данное уравнение является уравнением эллипса с центром в точке $(-2,1)$, где $a=\sqrt{15}$ – большая полуось; $b=\sqrt{6}$ – малая полуось.

Ответ: $\dfrac{(x+2)^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{6}=1$ – эллипс (рис. 20).

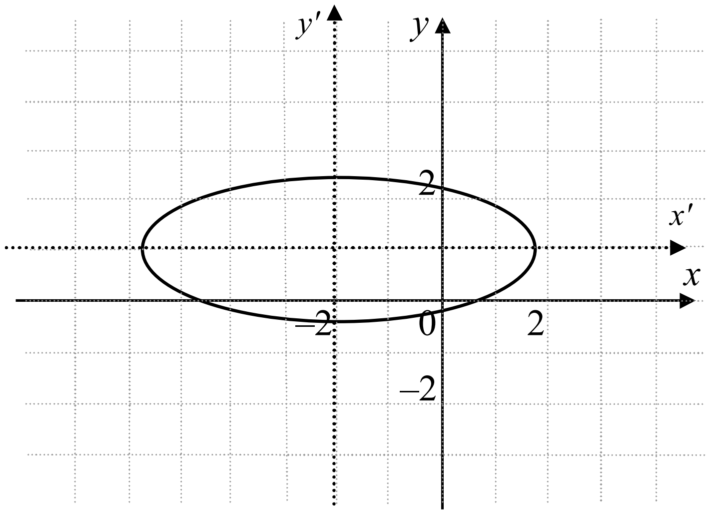


Рис. 20

Раздел VI. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В данный раздел включены задачи линейного программирования, экономическое содержание которых показывает целесообразность применения математических методов в экономике.

Прежде чем приступить к решению задач, рекомендуется повторить материал по линейной алгебре и аналитической геометрии, а также лекционный материал по соответствующим темам. Учебная литература В.И. Ермакова, Н.Ш. Кремера, М.С. Красса и Б.П. Чупрынова, И.Л. Акулича содержит, кроме теоретических сведений по рассматриваемым темам, тексты более широкого круга задач и примеры их решения, ее изучение при самостоятельной работе способствует глубокому усвоению материала и систематизации полученных знаний.

Задача 6.1. Частное предприятие планирует выпускать продукцию нескольких видов, для производства которой необходимо сырье трех типов. Нормы расхода сырья на изготовление единицы изделия каждого вида, запасы сырья каждого типа на предприятии, прибыль от реализации единицы изделия каждого вида даны в таблице.

Составить математическую модель задачи, позволяющей найти план производства изделий, который обеспечит максимальную прибыль частного предприятия от реализации продукции.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

Тип сырья	**Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг**				**Запас сырья, кг**
	I	**II**	**III**	**IV**	
1-й	4	3	1	1	240
2-й	2	1	3	4	180
3-й	1	0	5	2	251
Прибыль, ден.ед.	40	32	30	37	

2)

Тип сырья	**Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг**			**Запас сырья, кг**
	I	**II**	**III**	
1-й	1	2	3	300
2-й	3	3	4	477
3-й	4	1	1	441
Прибыль, ден.ед.	52	45	39	

3)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	2	3	1	0	1	330
2-й	3	2	0	1	8	800
3-й	4	5	3	2	6	745
Прибыль, ден.ед.	29	33	43	30	24	

4)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг				Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	
1-й	3	1	5	4	810
2-й	1	4	4	2	630
3-й	2	0	2	6	786
Прибыль, ден.ед.	43	40	34	36	

5)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	5	5	2	750
2-й	3	4	5	807
3-й	6	1	7	840
Прибыль, ден.ед.	36	30	49	

6)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	1	4	2	2	6	714
2-й	2	1	3	5	1	600
3-й	3	0	6	4	3	600
Прибыль, ден.ед.	14	20	10	13	21	

7)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг				Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	
1-й	3	0	1	1	170
2-й	2	2	2	3	438
3-й	1	5	2	1	290
Прибыль, ден.ед.	24	17	22	15	

8)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	8	5	4	807
2-й	2	7	1	840
3-й	4	2	5	750
Прибыль, ден.ед.	43	49	30	

9)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	1	2	1	4	6	480
2-й	6	7	6	1	8	445
3-й	3	0	3	3	2	300
Прибыль, ден.ед.	42	27	31	21	56	

10)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг				Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	
1-й	2	8	2	6	600
2-й	3	6	5	1	401
3-й	2	1	6	4	596
Прибыль, ден.ед.	15	26	20	11	

11)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	2	2	3	443
2-й	6	4	2	586
3-й	1	2	2	344
Прибыль, ден.ед.	52	66	45	

12)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	0	2	1	5	2	251
2-й	3	7	1	1	8	240
3-й	9	1	4	3	4	180
Прибыль, ден.ед.	17	26	11	15	40	

13)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг				Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	
1-й	3	2	6	5	596
2-й	7	6	1	3	264
3-й	1	2	8	2	640
Прибыль, ден.ед.	37	40	32	44	

14)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	5	5	1	606
2-й	1	4	3	607
3-й	1	1	3	361
Прибыль, ден.ед.	52	39	63	

15)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	9	2	3	3	5	266
2-й	2	0	1	5	2	216
3-й	3	3	5	4	3	212
Прибыль, ден.ед.	69	81	60	75	51	

16)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг				Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	
1-й	2	4	2	5	432
2-й	3	7	3	4	424
3-й	8	2	5	3	532
Прибыль, ден.ед.	37	41	34	50	

17)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	4	2	7	560
2-й	0	3	3	300
3-й	6	5	1	332
Прибыль, ден.ед.	46	55	35	

18)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	3	9	3	2	3	298
2-й	6	2	0	6	2	600
3-й	1	5	1	1	5	401
Прибыль, ден.ед.	25	18	11	22	40	

19)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг				Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	
1-й	2	3	3	4	600
2-й	4	2	3	1	357
3-й	5	7	1	5	600
Прибыль, ден.ед.	36	40	42	26	

20)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	6	2	4	580
2-й	8	4	4	680
3-й	3	3	2	438
Прибыль, ден.ед.	50	30	44	

21)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	2	4	5	6	4	360
2-й	1	2	3	5	1	251
3-й	7	7	0	1	4	240
Прибыль, ден.ед.	30	36	27	24	32	

22)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг				Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	
1-й	4	4	2	2	200
2-й	3	1	1	5	332
3-й	7	3	7	2	560
Прибыль, ден.ед.	47	36	28	44	

23)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	4	2	4	630
2-й	2	3	1	393
3-й	0	4	5	810
Прибыль, ден.ед.	19	18	17	

24)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	3	5	3	8	6	848
2-й	1	3	0	3	5	532
3-й	9	1	4	5	2	432
Прибыль, ден.ед.	30	29	22	25	17	

25)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг				Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	
1-й	3	6	4	1	400
2-й	2	7	6	5	745
3-й	4	1	2	6	660
Прибыль, ден.ед.	25	17	16	22	

26)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	7	2	4	440
2-й	0	6	1	300
3-й	2	8	3	473
Прибыль, ден.ед.	45	48	32	

27)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	0	7	2	6	2	794
2-й	3	4	4	4	5	819
3-й	1	2	7	2	4	636
Прибыль, ден.ед.	20	38	43	36	34	

28)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг				Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	
1-й	3	4	1	5	166
2-й	2	0	7	2	280
3-й	8	3	4	4	200
Прибыль, ден.ед.	42	27	21	35	

29)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	4	7	1	848
2-й	0	2	5	757
3-й	1	5	4	816
Прибыль, ден.ед.	45	50	31	

30)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг					Запас сырья, кг
	I	II	III	IV	V	
1-й	7	2	6	5	1	401
2-й	5	1	3	6	4	596
3-й	4	8	0	1	3	300
Прибыль, ден.ед.	54	47	31	60	33	

Пример 6.1

Частное предприятие планирует выпускать продукцию нескольких видов, для производства которой необходимо сырье трех типов. Нормы расхода сырья на изготовление единицы изделия каждого вида, запасы сырья каждого типа на предприятии, прибыль от реализации единицы изделия каждого вида даны в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг			Запас сырья, кг
	I	II	III	
1-й	5	4	7	200
2-й	3	2	1	132
3-й	1	3	2	197
Прибыль, ден.ед.	45	60	30	

Составить математическую модель задачи, позволяющей найти план производства изделий, который обеспечит максимальную прибыль частного предприятия от реализации продукции.

Решение

Для составления математической модели задачи введем переменные. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида I, x_2 изделий вида II, x_3 изделий вида III.

Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого типа, то должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 200, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 132, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 197. \end{cases}$$

Количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным и дробным, поэтому

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ – целые.}$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида I, x_2 изделий вида II и x_3 изделий вида III составит

$$F = 45x_1 + 60x_2 + 30x_3.$$

Ответ: среди всех целых неотрицательных значений переменных x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих системе ограничений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 200, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 132, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 197, \end{cases}$$

найти такие, при которых значение функции прибыли $F = 45x_1 + 60x_2 + 30x_3$ будет максимальным.

Задача 6.2. Составить математическую модель задачи.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) На животноводческом предприятии содержат 100 коров, 68 овец, 200 кроликов. Используют при этом до 7 видов кормов. Количество единиц корма и добавок, которое максимально может быть дано 1 животному за 1 сутки даны в таблице 1. В таблице 2 дано содержание витаминов в кормах. В таблице 3 дано минимально необходимое и (или) предельно допустимое суточное количество витаминов. Стоимость 1 ед корма 1 составляет 12 руб., корма 2 – 10 руб., корма 3 – 8 руб., корма 4 – 13 руб., корма 5 – 11 руб.

Таблица 1

Вид животного	Количество единиц корма и добавок, которое максимально может быть дано 1 животному за 1 сутки				
	К1	**К2**	**К3**	**К4**	**К5**
Корова	4	3	6	1	2
Овца	1	1	2	1,5	1,2
Кролик	1	0,5	0,5	0,4	0,3

Таблица 2

Виды кормов и добавок	Содержание витаминов и минералов в 1 ед кормов и добавок					Максимально возможное для среднесуточной закупки кол-во кормов
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	
Корм 1	5	0,5	1,5	-	2	200
Корм 2	2	7	2,5	2	-	150
Корм 3	1	1	2	3	3	400
Корм 4	4	2,5	3	1,5	1,5	70
Корм 5	5,5	3	1	3,5	2,5	250

Таблица 3

Виды животных		суточное количество витаминов				
		A	**B**	**C**	**D**	**E**
Корова	**Min**	7	5	9	7,5	8
	Max	10	-	15	20	16
Овца	**Min**	3	2	6	2,5	3
	Max	5	-	10	10	6
Кролик	**Min**	1	0,5	1,5	1	0,5
	Max	1,5	5	-	4	1,5

Необходимо составить такой суточный рацион для каждого вида животного, при котором общая стоимость суточного питания всех животных минимальна.

2) Некоторая компания производит футбольные мячи. Компании надлежит определить объемы производства на год. Спрос на 8 месяцев года прогнозируется (или определяется контрактом) так: 10 000, 15 000, 20 000, 35 000, 24 000, 18 000, 16 000, 21 000 шт. Эти количества должны быть поставлены без нарушения сроков. В начале года запас мячей составляет 5 000 шт. Производиться может не более 25 000 мячей ежемесячно, а на хранении оставаться в конце месяца не более 10 000 мячей. Себестоимость одного мяча в предстоящие месяцы прогнозируется соответственно 12,50; 12,55; 12,70; 12,80; 12,85; 12,95; 13,10; 13,15 руб. Затраты на хранение оцениваются в 5% от себестоимости мяча (с учетом эффекта замораживания денежных средств). Коммерческие расходы составляют 1,5% от общей стоимости продукции произведенной и хранимой в течение данного месяца. Цены продажи зафиксированы, например, контрактом.

Необходимо найти годовой производственный план, при котором общая стоимость затрат (производственные + хранения + коммерческие) будет минимальна.

3) В течение шести месяцев компания должна производить продукцию в соответствии с контрактом: 4000 ед. - первый месяц, 5000 ед. - второй месяц, 2000 ед. - третий месяц, 1500 ед. - четвертый месяц, 4000 ед. - пятый месяц и 7000 ед. – шестой месяц. На предприятии работает 50 человек, месячное жалование одного работника составляет 8000 руб. Каждый работник может отработать 160 ч. в месяц. Для производства одной единицы продукции требуется 4 часа фонда рабочего времени. В начале каждого месяца компания может нанимать временных работников (на необходимое количество месяцев), затраты на найм одного временного работника (вне зависимости от количества месяцев работы) составляют 1600 руб., Почасовая оплата временных работников составляет 40 руб. и предполагает работу по этой норме также 160 часов в месяц. При этом доля брака у постоянных работников в среднем составляет 2,5%, а у временных работников – 2,6%. Складские возможности составляют 4000 ед. Стоимость хранения 1 ед. продукции составляет 100 руб.

Найти план найма временных работников, позволяющий минимизировать затраты.

4) Компания производит свою продукцию на трех фабриках. Эта продукция может направляться либо непосредственно двум потребителям компании, либо сначала на один из двух складов компании, а потом уже потребителям. Структура сети отображена в таблице стоимости перевозок. Допускаются перевозки между фабриками, складами и потребителями.

		Пункты назначения						
		Фабрика 1	**Фабрика 2**	**Фабрика 3**	**Склад 1**	**Склад 2**	**Потребитель 1**	**Потребитель 2**
Пункты отправки	**Фабрика 1**	-	5	3	5	5	20	20
	Фабрика 2	9	-	9	1	1	-	-
	Фабрика 3	0,4	8	-	1	0,5	10	12
	Склад 1	-	-	-	-	1	2	12
	Склад 2	-	-	-		-	2	12
	Потребитель 1	-	-	-	-	-	-	1
	Потребитель 2	-	-	-	-	-	7	-

Себестоимость продукции на всех фабриках одинакова, поэтому компания ищет план перевозок минимальной стоимости, который удовлетворял бы потребностям обоих потребителей, которые составляют соответственно 470 и 290 тонн. Объемы производства фабрик составляет 180; 300; 280 тонн в год. Стоимость перевозок тыс. руб. за тонну указана в таблице. Прочерк означает, что такая перевозка невозможна.

Максимальный объем перевозок по любому из вариантов между фабриками составляет 150 тонн, между фабриками и складами – 180 тонн, межу остальными – 200 тонн.

Потребности потребителей составляют соответственно 470 и 290 тонн. Найти такой план перевозок продукции, при котором ее общая стоимость будет минимальна.

5) Из 750 листов железа первого размера, и 500 листов железа второго размера 1 сорта, 400 листов третьего размера и 380 листов четвертого размера второго сорта несколькими способами выкраиваются 4 различных видов деталей. Нормы выхода деталей по различным способам и данные о заказах каждого клиента в деталях даны в таблице. Примечание: если в заказе не указан сорт, значит, клиент согласен на любой сортамент.

Виды листов	**Способы раскроя**	**Виды деталей**			
		A	**C**	**D**	**E**
Размер 1, I сорт	**1**	2	1	-	-
	2	3	-	2	1
	3	-	1	1	-
	4	1	-	-	2
Размер 2, I сорт	**1**	1	1	-	-
	2	-	1	2	1
	3	4	-	-	3
	4	-	5	2	1
Размер 3, II сорт	**1**	2	-	1	1
	2	2	1	-	2
Размер 4, II сорт	**1**	3	-	-	2
	2	2	1	-	-
	3	1	1	1	1
	4	-	3	6	1
Заказ клиента I		40	70 (1 сорта) 10 (2 сорта)	84 (1 сорта) 24 (2 сорта)	-
Заказ клиента II		20	55	90 (1 сорта) 40 (2 сорта)	60 (1 сорта)
Заказ клиента III		-	75 (1 сорта)	25 (1 сорта) 15 (2 сорта)	80

Как осуществить раскрой всех видов листов, чтобы выполнить все три заказа, израсходовав при этом минимальное количество листов?

6) Агентство по найму рабочей силы имеет заказ на рабочих на 8 месяцев вперед (с января по август) согласно графику, представленному в таблице:

Месяц	**Январь**	**Февраль**	**Март**	**Апрель**	**Май**	**Июнь**	**Июль**	**Август**
Кол-во рабочих, чел	100	120	80	170	130	200	250	180

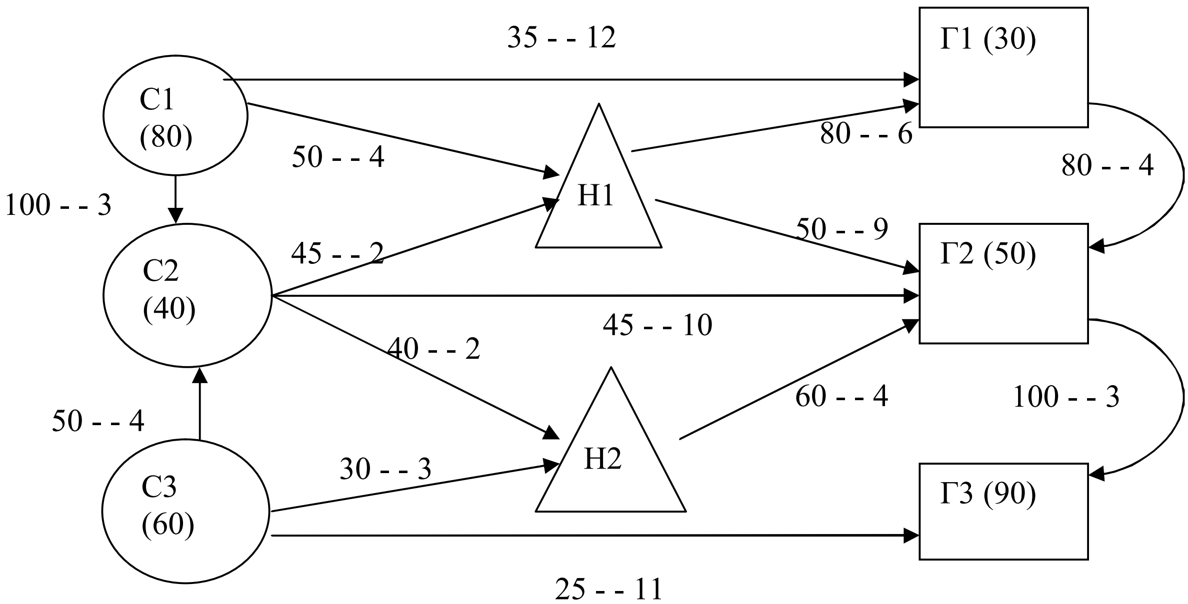
Поскольку спрос на рабочих различен по месяцам, возможно, экономически целесообразно нанять больше рабочих, чем требуется, в текущем месяце. Стоимость найма рабочих и удержания их в "ждущем режиме" зависит от времени трудоустройства, как показано в следующей таблице:

Продолжительность трудоустройства, кол-во месяцев	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Общая стоимость найма и заработной платы одного рабочего, тыс. руб.	36,8	63,4	93,2	116,3	142,5	165,6	183,7	198,4

Составить план найма рабочих на весь период, удовлетворяющий заявку с наименьшей общей стоимостью.

7) Компания имеет в своем распоряжении 5000 баррелей сырой нефти типа I, 10 000 баррелей сырой нефти типа II и 8 000 баррелей сырой нефти типа III. Компания производит и продает 4 вида продукта, получаемых путем смешивания разных типов сырой нефти: 1-ый продукт – нефти I и III типов, 2-ой продукт – нефти I и II типов, 3-ий продукт – нефти II и III типов и 4-ый продукт – нефти всех типов. Нефти и продуктам присваивается уровень качества, приходящийся на 1 баррель. Каждый баррель сырой нефти типа I имеет уровень качества 10 ед., нефти типа II – 5 ед., нефти типа III – уровень качества 8 ед. Средний уровень качества барреля 1-го продукта должен быть не ниже 9 ед., 2-го – не ниже 8 ед. и не более 8,5 ед, 3-го – не ниже 7 ед. и не более 7,6 ед., 4-го – не менее 5,5 ед. и не более 6,5 ед. Цена на каждый вид продукции составляет соответственно 25,3; 24,9; 24,2 и 23,7 руб. Общие затраты составляют соответственно 68; 66; 62 и 58 процентов. Известно, что спрос на 1-ый продукт не превышает 3 000, а на третий продукт составляет не менее 6 650 баррелей. Спрос на остальные два продукта не ограничен. Составить план производства, при котором прибыль была бы максимальной.

8) Сеть трубопроводов связывает три станции опреснения воды с тремя городами. Ежедневное предложение опреснительных станций составляет 80, 40 и 60 тыс. куб.м. воды, города ежедневно потребляют 30, 50 и 90 тыс. куб.м. воды. Кроме того каждая станция может также перекачивать воду в города через специальные насосные станции. Описанная сеть показана на рисунке.



Стрелками обозначены направление использования трубопроводов для подачи воды. Каждое направление характеризует два значения – пропускная способность (тыс. куб.м., первое число) и, через два тире, стоимость подачи 1 куб. м. (руб.).

Составьте такой план подачи воды, при котором обеспечивалась бы ее минимальная общая стоимость.

9) Брокеру биржи клиент поручил разместить 100 000 дол. США на фондовом рынке, сформировать портфель с ценными бумагами, чтобы получить максимальные годовые проценты с вложенного капитала. Выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций – акции А, Б, В, Д, которые позволяют получить дополнительный доход размерах соответственно 6%, 8%, 10% и 9% годовых от вложенной суммы. При этом клиент поручил не менее половины инвестиций вложить в акции А и Б. Прогнозы рыночных аналитиков свидетельствуют о том, что не менее 25 % общей суммы капитала нужно поместить в акции Д, а в акции В не более 15% капитала. Специфика налогообложения указывает на необходимость вложения в акции А не менее 30% капитала. Определить распределение инвестиций капитала, обеспечивающего максимальный дополнительный доход.

10) В таблице отражены 5 проектов, которые конкурируют между собой за получение инвестиционных фондов компании.

Год	**Эффективность инвестиционного проекта на 1 вкладываемую денежную единицу**				
	А	***В***	***С***	***Д***	***Е***
первый	–1	-	–1	–1	-
второй	+0,3	–1	+1,1	0	-
третий	+1	+0,3	-	0	–1
четвертый	-	+1	-	+1,75	+1,35

Значения в таблице следует понимать так: –1 - это вложение средств, кратных 1 ед., +0,3 это получение 0,3 единиц на одну вложенную единицу, 0 – это деньги в проект вложены, но не возвращаются в текущем периоде, прочерк – отсутствие возможности вложения средств.

Максимальная сумма которая может быть вложена в проект А составляет 500 000 единиц. В течение четырех лет компания планирует оперировать начальной суммой 1 000 000 единиц и средствами, полученными за счет инвестиций. В дополнении к этому компания может получать по 12 процентов годовых за вложения средств на год, которые не были инвестированы в проекты. Как инвестировать имеющиеся средства для получения максимальной прибыли к конечному периоду?

Задача 6.3. Из A листов железа первого размера и B листов железа второго размера выкраиваются три вида деталей. В таблице даны нормы выхода деталей в зависимости от размера листа

Виды деталей	**Лист размера 1**	**Лист размера 2**
I	a_1	b_1
II	a_2	b_2
III	a_3	b_3

Требуется не менее m деталей I вида, не менее n деталей II вида и не менее p деталей III вида. Каким образом осуществить раскрой, чтобы количество израсходованных листов было минимальным? Решить задачу графическим методом.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 1 по 15:

№	A	B	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	m	n	p
1	100	150	4	2	1	1	1	5	240	180	270
2	120	150	1	3	4	3	2	2	300	375	441
3	150	110	3	2	5	1	8	3	330	800	742
4	130	170	3	4	2	4	2	6	810	630	786
5	200	160	5	4	2	2	3	7	750	800	840
6	250	150	2	5	4	6	1	3	710	600	898
7	170	140	1	2	2	2	3	1	258	440	288

8	140	160	2	1	3	6	8	2	480	445	300
9	100	100	1	1	5	4	2	1	240	180	270
10	170	220	2	3	7	5	4	2	750	800	840
11	150	160	1	8	3	3	2	5	330	800	742
12	250	150	2	5	3	6	1	2	596	401	593
13	200	170	4	2	6	3	4	2	810	630	786
14	140	160	3	8	2	1	1	3	240	445	300
15	200	300	6	1	3	2	5	4	710	600	898

Из листа железа выкраивается три вида деталей двумя различными способами. В таблице даны нормы выхода деталей и остатки сырья при различных вариантах раскроя

Виды деталей	**Лист размера 1**	**Лист размера 2**
I	a_1	b_1
II	a_2	b_2
III	a_3	b_3
Остаток, м^2	A	B

Требуется не менее m деталей I вида, не менее n деталей II вида и не менее p деталей III вида. Каким образом осуществить раскрой, чтобы количество остатков было минимальным? Решить задачу графическим методом.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 16 по 30:

№	A	B	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	m	n	p
16	9	5	1	3	4	3	2	2	300	375	440
17	14	12	3	2	5	1	8	3	330	800	742
18	13	7	3	4	2	4	2	6	810	630	786
19	20	16	5	4	2	2	3	7	750	800	840
20	13	9	2	5	4	6	1	3	710	600	898
21	15	9	4	2	1	1	1	5	240	180	270
22	21	18	1	2	2	2	3	1	258	440	288
23	12	10	1	3	4	3	2	2	300	375	440
24	15	3	3	4	2	4	2	6	810	620	786
25	9	5	3	2	5	1	8	3	330	800	742
26	5	25	5	4	2	2	3	7	750	800	840
27	21	18	1	2	2	2	2	1	258	420	290
28	8	12	2	5	4	6	1	3	710	600	898
29	36	10	4	2	1	1	1	5	240	180	270
30	14	11	2	1	3	6	8	2	480	445	300

Пример 6.3. Из 50 листов железа первого размера и 70 листов железа второго размера выкраиваются три вида деталей. В таблице даны нормы выхода деталей в зависимости от размера листа

Виды деталей	**Лист размера 1**	**Лист размера 2**
I	3	4
II	4	1
III	3	2

Требуется не менее 300 деталей I вида, не менее 122 деталей II вида и не менее 192 деталей III вида. Каким образом осуществить раскрой, чтобы количество израсходованных листов было минимальным? Решить задачу графическим методом.

Решение

Составим математическую модель данной задачи. Предположим, что при раскрое будет израсходовано x_1 лист размера 1 и x_2 листов размера 2. Поскольку есть требование по количеству выкраиваемых деталей каждого вида и ограничения по количеству имеющихся листов, то должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 300, \\ 4x_1 + x_2 \geq 122, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 192, \\ x_1 \leq 50, \\ x_2 \leq 70. \end{cases}$$

Количество израсходованных листов не может быть величиной отрицательной и дробной, поэтому

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$x_1,\ x_2 \text{ – целые.}$$

Общее количество листов составит

$$F = x_1 + x_2.$$

Таким образом, получаем следующую математическую задачу: среди всех целых неотрицательных решений (x_1, x_2) системы линейных неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 300, \\ 4x_1 + x_2 \geq 122, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 192, \\ x_1 \leq 50, \\ x_2 \leq 70. \end{cases}$$

требуется найти такие, при которых функция $F = x_1 + x_2$ принимает минимальное значение.

Найдем решение задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Определим многоугольник решений. Для этого в ограничениях заменим знаки неравенств на равенства и построим соответствующие прямые:

$$l_1: \quad 3x_1 + 4x_2 = 300 \Rightarrow \frac{x_1}{100} + \frac{x_2}{75} = 1;$$

$$l_2: \quad 4x_1 + x_2 = 122 \;\Rightarrow\; \frac{x_1}{30,5} + \frac{x_2}{122} = 1;$$

$$l_3: \quad 3x_1 + 2x_2 = 192 \;\Rightarrow\; \frac{x_1}{64} + \frac{x_2}{96} = 1;$$

$$l_4: \quad x_1 = 50;$$

$$l_5: \quad x_2 = 70;$$

$$l_6: \quad x_1 = 0;$$

$$l_7: \quad x_2 = 0.$$

Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость. Полуплоскость, не удовлетворяющую ограничению, отметим на рисунке штриховкой.

Найдем полуплоскость, определяемую каждым неравенством системы ограничений задачи. Во всех случаях возьмем точку с координатами $(1;1)$:

$3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \geq 300$ – неверно;

$4 \cdot 1 + 1 \geq 122$ – неверно;

$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \geq 192$ –неверно;

$1 \leq 50$ – неверно;

$1 \leq 70$ –неверно;

$1 \geq 0$ – верно;

$1 \geq 0$ – верно;

Таким образом, относительно прямых l_6, l_7 искомыми являются полуплоскости, в которых лежит точка $(1;1)$, прямых $l_1 – l_5$ – полуплоскости, в которых точка $(1;1)$ не лежит. Пересечение этих полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи (пятиугольник, ограниченный штриховкой) (рис. 21).

Строим вектор цели $\vec{c}$, координаты которого есть коэффициенты при неизвестных в целевой функции F (либо пропорциональны им), и прямую нулевого уровня l_0 ($l_0 \perp \vec{c}$)

$$\vec{c}\left(60;60\right);\ l_0:\ x_1 + x_2 = 0.$$

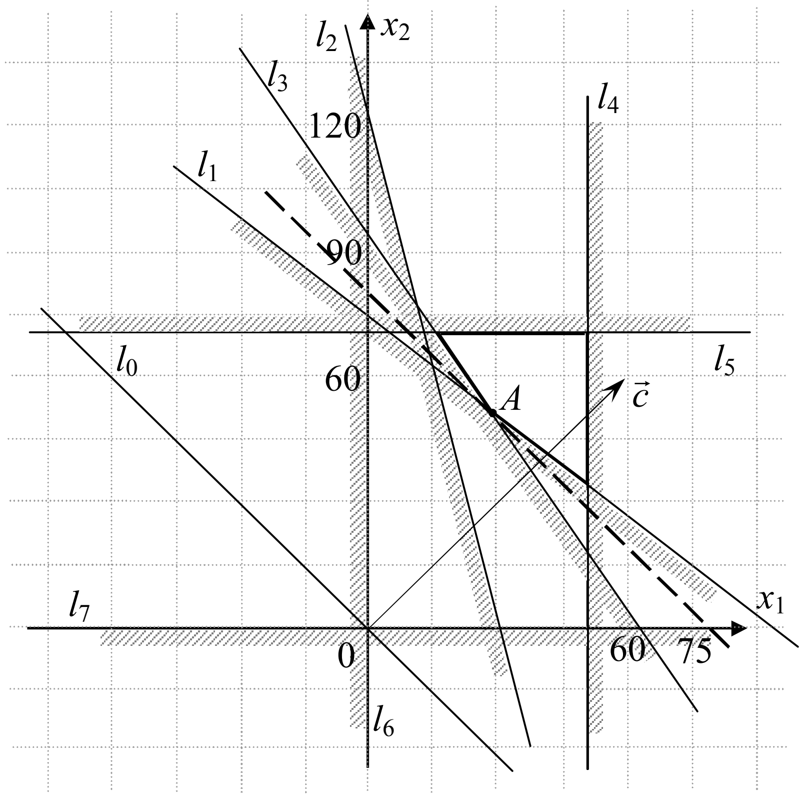


Рис. 21

Перемешаем прямую l_0 в направлении, противоположном направлению вектора $\vec{c}$, до последней общей точки ее с многоугольником решений – точки A. Если координаты этой точки целые, то они и определяют количество израсходованных листов каждого размера. В противном случае – решением задачи являются координаты точки, ближайшей к A, удовлетворяющие системе ограничений, при которых значение F будет минимальным.

Найдем координаты точки A как точки пересечения прямых l_1 и l_3:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 300, \\ 3x_1 + 2x_2 = 192; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 108, \\ 3x_1 + 2x_2 = 192; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 28, \\ x_2^* = 54. \end{cases}$$

Следовательно, для получения требуемого количества деталей каждого вида требуется раскроить 28 листов размера 1 и 54 листа размера 2, при этом общее количество израсходованных листов:

$$F_{\min} = 1 \cdot 28 + 1 \cdot 54 = 82.$$

Ответ: необходимо раскроить 28 листов размера 1, 54 листа размера 2.

Задача 6.4. На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный товар соответственно в количестве: a_1, a_2, a_3. Товар требуется перевезти в количестве b_1 единиц в магазин B_1, в количестве b_2 единиц в магазин B_2, b_3 ед. в магазин B_3, b_4 ед. в магазин B_4, b_5 ед. в магазин B_5. Матрица тарифов перевозок (c_{ij}) между базами и магазинами, запасы товаров на базах и потребности в товарах для магазинов заданы таблицей:

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	a_3
Потребности b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	

Спланировать план перевозок таким образом, чтобы общая их стоимость была минимальной.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	14	8	17	5	3	120
A_2	21	10	7	11	6	180
A_3	3	5	8	4	9	200
Потребности b_j	70	120	105	125	110	

2)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	21	18	14	3	6	400
A_2	7	11	10	5	12	370
A_3	4	8	16	9	13	380
Потребности b_j	250	200	290	260	100	

3)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	14	8	17	5	3	530
A_2	21	10	7	11	6	570
A_3	3	5	8	4	9	600
Потребности b_j	300	380	450	370	250	

4)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	10	15	14	4	350
A_2	3	7	12	5	8	350
A_3	21	18	6	13	16	300
Потребности b_j	180	220	230	270	100	

5)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	12	9	7	11	6	350
A_2	4	3	12	2	8	300
A_3	5	17	9	4	11	300
Потребности b_j	180	220	230	270	100	

6)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	11	5	3	400
A_2	8	17	13	7	6	370
A_3	14	10	5	8	9	380
Потребности b_j	250	200	290	210	150	

7)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	5	11	3	120
A_2	12	8	6	14	11	150
A_3	10	15	7	9	18	100
Потребности b_j	85	65	90	60	70	

8)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	3	8	7	11	15	120
A_2	14	3	1	8	6	180
A_3	9	5	16	7	12	200
Потребности b_j	70	120	105	125	110	

9)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	11	4	15	7	2	260
A_2	20	9	7	14	5	400
A_3	18	10	3	8	6	240
Потребности b_j	180	200	190	230	100	

10)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	12	9	7	11	6	150
A_2	4	3	12	2	8	170
A_3	5	17	9	4	11	260
Потребности b_j	100	70	150	150	80	

11)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	7	4	15	9	14	170
A_2	11	2	7	3	10	150
A_3	4	5	12	8	17	180
Потребности b_j	90	120	110	130	70	

12)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	11	5	3	350
A_2	8	17	13	7	6	200
A_3	14	10	5	8	9	270
Потребности b_j	190	280	110	100	120	

13)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	3	10	14	15	6	370
A_2	2	22	4	12	9	450
A_3	8	5	11	15	7	480
Потребности b_j	300	280	330	290	100	

14)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	7	4	15	9	14	100
A_2	11	2	7	3	10	100
A_3	4	5	12	8	17	100
Потребности b_j	85	65	90	60	70	

15)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	14	8	17	5	3	370
A_2	21	10	7	11	6	450
A_3	3	5	8	4	9	480
Потребности b_j	300	280	320	200	100	

16)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	11	4	15	7	2	200
A_2	20	9	7	14	5	300
A_3	18	10	3	8	6	200
Потребности b_j	120	230	190	160	120	

17)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	3	8	7	11	15	560
A_2	14	3	1	8	6	570
A_3	9	5	16	7	12	620
Потребности b_j	300	330	350	370	250	

18)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	2	10	15	14	4	150
A_2	3	7	12	5	8	170
A_3	21	18	6	13	16	260
Потребности b_j	100	90	160	150	80	

19)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	14	8	17	5	3	120
A_2	21	10	7	11	6	100
A_3	3	5	8	4	9	230
Потребности b_j	70	120	105	125	110	

20)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	12	9	7	11	6	175
A_2	24	3	12	2	8	165
A_3	5	17	9	4	11	180
Потребности b_j	50	110	110	100	70	

21)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	3	8	7	11	15	200
A_2	14	3	1	8	6	400
A_3	9	5	16	7	12	200
Потребности b_j	180	200	190	230	100	

22)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	2	4	11	5	3	250
A_2	8	17	13	7	6	300
A_3	14	10	5	8	9	270
Потребности b_j	120	230	190	160	120	

23)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	3	10	14	15	6	100
A_2	2	22	4	12	9	150
A_3	8	5	11	15	7	180
Потребности b_j	90	120	110	130	70	

24)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	21	18	14	3	6	370
A_2	7	11	10	5	12	450
A_3	4	8	16	9	13	480
Потребности b_j	300	280	330	290	100	

25)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	2	4	5	11	3	260
A_2	12	8	6	14	11	400
A_3	10	15	7	9	18	240
Потребности b_j	180	200	100	200	100	

26)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	7	4	15	9	14	150
A_2	11	2	7	3	10	170
A_3	4	5	12	8	17	260
Потребности b_j	100	90	160	150	80	

27)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	3	10	14	15	6	560
A_2	2	22	4	12	9	570
A_3	8	5	11	15	7	620
Потребности b_j	300	380	450	220	250	

28)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	5	11	3	400
A_2	12	8	6	14	11	370
A_3	10	15	7	9	18	380
Потребности b_j	250	200	290	260	150	

29)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	11	4	15	7	2	350
A_2	20	9	7	14	5	350
A_3	18	10	3	8	6	300
Потребности b_j	180	220	230	270	100	

30)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	21	18	14	3	6	120
A_2	7	11	10	5	12	150
A_3	4	8	16	9	13	100
Потребности b_j	80	60	80	60	50	

Пример 3.4

На три базы A_i, $i=\overline{1,3}$ поступил однородный товар, который требуется перевезти в магазины B_j, $j=\overline{1,5}$. Матрица тарифов перевозок (c_{ij}) между базами и магазинами, запасы товаров (a_i) на базах и потребности в товарах (b_j) для магазинов заданы таблицей:

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	3	4	5	1	430
A_2	2	4	3	6	7	320
A_3	6	5	8	5	4	380
Потребности b_j	190	200	220	210	150	

Спланировать план перевозок таким образом, чтобы общая их стоимость была минимальной.

Решение

Найдем суммарные запасы поставщиков (баз) и суммарные запросы потребителей (магазинов)

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 430 + 320 + 380 = 1130,$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 190 + 200 + 220 + 210 + 150 = 970.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{5} b_j$, то данная задача с неправильным балансом. Необходимо ввести шестого, фиктивного потребителя с потребностями

$$b_6 = 1130 - 970 = 160$$

и нулевыми стоимостями перевозок единиц товара:

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	**Запасы** a_i
A_1	2	3	4	5	1	0	430
A_2	2	4	3	6	7	0	320
A_3	6	5	8	5	4	0	380
Потребности b_j	190	200	220	210	150	160	

Теперь $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$, значит, выполняется необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

Найдем начальное опорное решение методом минимальной стоимости (стоимости перевозок товара фиктивному потребителю рассматриваются в последнюю очередь)

a_i \ b_j	190	200	220	210	150	160
430	[2] 190	[3] 90	[4]	[5]	[1] 150	[0]
320	[2]	[4] 100	[3] 220	[6]	[7]	[0]
380	[6]	[5] 10	[8]	[5] 210	[4]	[0] 160

Полученное решение X^1 имеет $m + n - 1 = 3 + 6 - 1 = 8$ базисных переменных. Вычислим значение целевой функции на этом решении

$$F = 2 \cdot 190 + 3 \cdot 90 + 1 \cdot 150 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 220 + 5 \cdot 10 +$$
$$+ 5 \cdot 210 + 0 \cdot 160 = 2960.$$

Если допустимое решение транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы поставщиков u_i, $i = \overline{1,3}$ и потребителей v_j, $j = \overline{1,6}$, удовлетворяющие условиям

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0, \qquad (i)$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0. \qquad (ii)$$

Определим потенциалы u_i и v_j, используя условия (i), согласно которым в каждой занятой опорным решением клетке таблицы транспортной задачи сумма потенциалов равна стоимости перевозок. Запишем систему и найдем ее решение

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_2 = 3, \\ u_1 + v_5 = 1, \\ u_2 + v_2 = 4, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_4 = 5, \\ u_3 + v_6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 2, \\ v_2 = 3, \\ v_5 = 1, \\ u_2 = 1, \\ v_3 = 2, \\ u_3 = 2, \\ v_4 = 3, \\ v_6 = -2. \end{cases}$$

Система неопределенная, т.к. состоит из восьми уравнений и имеет девять переменных, поэтому потенциалу u_1 задали значение произвольно: $u_1 = 0$.

Значения потенциалов запишем в таблицу рядом с запасами или запросами соответствующих поставщиков и потребителей.

		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	$v_5 = 1$	$v_6 = -2$
	$a_i \backslash b_j$	190	200	220	210	150	160
$u_1 = 0$	430	2 − 190	3 90 +	4 +	5 +	1 150	0 +
$u_2 = 1$	320	2 + 1	4 100 −	3 220	6 +	7 +	0 +
$u_3 = 2$	380	6 +	5 10	8 +	5 210	4 +	0 160

Для всех незаполненных клеток таблицы проверим условия (ii)

$$u_1 + v_3 \le 4,\quad u_1 + v_4 \le 5,\quad u_1 + v_6 \le 0,$$

$$u_2 + v_1 \le 2,\quad u_2 + v_4 \le 6,\quad u_2 + v_5 \le 7,\quad u_2 + v_6 \le 0,$$

$$u_3 + v_1 \le 6,\quad u_3 + v_3 \le 8,\quad u_3 + v_5 \le 4.$$

Если неравенство верное, то в соответствующей клетке в правом нижнем углу поставим знак «+», иначе – запишем число Δ_{ij}, равное

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Итак, начальное опорное решение не является оптимальным, поскольку для клетки $(2;1)$ условие (*ii*) не выполняется, $\Delta_{21} = 1$.

Перейдем к новому опорному решению. Для клетки $(2;1)$ построим цикл (если такого типа клеток несколько, то выбираем ту, в которой наибольшее значение Δ_{ij}): $(2;1)$, $(1;1)$, $(1;2)$, $(2;2)$. В угловых точках цикла расставим поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке $(2;1)$. Величина груза Θ, перераспределяемого по циклу равна наименьшей из перевозок в клетках цикла, отмеченных знаком «–»

$$\Theta = \min\{190;100\} = 100.$$

В клетки цикла, отмеченные знаком «+» добавляется груз Θ, из клеток, отмеченных знаком «–», убавляется такой же по величине груз. Так, осуществляя сдвиг по циклу на величину Θ, получим второе опорное решение X^2

		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 3$	$v_4 = 3$	$v_5 = 1$	$v_6 = -2$
	a_i	190	200	220	210	150	160
$u_1 = 0$	430	$\boxed{2}$ 90	$\boxed{3}$ 190	$\boxed{4}$ +	$\boxed{5}$ +	$\boxed{1}$ 150	$\boxed{0}$ +
$u_2 = 0$	320	$\boxed{2}$ 100	$\boxed{4}$ +	$\boxed{3}$ 220	$\boxed{6}$ +	$\boxed{7}$ +	$\boxed{0}$ +
$u_3 = 2$	380	$\boxed{6}$ +	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{8}$ +	$\boxed{5}$ 210	$\boxed{4}$ +	$\boxed{0}$ 160

Проверим это решение на оптимальность. Для чего, аналогично предыдущему решению, найдем потенциалы и проверим выполнение условий (*ii*):

$$\begin{cases} u_1+v_1=2, \\ u_1+v_2=3, \\ u_1+v_5=1, \\ u_2+v_1=2, \\ u_2+v_3=3, \\ u_3+v_2=5, \\ u_3+v_4=5, \\ u_3+v_6=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=0, \\ v_1=2, \\ v_2=3, \\ v_5=1, \\ u_2=0, \\ v_3=3, \\ u_3=2, \\ v_4=3, \\ v_6=-2. \end{cases}$$

$$\begin{gathered} u_1+v_3\le 4, \\ u_1+v_4\le 5, \\ u_1+v_6\le 0, \\ u_2+v_2\le 4, \\ u_2+v_4\le 6, \\ u_2+v_5\le 7, \\ u_2+v_6\le 0, \\ u_3+v_1\le 6, \\ u_3+v_3\le 8, \\ u_3+v_5\le 4. \end{gathered}$$

Условия (i) и (ii) выполняются, значит, второе опорное решение является оптимальным. Вычислим значение целевой функции на этом решении

$$F=2\cdot 90+3\cdot 190+1\cdot 150+2\cdot 100+3\cdot 220+5\cdot 10+$$
$$+5\cdot 210+0\cdot 160=2950.$$

Ответ: общая стоимость перевозок составит $F_{\min}=2950$ ден.ед. при плане перевозок $X^*=\begin{pmatrix} 90 & 190 & 0 & 0 & 150 \\ 100 & 0 & 220 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 210 & 0 \end{pmatrix}$, при этом на третьей базе остается 160 единиц товара.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие для вузов / И.Л. Акулич. − СПб. и др.: Лань, 2011. − 347 с.
2. Высшая математика для экономических специальностей. Учебник и практикум: учебник для вузов по экон. специальностям / Н.Ш. Кремер и др.; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт, 2011. – 909 с.
3. Журбенко Л.Н., Никонова Г.А., Никонова Н.В., Нуриева С.Н., Дегтярева О.М. Математика в примерах и задачах: Учеб. пособие / Л.Н. Журбенко и др. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 373 с.
4. Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие. В 4 ч. / А.П. Рябушко и др.; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высшая школа., 2007. – 303 с.
5. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие / Д.В. Клетеник; под ред. Н.В. Ефимова. – СПб. и др.: Лань, 2010. − 222 с.
6. Красс, М.С., Чупрынов, Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 720 с.
7. Малугин, В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Задачи и упражнения / В.А. Малугин. – М.: Эксмо, 2006. – 176 с.
8. Малугин, В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций / В.А. Малугин. – М.: Эксмо, 2006. – 224 с.
9. Малугин, В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Задачи и упражнения / В.А. Малугин. – М.: Эксмо, 2006. – 288 с.
10. Малугин, В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций / В.А. Малугин. – М.: Эксмо, 2005. – 272 с.
11. Малыхин, В.И. Высшая математика: учебное пособие / В.И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 365 с.
12. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис–пресс, 2011. – 602 с.
13. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / В.И. Ермаков и др.; под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 573 с.
14. Справочник по математике для экономистов: учебное пособие / В.Е. Барбаумов и др.; под ред. В.И. Ермакова. − М.: ИНФРА-М, 2011. – 463 с.

Приложение 1

Южно-Уральский государственный университет

Факультет Математики, механики и компьютерных наук

Кафедра ____

Расчетно-графическая работа № 1 (Часть ____)

по дисциплине **«Математика»**

Выполнил(а): студент(ка) гр. _____________
группа

____
ФИО

Вариант № ______________________________

Проверил(а):_____________________________
Должность

____
ФИО

Регистрационные данные:

Дата_______ Дата_______ Дата_______

Подпись _____ Подпись _____ Подпись _____

Челябинск
20____

Приложение 2

Результаты проверки расчетно-графической работы студента(ки) гр. ___________
ФИО____

№ п/п	Номер задачи в сборнике	Результат проверки 1	Результат проверки 2	Результат проверки 3
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Итог				
Дата				
Подпись преподавателя				

ОГЛАВЛЕНИЕ