ЧАСТЬ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Задача 1

Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

1. а) $y' = \sin(x+y) - \sin(x-y)$ б) $2xyy' = x^2 + y^2$

   в) $y' = \dfrac{x+2y-3}{2x-2}$ г) $xy^2 - x + (y + x^2 y)y' = 0$

   д) $y' = 2 + \sqrt{x+y}$

2. а) $\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$ б) $y' = 1 + (y - x + 1)^2$

   в) $y' = \dfrac{x+y-2}{2x-2}$ г) $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$

   д) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$

3. а) $3e^x \operatorname{tg} y\,dx + \dfrac{1+e^x}{\cos^2 y}dy = 0$ б) $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$

   в) $y' = \dfrac{3y-x-4}{3x+3}$ г) $y - 3x^2 - (4y - x)y' = 0$

   д) $y' = 1 + \sqrt{x+y-2}$

4. а) $y' = \sin(x+y) - \sin(x-y)$ б) $2xyy' = x^2 + y^2$

   в) $y' = \dfrac{x+y-2}{3x-y-2}$ г) $xy^2 - x + (y + x^2 y)y' = 0$

   д) $y' = 2 + \sqrt{x+y}$

5. а) $y' \operatorname{tg} x - y = 1$ б) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

   в) $y' = \dfrac{2y-2}{x+y-2}$ г) $\left(3x^2 + \dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx - \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}dy = 0$

   д) $y' = (y+x)^3 - 1$

6. а) $y'x = y\ln y$ б) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$

   в) $y' = \dfrac{2x+y-3}{x-1}$ г) $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy - e^y\right)dy = 0$

   д) $y' = \cos(x+y)$

7. а) $y^2 x^2 y' = 1 - 2x$ б) $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$

   в) $y' = \dfrac{x+7y-8}{9x-y-8}$ г) $\left(x + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(y - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$

   д) $y' = (5x+y)^3 - 5$

8. а) $\frac{dx}{xy-x}+\frac{dy}{xy+2y}=0$ б) $xy'=\frac{3y^3+4xy^2}{2y^2+2x^2}$

в) $y'=\frac{x+3y+4}{3x-6}$ г) $\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy=0$

д) $y'=2+(y-2x)^3$

9. а) $(1+e^{2x})y^2dy=e^xdx$ б) $y'=\frac{x+2y}{2x-y}$

в) $y'=\frac{3y+3}{2x+y-1}$ г) $\left(3x^2y+2y+3\right)dx+\left(x^3+2x+3y^2\right)dy=0$

д) $y'\sqrt{x+y+1}=x+y-1$

10. а) $\ln(\cos y)dx=x\,\mathrm{tg}y\,dy$ б) $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y$

в) $y'=\frac{x+2y-3}{4x-y-3}$ г) $\left(y^2+\frac{y}{\cos^2 x}\right)dx+\left(2xy+\mathrm{tg}x\right)dy=0$

д) $y'=3+\sqrt{y-3x+1}$

11. а) $1+(1+y')e^y=0$ б) $y'=\frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$

в) $y'=\frac{x-2y+3}{-2x-2}$ г) $\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\frac{x^2}{y^3}\right)dy=0$

д) $y'=1+\sin(y-x-2)$

12. а) $yy'(1+x^2)=1+y^2$ б) $xy'=\sqrt{2x^2+y^2}+y$

в) $y'=\frac{x+8y-9}{10x-y-9}$ г) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{y^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0$

д) $y'=1+\cos(y-x+1)$

13. а) $y'=\cos(x+y)-\cos(x-y)$ б) $y'=\frac{y^2}{x^2}+6\frac{y}{x}+6$

в) $y'=\frac{2x+3y-5}{5x-5}$ г) $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0$

д) $y'=3-(y-3x+2)^4$

14. а) $(y+x^2y)dx+(x-xy)dy=0$ б) $xy'=\frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$

в) $y'=\frac{4y-8}{3x+2y-7}$ г) $\frac{1+xy}{x^2y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$

д) $y'=4+\sqrt[3]{y-4x-1}$

15. а) $(1+e^x)y'=ye^x$ б) $y'=\frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$

в) $y' = \dfrac{x+3y-4}{5x-y-4}$ г) $\dfrac{1}{y}\mathrm{d}x - \dfrac{x+y^2}{y^2}\mathrm{d}y = 0$

д) $y' = 2 - \cos(y-x)$

16. а) $y\ln y + xy' = 0$ б) $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$

в) $y' = \dfrac{y-2x+3}{x-1}$ г) $\dfrac{y}{x^2}\mathrm{d}x - \dfrac{xy+1}{x}\mathrm{d}y = 0$

д) $y' = 3 + \cos(y-2x)$

17. а) $y(1+\ln y) + xy' = 0$ б) $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8$

в) $y' = \dfrac{3x+2y-1}{x+1}$ г) $\left(\dfrac{y}{x^2} + xe^x\right)\mathrm{d}x - \dfrac{1}{x}\mathrm{d}y = 0$

д) $y'\sqrt{x+y} = 3$

18. а) $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0$ б) $xy' + y\ln\dfrac{y}{x} = 0$

в) $y' = \dfrac{3x+2y-1}{x+1}$ г) $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)\mathrm{d}x - \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y = 0$

д) $y' = 4 + \sin(y-3x)$

19. а) $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$ б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12$

в) $y' = \dfrac{5y+5}{4x+3y-1}$ г) $\left(y^3 + \cos x\right)\mathrm{d}x + \left(3xy^2 + e^y\right)\mathrm{d}y = 0$

д) $y' = 3 + \sqrt{y-3x+2}$

20. а) $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$ б) $xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y$

в) $y' = \dfrac{x+4y-5}{6x-y-5}$ г) $\left(5xy^2 - x^3\right)\mathrm{d}x + \left(5x^2y - y\right)\mathrm{d}y = 0$

д) $y'\sqrt{y-x} = 2$

21. а) $(1+y')e^{-y} = 1$ б) $y' = \dfrac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$

в) $y' = \dfrac{x+y+2}{x+1}$ г) $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$

д) $y' = 3 + \sqrt[4]{y-3x+1}$

22. а) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y' = 0$ б) $xy' = \dfrac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$

в) $y' = \dfrac{2x+y-3}{4x-4}$ г) $\left(1+\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0$

д) $y' = 2+(y-2x)^5$

23. а) $xy' = 2\sqrt{y}\ln x$ б) $y' = \dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$

в) $y' = \dfrac{2x+y-3}{2x-2}$ г) $(\ln x+\ln y)dx+\left(y+\dfrac{x}{y}\right)dy=0$

д) $y' = 5+\sqrt{y-5x+2}$

24. а) $y^2+y+(x^2-4)y'=0$ б) $xy' = \dfrac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$

в) $y' = \dfrac{y}{2x+2y-2}$ г) $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy=0$

д) $y' = \sqrt[3]{y+3x}-3$

25. а) $(1+e^x)yy' = e^{2x}$ б) $3y' = \dfrac{y^2}{x^2}+10\dfrac{y}{x}+10$

в) $y' = \dfrac{x+5y-6}{7x-y-6}$ г) $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx-\dfrac{x}{x^2+y^2}dy=0$

д) $y' = 1+(x+y)^3$

Задача 2

Найти решение задачи Коши.

1. а) $xy'+x^2+xy-y=0,\ \ y(1)=1-e$ б) $y'+xy=y^2(1+x)e^{-x},\ \ y(0)=1$

2. а) $y'-\dfrac{y}{x}=x^2,\ \ y(1)=0$ б) $xy'+y=2y^2\ln x,\ \ y(1)=\dfrac{1}{2}$

3. а) $y^2dx+\left(x+e^{\frac{2}{y}}\right)dy=0,\ \ y(e)=2$ б) $2(xy'+y)=xy^2,\ \ y(1)=2$

4. а) $y'-y\operatorname{ctg}x=2x\sin x,\ \ y(\dfrac{\pi}{2})=0$ б) $y'+4x^3y=4y^2(1+x^3)e^{-4x},\ \ y(0)=1$

5. а) $(y^4e^y+2x)y'=y,\ \ y(0)=1$ б) $xy'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x,\ \ y(1)=1$

6. а) $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x,\ \ y(0)=0$ б) $2(y'+xy)=y^2(1+x)e^{-x},\ \ y(0)=2$

7. а) $y^2dx+(xy-1)dy=0,\ \ y(1)=e$ б) $3(xy'+y)=y^2\ln x,\ \ y(1)=3$

8. а) $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+2x,\ \ y(-1)=\dfrac{3}{2}$ б) $2y'+y\cos x=\dfrac{1}{y}\cos x(1+\sin x),\ \ y(0)=1$

9. а) $2(4y^2+4y-x)y'=1,\ \ y(0)=0$ б) $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}(1-x^3),\ \ y(0)=-1$

10. а) $y'-\dfrac{y}{x+1}=e^x(x+1),\ \ y(0)=1$ б) $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2},\ \ y(0)=-1$

11. а) $y'-\frac{y}{x}=x\sin x,\quad y(\frac{\pi}{2})=1$ б) $2xy'-3y=-y^3(5x^2+3),\ y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. а) $(\cos 2y\cdot\cos^2 y-x)y'=\sin y\cdot\cos y,\quad y(\frac{1}{4})=\frac{\pi}{3}$ б) $3xy'+5y=(4x-5)y^4,\ y(1)=1$

13. а) $\mathrm{d}x+\left(xy-y^3\right)\mathrm{d}y=0,\quad y(-1)=0$ б) $3(xy'+y)=xy^2,\ y(1)=3$

14. а) $y'+\frac{y}{x}=\sin x,\quad y(\pi)=\frac{1}{\pi}$ б) $y'-y=2xy^2,\ y(0)=\frac{1}{2}$

15. а) $8\left(4y^3+xy-y\right)y'=1,\quad y(0)=0$ б) $y'+2xy=2x^3y^3,\ y(0)=\sqrt{2}$

16. а) $y'+\frac{y}{2x}=x^2,\quad y(1)=1$ б) $xy'+y=y^2\ln x,\ y(1)=1$

17. а) $2\left(x+y^4\right)y'=y,\quad y(-2)=-1$ б) $2(y'+y)=xy^2,\ y(0)=2$

18. а) $y'-\frac{2x-5}{x^2}y=5,\quad y(2)=4$ б) $y'+xy=y^2(x-1)e^x,\ y(0)=1$

19. а) $\left(y^2+2y-x\right)y'=1,\quad y(2)=0$ б) $y'-y=xy^2,\ y(0)=1$

20. а) $y'+\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}e^x,\quad y(1)=e$ б) $2(xy'+y)=y^2\ln x,\ y(1)=2$

21. а) $\left(13y^3-x\right)y'=4y,\quad y(5)=1$ б) $y'+y=xy^2,\ y(0)=1$

22. а) $y'-\frac{y}{x}=-2\frac{\ln x}{x},\quad y(1)=1$ б) $2(y'+xy)=y^2(x-1)e^x,\ y(0)=2$

23. а) $y'-\frac{y}{x}=-\frac{12}{x^3},\quad y(1)=4$ б) $xy'+y=xy^2,\ y(1)=1$

24. а) $2\left(y^3-y+xy\right)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,\quad y(-2)=0$ б) $y'-y\mathrm{tg}x=-\frac{2}{3}y^4\sin x,\ y(0)=1$

25. а) $y'+\frac{2y}{x}=x^3,\quad y(1)=-\frac{5}{6}$ б) $2y'-3y\cos x=-\frac{e^{-2x}}{y}(2+3\cos x),\ y(0)=1$

Задача 3

Найти общие и особые решения уравнений

1. $y=xy'+4y'^2$
2. $y=xy'+\sqrt{2+y'^2}$
3. $y=xy'+\cos y'$
4. $y=xy'-3y'^3$
5. $y=xy'+\ln y'$
6. $y=xy'-2\sin y'$
7. $y=xy'+\sqrt[3]{1-y'^3}$
8. $y=xy'+5y'^4$
9. $y=xy'+\frac{1}{y'^3}$

10. $y = xy' + \frac{5}{y'}$
11. $y = y'^2(x+1)$
12. $y = yy'^2 + 2xy'$
13. $y = y'(x+1) + y'^2$
14. $y = x(1+y') + y'^2$
15. $y = xy' + e^{2y'}$
16. $y' = \ln(xy' - y)$
17. $y = xy' - \frac{1}{y'^2}$
18. $y = xy' + 3y'^4$
19. $y = y'^2(x+2)$
20. $y = xy' + 2\sqrt{1-y'}$
21. $y = xy' - 3\sin y'$
22. $y = xy' - 2\ln y'$
23. $y = xy' + e^{-y'}$
24. $y = yy'^2 + 2xy'$
25. $xy' - y = \sqrt{y'}$