

ЧАСТЬ 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача 1

Вычислите неопределенные интегралы.

1.

а) $\int \frac{\sin x dx}{9 + \cos^2 x};$	б) $\int \frac{1-3x}{3+2x} dx;$	в) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}};$
г) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx;$	д) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx;$	е) $\int \frac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x} dx;$
ж) $\int \frac{3x-2}{x^2+1} dx.$	з) $\int (2x^2-3x)e^{2x} dx;$	
2.

а) $\int \frac{2+\cos 2x}{\cos^2 x} dx;$	б) $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x};$	в) $\int 3xe^{-x^2} dx;$
г) $\int \sin 7x \sin 3x dx.$	д) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx;$	е) $\int \frac{2x^2+5x}{(x+1)(x^2+3)} dx;$
ж) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx.$	з) $\int \frac{\log_3 x}{x^3} dx;$	
3.

а) $\int x^2 \sqrt{1+2x^3} dx;$	б) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx;$	в) $\int \frac{3x-2}{x^2 x+1} dx;$
г) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos 2x}} dx;$	д) $\int \frac{x+2}{x^2-3x+2} dx;$	е) $\int \frac{4^x dx}{\sqrt[5]{3+4^x}};$
ж) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$	з) $\int (3x-x^2) \sin 3x dx;$	
4.

а) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx;$	б) $\int \frac{2x dx}{4-9x^2};$	в) $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}};$
г) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$	д) $\int \frac{2x+1}{(x-2)x^2+1} dx;$	е) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}};$
ж) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$	з) $\int \lg^2 x dx;$	
5.

а) $\int 3x^2 \sqrt{1-x^3} dx;$	б) $\int \frac{3-2x}{5x^2+7} dx;$	в) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx;$
г) $\int \frac{3^x}{\sqrt{4-9^x}} dx;$	д) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}} dx;$	е) $\int \frac{x+4}{x^2 x-1} dx;$

- ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$
6. а) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx;$
- б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}} dx;$
- в) $\int \frac{3x-5}{x^2+3} \cdot \frac{1}{x+1} dx;$
- г) $\int \frac{\ln^2 x + \sqrt[4]{x}}{x} dx;$
- д) $\int \frac{1+2x}{\sqrt{1+x-x^2}} dx;$
- е) $\int \frac{\cos^3 x + 5}{\cos^2 x} dx;$
- ж) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[4]{x^3}}.$
- з) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx;$
7. а) $\int \frac{\cos^3 x}{1 + \cos 2x} dx;$
- б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}};$
- в) $\int \cos^3 x dx;$
- г) $\int \frac{x^2 dx}{e^{2x^3}};$
- д) $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx;$
- е) $\int \frac{x+4}{x^2+1} dx;$
- ж) $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$
- з) $\int x \cdot \ln^2 x dx;$
8. а) $\int \frac{2x+5}{3x^2-2} dx;$
- б) $\int \sin^5 x dx;$
- в) $\int \frac{2x+1}{x^2+4} dx;$
- г) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7} dx;$
- д) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx;$
- е) $\int \frac{1+3\operatorname{tg}^2 x}{2\sin^2 x} dx;$
- ж) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2-4}} dx.$
- з) $\int 5x^3 e^{-x} dx;$
9. а) $\int \frac{x^2 dx}{3+x^2};$
- б) $\int x e^{-2x^2} dx;$
- в) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+6x+1}} dx;$
- г) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx;$
- д) $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x};$
- е) $\int \frac{1+2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx;$
- ж) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$
- з) $\int \ln(3x^2+1) dx;$
10. а) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x};$
- б) $\int \frac{x+1}{x^2+1} dx;$
- в) $\int \frac{x-1}{x+2} dx;$
- г) $\int \sin^4 3x dx;$
- д) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+8x+7}} dx;$
- е) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt[5]{9+3^x}};$
- ж) $\int x^3 \sqrt{4-x^4} dx.$
- з) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx;$

11. a) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}} dx;$ б) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx;$ в) $\int \cos^3 x \sin 2x dx;$
 г) $\int \frac{x-3}{x^3+3x^2+2x} dx;$ д) $\int \frac{x+4}{\sqrt{8x-4x^2-3}} dx;$ е) $\int \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx;$
 ж) $\int 2^x \sqrt[4]{3+2^x} dx.$ з) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx;$
12. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt{x+1}};$ б) $\int \frac{x^2+3}{x^2-4} dx;$ в) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}};$
 г) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \ln x}{x} dx;$ д) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx;$ е) $\int \frac{x-1}{x^2+4} dx;$
 ж) $\int \cos 2x \sin \frac{x}{2} dx.$ з) $\int x \cdot \sin^2 2x dx;$
13. а) $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{x^5} dx;$ б) $\int \frac{\sin x dx}{2+\cos^2 x};$ в) $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x};$
 г) $\int \frac{x+3}{x^2 x+2^2} dx;$ д) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4x+5}};$ е) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx;$
 ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}.$ з) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx;$
14. а) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx;$ б) $\int \frac{x^4}{4-3x^5} dx;$ в) $\int \frac{2 dx}{x \ln x};$
 г) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x-1}} dx;$ д) $\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$ е) $\int \frac{x+1}{x^2+9} dx;$
 ж) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}} dx.$ з) $\int \operatorname{arctg} 5x dx;$
15. а) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} dx;$ б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{4-4x-x^2}} dx;$ в) $\int \frac{x^3 dx}{e^{1-x^4}};$
 г) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx;$ д) $\int \frac{3x+5}{x^2+5} \frac{dx}{x-1};$ е) $\int \cos^5 x dx;$
 ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}.$ з) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx;$
16. а) $\int \frac{dx}{3x^2+5};$ б) $\int \frac{\cos 2x}{3+\sin^2 2x} dx;$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x+4}};$

- Г) $\int \frac{x-1}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$; Д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; е) $\int e^{2x} e^{2x} + 5^{11} dx$;
 Ж) $\int \frac{6x-3}{x^2+1} dx$. 3) $\int x^2 \sin 4x dx$;
 17. а) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx$; б) $\int \frac{x^2-x+1}{x^2+1} dx$; в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;
 Г) $\int \frac{4x+1}{x^2+5x+8} dx$; Д) $\int 1-2e^{2x} e^{2x} dx$; е) $\int \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx$;
 Ж) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$. 3) $\int \ln(2x+3) dx$;
 18. а) $\int x^3 \sqrt{2+x^4} dx$; б) $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$; в) $\int \frac{dx}{16+25x^2}$;
 Г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; Д) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx$; е) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\cos^2 3x} dx$;
 Ж) $\int \frac{x dx}{x^2+6} \cdot \frac{1}{x+2}$. 3) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}} dx$;
 19. а) $\int \frac{x^2+x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; б) $\int \frac{3x^2}{x^2+2} dx$; в) $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin x} dx$;
 Г) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos^2 x}} dx$; Д) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+7} dx$; е) $\int \cos 2x \cos 5x dx$;
 Ж) $\int \frac{x dx}{(x+1)^2(x-3)}$; 3) $\int x \sin^2(1-x) dx$;
 20. а) $\int \frac{\sin \ln x}{x} dx$; б) $\int \frac{x^2+3}{x^2+5} dx$; в) $\int \frac{2x-3}{x^2-x^2-5x+6} dx$;
 Г) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+8x+7}} dx$; Д) $\int \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$; е) $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$;
 Ж) $\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx$; 3) $\int x^2 \cos(1+2x) dx$;
 21. а) $\int \frac{\sqrt[6]{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{5+x^6}} dx$; в) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$;
 Г) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx$; Д) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$; е) $\int \frac{x^2-x+3}{x^3+1} dx$;

- ж) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; 3) $\int \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}$;
22. а) $\int e^{3x} \sqrt{e^{3x} - 9} dx$; б) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; в) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 4}$;
- г) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[5]{3+2x^4}}$; д) $\int \frac{x-3 dx}{x^3+3x^2}$; е) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$;
- ж) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$;
23. а) $\int x^2 \sqrt{1-x^3} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$; в) $\int \sin 4x \sin 5x dx$;
- г) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; д) $\int \frac{x+2 dx}{x^2+2x+5}$; е) $\int \frac{\sin 2x dx}{3 \sin x}$;
- ж) $\int \frac{x dx}{x^3-1}$; 3) $\int \arccos 3x$;
24. а) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln^2 x}}$; б) $\int \frac{3x-2}{x^3-x} dx$; в) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{25-4x^6}}$;
- г) $\int \sin^3 x \sin 2x dx$; д) $\int \frac{2x-1 dx}{x^2-2x-2}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;
- ж) $\int \sin 3x \cos 2x dx$; 3) $\int \arcsin 3x$;
25. а) $\int \frac{3x dx}{2x^2-5}$; б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}}$; в) $\int \frac{x+2 dx}{x^2+x-12}$;
- г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+3}}$; д) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[4]{x}}$; е) $\int \frac{7x-3 dx}{x^2+1}$;
- ж) $\int \frac{\sin^3 x dx}{1-\cos 2x}$; 3) $\int x^3 e^{-x^2}$;

Задача 2

Вычислите определённые интегралы.

1. а) $\int_1^{e^2} \frac{1+2x \ln x}{x^2} dx$; б) $\int_1^e \sqrt[3]{x} \ln x dx$; в) $\int_0^2 \sqrt[3]{1+x^2} x dx$; г) $\int_1^2 \frac{2^x dx}{1-4^x}$.
2. а) $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+3x+2}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; в) $\int_1^2 x \sqrt{x^2-1} dx$; г) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

3. a) $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$; в) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$; г) $\int_0^1 \arcsin x dx$.
4. a) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+4}}$; б) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$; в) $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2}$; г) $\int_0^\pi x \sin 2x dx$.
5. a) $\int_0^2 3-2x e^{-3x} dx$; б) $\int_0^4 \frac{x-1 dx}{\sqrt{x}+1}$; в) $\int_0^1 3x\sqrt{1-x^2} dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$.
6. a) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6-25} dx$; б) $\int_1^4 \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$; в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$; г) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2}$.
7. a) $\int_{-2}^2 1-x \sin \pi x dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 4x dx$; в) $\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$; г) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$.
8. a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x dx$; в) $\int_1^4 x \log_2 x dx$; г) $\int_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.
9. a) $\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; б) $\int_1^3 2^x 1+2^x dx$; в) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x dx}{\cos^2 x^2}$; г) $\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{1-4x^3}$.
10. a) $\int_1^e 1+\sqrt{\ln x} \frac{dx}{x}$; б) $\int_{-1}^0 2x+3 e^{-x} dx$; в) $\int_{\sqrt{3}}^2 x\sqrt{1+x^2} dx$; г) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.
11. a) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{16+\sin^2 x}$; в) $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}$; г) $\int_2^3 3-x e^x dx$.
12. a) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+16}}$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}$; г) $\int_1^2 x^3 \ln x dx$.
13. a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$; в) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx$; г) $\int_1^e x \ln x dx$.
14. a) $\int_0^1 \frac{x^2+3}{x-2} dx$; б) $\int_1^2 \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$; в) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}$; г) $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.
15. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 12^{\sin x} \cos x dx$; в) $\int_0^1 x e^{-x} dx$; г) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$; в) $\int_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2 + 7} dx$; г) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.
17. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$; б) $\int_1^e \frac{\cos \ln x}{x} dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$; г) $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1 + 9^x} dx$.
18. а) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$; б) $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx$; в) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^4}}$; г) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.
19. а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}$; б) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$; г) $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^2}$.
20. а) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$; б) $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx$; в) $\int_2^3 \frac{x^2 dx}{4 + x^3}$; г) $\int_1^2 \log_2 x dx$.
21. а) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(1 - 2x)^3}$; б) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$; г) $\int_1^e \frac{x - \ln^2 x}{x} dx$.
22. а) $\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{5}} \frac{dx}{\sqrt{\pi^2 - 25x^2}}$; б) $\int_0^1 x - 1 e^{-x} dx$; в) $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$; г) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.
23. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) dx$; б) $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} x dx$; в) $\int_1^{\sqrt[3]{3}} \sqrt{1 + x^3} x^2 dx$; г) $\int_1^2 x \ln x dx$.
24. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos 2x dx$; б) $\int_0^1 x^3 e^{x^4} dx$; в) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 + 4x^2}}$; г) $\int_{100}^{1000} 3^{\lg x} \frac{dx}{x}$.
25. а) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}$; в) $\int_0^3 x\sqrt{9 - x^2} dx$; г) $\int_0^5 x e^x dx$.

Задача 3

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-3x} x + 1 dx$.

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

$$3. \int_2^{+\infty} \frac{\log_2 x}{x^3} dx.$$

$$4. \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 6}.$$

$$5. \int_1^{+\infty} e^{-x} (3x - 1) dx.$$

$$6. \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 8x + 17}.$$

$$7. \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{x^2 + 3}.$$

$$8. \int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x - 10}.$$

$$9. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$10. \int_4^{+\infty} \frac{\log_2 x}{x} dx.$$

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2 + 3}}.$$

$$12. \int_{-1}^{+\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

$$13. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

$$14. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 5}.$$

$$15. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$$

$$16. \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$17. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$18. \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 5}^3}.$$

$$19. \int_{0,5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

$$20. \int_{-1}^{+\infty} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

$$21. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^3 x}}.$$

$$22. \int_1^{+\infty} e^{-2x} (x + 1) dx.$$

$$23. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

$$24. \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$$

$$25. \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{\log_3 x}}{x} dx.$$

Задача 4

1. Вычислить площади фигур, на которые парабола $y^2 = 2x$ делит окружность $x^2 + y^2 = 8$.

2. Вычислить площади фигур, на которые парабола $y = x^2$ делит окружность $x^2 + y^2 = 2$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \arcsin x$, прямыми $y = -\frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$ и осью ординат.
4. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 - y^2 = 1$ и $x = 2$.
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = 2x$ и $27y^2 = 8(x-1)^3$.
7. Найти площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 4 - 2x$ от линии $y = x^2 + 1$.
8. Найти площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 36$, $x\sqrt{3} - 3y = 0$ и осью ОХ.
9. Найти площадь сегмента, отсекаемого прямой $x + y = 4$ от линии $y^2 + x^2 = 16$.
10. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линиями $y = 2x^2$ и $y = 6x^2$, $x = 1$, $x = -1$.
11. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линиями $y = 2^x$, $y = -x^2$, $x = -3$, $x = 3$.
12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = -x^2 + 8x$ и осью ОХ.
13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5 - x^2$ и $x + y - 1 = 0$.
14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$ и $5x - y - 8 = 0$.
15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2$ и $4x - 2y + 5 = 0$.
16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = -3$, $y = 3$, $y = -\frac{1}{x}$.
17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x + 3$, $x = 4$ осями координат.

18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}$ и $x + y - 4 = 0$.
19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 6x$, $x = -1$, $x = 3$ и осью абсцисс.
20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ и осью абсцисс.
21. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 6x - 2$, $y = x^2 - 2x + 4$.
22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sin x$, $y = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, где $0 \leq x \leq 2\pi$.
23. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $yx = 3$, $9y - x^2 = 0$, $y = 9$.
24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \lg x$, $x = 0,1$, $x = 10$ и осью ОХ.
25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln(x + 1)$, $y = 2$ и осью ОУ.

Задача 5

- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
 - $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
 - $\rho = 3 - \cos 3\varphi$.
- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
 - $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$
 - $\rho = 2 + \cos \varphi$.
- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
 - $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$
 - $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.
- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
 - $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$
 - $\rho = a(1 - \sin \varphi)$.
- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

- а) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t + 1 \end{cases}$ б) $\rho = 2 \sin 3\varphi$.
6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ б) $\rho = 3 \cos 2\varphi$.
7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - t \end{cases}$ б) $\rho = 4 + \cos 2\varphi$.
8. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = -t^2 \end{cases}$ б) $\rho = 4 - 2 \cos \varphi$.
9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases}$ б) $\rho = 2 \sin 4\varphi$.
10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$ б) $\rho = 3 \sin 3\varphi$.
11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ б) $\rho = 2 \cos 3\varphi$.
12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ б) $\rho = 1 + \cos 3\varphi$.
13. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $\begin{cases} x = \sqrt{2}(t - \sin t) \\ y = \sqrt{2}(1 - \cos t) \end{cases}$ б) $\rho = 1 + \sin 2\varphi$.
14. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$ б) $\rho = 3 + \sin 3\varphi$.
15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} \quad \text{б) } \rho = 1 + \cos \varphi.$$

16. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 6 \sin t \end{cases}, y = 3 (y \geq 3) \quad \text{б) } \rho^2 = 4 \sin 2\varphi.$$

17. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = \frac{t}{3}(6 - t) \\ y = \frac{t^2}{8}(6 - t) \end{cases} \quad \text{б) } \rho = 3 \cos 4\varphi.$$

18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, y = 2 (y \geq 2) \quad \text{б) } \rho^2 = 16 \cos 2\varphi.$$

19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 16 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}, x = 2 (x \geq 2) \quad \text{б) } \rho = 2 - \sin 4\varphi.$$

20. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 4 \cos t - 2 \cos 2t \\ y = 4 \sin t - 2 \sin 2t \end{cases} \quad \text{б) } \rho = 3 - 2 \cos 3\varphi.$$

21. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = -t^2 \\ y = t - \frac{1}{2}t^3 \end{cases} \quad \text{б) } \rho = 1 - \cos 4\varphi.$$

22. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = -t^2 \end{cases} \quad \text{б) } \rho = 1 - \sin 5\varphi.$$

23. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}, x = 1 (x \geq 1) \quad \text{б) } \rho = 2 + \sin \varphi.$$

24. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, y = 1 (0 < t < 2\pi, y \geq 1) \quad \text{б) } \rho = 1 - \sin 4\varphi.$$

25. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}, y = 4\sqrt{3} (y \geq 4\sqrt{3}) \quad \text{б) } \rho = 1 + \cos 4\varphi.$$

Задача 6

1. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = \frac{x^2}{2} - 1$ между точками пересечения ее с осью ОХ.
2. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = \ln x$ между точками, абсциссы которых $x_1=1$ и $x_2 = \sqrt{8}$.
3. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = \sqrt{x^3}$ от начала координат до точки, абсцисса которой $x=4$.
4. Вычислить длину дуги цепной линии, заданной уравнением $y = 2 \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}} \right)$ между точками, абсциссы которых $x_1=0$ и $x_2=4$.
5. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = \ln \sin x$ между точками, абсциссы которых $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{\pi}{3}$.
6. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $2y = x^2 - 2$ между точками, абсциссы которых $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$.
7. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$.
8. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ между точками, абсциссы которых $x_1 = 0$ и $x_2 = b$.
9. Вычислить длину петли линии, заданной уравнениями
$$\begin{cases} x = t - \frac{t^3}{3} \\ y = t^2 \end{cases}$$
.
10. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = e^{\frac{x}{2}}$ между точками, абсциссы которых $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.
11. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $x = \sqrt[3]{y^2} - 1$ между точками, ординаты которых $y_1 = 0$ и $y_2 = 27$.
12. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y^2 = x^3$ между точками пересечения ее с прямой $x = \frac{4}{3}$.
13. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y^2 = x^3$ между точками, абсциссы которых $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.
14. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $9y^2 = x(x-3)^2$ между точками пересечения ее с осью ОХ.

15. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = x^2 - 1$ отсеченной осью ОХ.
16. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = 1 - \ln \cos x$ между точками, абсциссы которых $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{6}$.
17. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = \ln(1 - x^2)$ между точками, абсциссы которых $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{1}{2}$.
18. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y^2 = (x + 1)^3$ отсеченной прямой $x = 4$.
19. Вычислить длину арки кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
20. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $x^2 - 2y - 2 = 0$ отсеченной осью ОХ.
21. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3$ отсеченной прямой $x = -1$.
22. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ между точками, абсциссы которых $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.
23. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $9y^2 = x(x - 3)^2$ между точками пересечения ее с осью ОХ.
24. Вычислить длину линии, заданной уравнениями $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t}{3}(t^2 - 3) \end{cases}$ между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = \sqrt{3}$.
25. Вычислить длину дуги линии, заданной уравнением $y = \ln(x + 1)$ между точками, абсциссы которых $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Задача 7

1. Определить объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y = 2x^3$ и прямыми $x = -1, x = 1$.
2. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, осью ОХ и прямой $x = e$.
3. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y = \arcsin x$, осью ОХ и прямой $x = 1$.

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $x^2 - y^2 = 1$, осью ОХ и прямой $x = 2\sqrt{2}$.
5. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$, осью ОХ.
6. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной аркой циклоиды
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
 и осью ОХ.
7. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 4x$, осью ОУ и прямой $y = 2$.
8. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 4x$, осью ОХ и прямой $x = 3$.
9. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x - 1)^3$ и прямой $x = 2$.
10. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x^2$ и $y = x^3$ между их точками пересечения.
11. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривыми $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ и прямой $x = \frac{\pi}{6}$.
12. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $8x = y^2$ и прямой $x = \frac{\pi}{6}$.
13. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривыми $y = 2^x$ и $y = 4^x$ и прямой $x = 1$.
14. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной кривыми $x^2 - y^2 = 3$ и $xy = 2$ и прямой $x = 3$.
15. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ и осью ОХ.
16. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривыми $x^2 - y^2 = a^2$ и $x = -2a, x = 2a$.
17. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОУ, ограниченной кривыми $y = \frac{1}{4}x^2$ и прямыми $y = 1, y = 5$.
18. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $(y - 3)^2 + 3x = 0$ и прямой $x + 3 = 0$.
19. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x + 4)^3$ и осью ОУ.

20. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x = 1$, $y = 0$ и $x = 4$.
21. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$.
22. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$ и осью OX .
23. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x = -a$, $x = a$ и осью OX .
24. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x = 1$ и осями OX и OY .
25. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $y = x$.