Тема: Логикапредикатов

Срок – 2 недели.

Макс. число баллов -100; оценки: ≥70 -3; ≥ 80 - 4; ≥ 90 – 5.

Номер варианта в каждой задаче определяется по вашему номеру в списке группы по таблице:

Варианты задач

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Задача | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| баллы | 8 | 10 | 10 | 12 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 16 | 1 | 16 | 7 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| 17 | 2 | 17 | 8 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| 18 | 3 | 18 | 9 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 19 | 4 | 19 | 10 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 20 | 5 | 20 | 11 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| 21 | 6 | 4 | 12 | 21 | 13 | 16 | 21 | 19 |
| 22 | 7 | 17 | 13 | 22 | 6 | 9 | 22 | 2 |
| 23 | 8 | 10 | 14 | 23 | 19 | 2 | 23 | 16 |
| 24 | 9 | 3 | 15 | 24 | 12 | 15 | 24 | 6 |
| 25 | 10 | 16 | 1 | 25 | 5 | 8 | 25 | 14 |
| 26 | 11 | 9 | 2 | 26 | 18 | 1 | 26 | 3 |
| 27 | 12 | 2 | 3 | 27 | 11 | 14 | 4 | 10 |
| 28 | 13 | 15 | 4 | 28 | 4 | 7 | 12 | 7 |
| 29 | 14 | 8 | 5 | 29 | 17 | 20 | 3 | 12 |
| 30 | 15 | 1 | 6 | 30 | 10 | 13 | 18 | 1 |

Оглавление

[2. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ 3](#_Toc469401805)

[2.1. Понятие предиката и операции над предикатами 3](#_Toc469401806)

[2.2. Кванторы общности и существования 5](#_Toc469401807)

[2.3. Множество истинности предиката 8](#_Toc469401808)

[2.3. Равносильность и следование предикатов 16](#_Toc469401809)

[2.4. Формулы логики предикатов 19](#_Toc469401810)

[2.5. Интерпретация формул логики предикатов 21](#_Toc469401811)

[2.6. Классификация формул. Семантические таблицы 24](#_Toc469401812)

[**Задание 2.1.** Определение предиката, операции с предикатами 7](#_Toc469403393)

[**Задание 2.2.** Множество истинности предиката 9](#_Toc469403394)

[**Задание 2.3.** Множество истинности предиката 11](#_Toc469403395)

[**Задание 2.4.** Кванторы 11](#_Toc469403396)

[**Задание 2.5.** Равносильность и следование предикатов 16](#_Toc469403397)

[**Задание 2.6.** Равносильность и следование предикатов 17](#_Toc469403398)

[**Задание 2.7.** Формулы логики предикатов, их интерпретация 23](#_Toc469403399)

[**Задание 2.8.** Табличный вывод 33](#_Toc469403400)

# 2. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

## 2.1. Понятие предиката и операции над предикатами

Дальнейшим развитием идей логики высказываний является логика предикатов. Логика предикатов изучает законы причинно-следственной зависимости между утверждениями, представимыми в виде отношений. Для этого вводится формальный язык, выражения которого предназначены для описания отношений между произвольными предметами.

Язык логики предикатов определяется:

1. алфавитом;
2. синтаксисом;
3. семантикой

*Алфавитом* называется система знаков (символов) некоторого языка.

*Синтаксисом* называется система правил, определяющих способы построения предложений некоторого языка из символов алфавита. В логике предикатов синтаксис описывает способы построения и преобразования формул.

*Семантика* обозначает содержание, информацию, передаваемые языком или какой-либо его единицей. В логике предикатов семантика занимается проблемой *интерпретации*, т.е. анализом отношений между знаками и обозначаемыми объектами.

**Алфавит Логики предикатов.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Базовые символы: | | | | |
| предметные множества | | *M*1,*M*2, … ,*M*n | | – множества значений предметных переменных |
| предметные переменные | | *Var=*{*x*1, *x*, *y*3, *z*, …} | | – принадлежат предметным множествам: *x*i∈*M*i |
| предметные константы | | *Const*={*a*1, *b*3, *c*4, …} | | – это *имена* предметов из предметных множеств: *a*i∈*M* |
| функциональные символы | | *Func*= | | – обозначают *операции* над предметами; (2), (4), (5) – число переменных |
| предикатные символы | | *Pred*={,…} | | – обозначают *отношения* между предметами: |
| Логические связки и кванторы – обозначают *операции*  над предикатами: | | | | |
| отрицание | | | ¬ | – логическое НЕ |
| конъюнкция | | | & | – логическое И |
| дизъюнкция | | | ∨ | – логическое ИЛИ |
| импликация | | | → | – логическое ЕСЛИ…,ТО |
| эквивалентность | | | ↔ | – «эквивалентно» |
| квантор всеобщности | | | ∀ | – «для всех» |
| квантор существования | | | ∃ | – «хотя бы для одного» |
| Знаки препинания: | | | | |
| , | – разделитель | | | |
| (, ) | – скобки, меняют приоритет операций | | | |

**Сравните Язык логики высказываний.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Базовые символы: | | | | |
| пропозициональнае переменные | | *State*={,…} | | – обозначают простые высказывания |
| Логические связки и кванторы – обозначают *операции*  над предикатами: | | | | |
| отрицание | | | ¬ | – логическое НЕ |
| конъюнкция | | | & | – логическое И |
| дизъюнкция | | | ∨ | – логическое ИЛИ |
| импликация | | | → | – логическое ЕСЛИ…,ТО |
| эквивалентность | | | ↔ | – «эквивалентно» |
| Знаки препинания: | | | | |
| , | – разделитель | | | |
| (, ) | – скобки, меняют приоритет операций | | | |

**Синтаксис ЛП.**

1. *n-местным предикатом* (или *функцией-высказы-ванием от n переменных*), определенным на множествах *M*1, *M*2, …, *M*n, называют выражение, содержащее *n* переменных *x*1, *x*2, …, *x*n, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных конкретных элементов (предметов) из множеств *M*1, *M*2, …, *M*n соответственно.

Для *n-*местного предиката будем использовать обозначение *P*(*x1, x2, …, xn*). Высказывание будем считать 0-местным предикатом.

Фактически *n*-местный предикат определяет функцию от *n* аргументов *x1, x2, …, xn,* заданных на множествах *M1*, *M2*, …, *Mn*, и принимающую значения на двухэлементном множестве {истина, ложь}(или {0,1}). Поэтому предикат называют также *функцией-высказыванием*, отображающей множество наборов предметных переменных (*a1,a2, …,an*)∈*M1*×*M2*× …×*Mn*во множество высказываний.

Если *M1*=*M2*= …=*Mn*=*M*, то *M1*×*M2*× …×*Mn*= *M*n.

Предложение «Живое существо *х* - насекомое» является одноместным предикатом, определенным над множеством *М* всех живых существ. Подставив вместо предметной переменной *х* название «пчела», получим высказывание «Живое существопчела- насекомое». Это высказывание истинно. Подставив вместо *x* предмет «человек» получим ложное высказывание «Живое существочеловек- насекомое».

1. Предложение (выражение) «х + 2\*у ≤ 5» является двухместным предикатом, заданным над множеством*R*×*R*=*R*2. Пара действительных чисел (1, 2) превращает данный предикат в истинное высказывание: «1 + 2\*2≤ 5», а пара чисел (2, 3) — в ложное: «2 + 2\*3≤ 5».
2. Предикат *Р*(*x1, x2, …, xn*), заданный на множествах *M1*, *M2*, …, *Mn*, называется:

а) *тождественно истинным* (*тождественно ложным*), если при любой подстановке вместо переменных *x1, x2, …, xn* любых конкретных предметов *a1,a2, …,an* из множеств *M1*, *M2*, …, *Mn* соответственно он превращается в истинное (ложное) высказывание *Р*(*a1,a2, …, an*);

б) *выполнимым* (*опровержимым*), если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов *a1,a2, …,an* из множеств *M1*, *M2*, …, *Mn*соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат *Р*(*x1, x2, …, xn*) последний превращается в истинное (ложное) высказывание *Р*(*a1,a2, …, an*).

1. Одноместный предикат «Город *х* расположен на берегу реки Волги», определенный на множестве названий городов, является выполнимым, потому что существуют города(например, Ульяновск, Саратов), названия которых превращают данный предикат в истинное высказывание.Но данный предикат небудет тождественно истинным, потому что существуют города(например, Прага, Москва),названия которых превращают его в ложное высказывание. Этот же предикат являет собой пример опровержимого, но не тождественно ложного предиката.
2. Одноместный предикат «sin2x+cos2x=1», определенный на множестве действительных чисел R,­– тождественно истинный, а двуместный предикат «x2+y2<0»определенный на множестве действительных чисел R2 – тождественно ложный.

На предикаты естественным образом переносятся все операции (логические связки): ¬,&, ∨, →, ↔, которые мы проделывали над высказываниями, с учетом того, что предикаты имеют переменные, заданные на предметных множествах. Поэтому, например, определение импликации в логике предикатов выглядит следующим образом.

1. Импликация предикатов *Р*(*x1, x2, …, xn*)→*Q*(*y1,y2, …, ym*)определяется как такой предикат, у которого для любых предметов *a1*∈*M1, a2*∈*M2, …, an*∈*Mn* и *b1*∈*N1, b2*∈*N2, …, bm*∈*Nm*высказывание *Р*(*a1, a2, …, an*)→*Q*(*b1,b2, …, bm*) является импликацией высказываний *Р*(*a1, a2, …, an*) и *Q*(*b1,b2, …, bm*).

Аналогично определяется отрицание предиката, конъюнкция, дизъюнкция, эквивалентность двух предикатов.

## 2.2. Кванторы общности и существования

Кроме того, для предикатов определяются еще две операции:

1) *квантор общности*  (читается: «для всех *x* имеет место »);

2) *квантор существования*  (читается: «существует *x*, для которого имеет место »).

1. Если операции общности и существования применяются к одноместному предикату*P*(*x*),они ставят в соответствие этому предикату высказывания и соответственно, логические значения которых определяются следующими правилами:

Обратите внимание, что применение кванторов к одноместному предикату превращает его в *высказывание*, не зависящее от предметной переменной *x*.Поэтому говорят, что квантор «связывает» переменную *x*.

Переменная *x* в кванторах и называется *связанной.*

1. Рассмотрим одноместные предикаты, заданные на множестве *N* натуральных чисел:

1) *P*1(*x*)=«1≤*x*» - тождественно-истинный предикат;

2) *P*2(*x*)= «*x*<1» - тождественно-ложный предикат;

3) *P*3(*x*)= «*x*>5» - опровержимый и выполнимый предикат.

Применение кванторов к этим предикатам дает результат:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Кванторыи можно применять также к *n-*местному предикату; в результате получается (*n*–1)*-*местный предикат.

1. *Операцией связывания квантором общности* по переменной *x*1 называется правило, по которому каждому *n*-местному (n≥2) предикату *Р*(*x1, x2, …, xn*), определенному на множествах *M1*, *M2*, …, *Mn*, ставится в соответствие новый (*n*-1)-местный предикат, обозначаемый(*Р*(*x1, x2, …, xn*)), который для любых предметов*a2*∈*M2, …, an*∈*Mn* превращается в высказывание (*Р*(*x1, а2, …, аn*)), принимающее значения:
2. *Операцией связывания существования* по переменной *x*1 называется правило, по которому каждому *n*-местному (n≥2) предикату *Р*(*x1, x2, …, xn*), определенному на множествах *M1*, *M2*, …, *Mn*, ставится в соответствие новый (*n*-1)-местный предикат, обозначаемый(*Р*(*x1, x2, …, xn*)), который для любых предметов*a2*∈*M2, …, an*∈*Mn* превращается в высказывание (*Р*(*x1, а2, …, аn*)), принимающее значения:

Хотя значения предикатов и не зависят от *связанной* переменной , но они зависят от других переменных *x2, …, xn,* которые называются *свободными.*

К (*n*-1)-местному предикату (или ), зависящему от переменных , можно снова применить операцию связывания квантором (общности или существования) поодной из свободных переменных. В результате получится (*n* - 2)-местный предикат и т. д.

1. Рассмотрим двухместный предикат «*y*≤*x*», определенный на множестве *N*2. Применим к нему кванторы общности и существования по переменной *x*. Получим одноместные предикаты и При *y*=1 предикат *P*1 превращается в истинное высказывание, при *y*≥2 – в ложное. Предикат *P*2 тождественно истинен.
2. Определение предиката, операции с предикатами

Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел*R*:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .

Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов *M*совпадает с *R*:

11) ;

12) ;

13) ;

14) .

15) Пусть переменная *x* пробегает конечное множество . Каким высказываниям без кванторов будут эквивалентны в этом случае высказывания и ?

1. Дан предикат

Так как переменная *x* – связанная, то это 0-местный предикат, то есть высказывание. Это высказывание читается так: «Любое действительное число равно самому себе тогда и только тогда, когда оно больше 1 или меньше 2». Чтобы выяснить, истинно или ложно данное высказывание, будем, например, искать такое действительное число *x*, которое превратило бы одноместный предикат в ложное высказывание. Если нам удастся найти такое число, то данное высказывание, получающееся из этого предиката «навешиванием» (т.е. применением операции взятия) квантора общности, ложно. Если же мы придем к противоречию, предположив, что такое *x* существует, то данное высказывание истинно.

Ясно, что предикат «» превращается в истинное высказывание при подстановке вместо *x* любого действительного числа, т.е. является тождественно истинным. Спрашивается, можно ли указать действительное число, которое превратило бы предикат «» в ложное высказывание? Нет, потому что какое бы действительное число мы ни взяли, оно либо больше 1, либо меньше 2 (либо одновременно и больше 1 и меньше 2, что вовсе не возбраняется в нашем случае). Следовательно, предикат «» тождественно истинен. Тогда тождественно истинным будет и предикат , а значит, данное высказывание по определению операции взятия квантора общности истинно.

## 2.3. Множество истинности предиката

1. *Множеством истинности* предиката , заданного на множествах , называется совокупность всех упорядоченных наборов предметных переменных, в которых , таких, что =1. Это множество будем обозначать . Таким образом,

Множество истинности *n-*местного предиката , заданного на множествах ,является подмножеством декартова произведения предметных множеств :

.

В терминах множества истинности предиката легко представить понятия, связанные со свойствами и операциями над предикатами.

Обозначим через – предикаты от *n* переменных , , заданные над множеством , где . Множества истинности *P*+, *Q*+удовлетворяют соотношениям (рисунок 2.1):

1. будет тождественно-истинным тогда и только тогда, когда ;
2. будет тождественно-ложным тогда и только тогда, когда = ∅;
3. будет выполнимым тогда и только тогда, когда ≠ ∅; будет опровержимым тогда и только тогда, когда ≠ *M*;

|  |  |
| --- | --- |
| 1. ¬ - отрицание предиката | (¬*P*)+= = M\ *P*+ |
| 1. *P*∨*Q* - дизъюнкция | (*P*∨*Q*)+=*P*+∪*Q*+ |
| 1. *P*&*Q* - конъюнкция | (*P*&*Q*)+=*P*+∩*Q*+ |
| 1. *P*→*Q* - импликация | (*P*→*Q*)+=∪*Q*+ |
| 1. *P*↔*Q* - эквивалентность | (*P*↔*Q*)+=(∩)∪( *P*+∩*Q*+) |
| 1. *PQ* - равносильность | *P*+=*Q*+ |
| 1. *PQ* - следование | *P*+⊆*Q*+ |

1. Множествоистинности предиката

Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих двухместных предикатов, заданных на множестве действительных чисел *R*×*R*:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) «|*x*| = |*y*|» | 6) «*x*>2» ↔ «*y*<2» |
| 2) «*x*2+*y*2 ≤ 9» | 7) «sin(*x*)>0»&«*y*-2<0» |
| 3) «*x*2 ≤*y*2» | 8) «*x*>2»→«*y*<2» |
| 4) «(*x*2 - *y*2)/(*x*+*y*) = *x*-*y*» | 9) «*x*2+*y*2>1» ↔ «*xy*<0» |
| 5) «*y*=lg(*x*+1)» | 10) «*x*>2»∨«*y*<-1» |

Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных над конечным множеством целых чисел *М* = {1, 2, 3, 4, 5, ..., 19, 20}:

11) «*х* – четное число»;

12) «*х* – простое число»;

13) «*х*< 10» & «*x*>13»;

14) «*x* является делителем числа 3»;

15) «*х* – нечетное число» → «*х* – квадрат натурального числа»;

16) «*х* – квадрат натурального числа» → «*х* – четное число»;

17) «*x* является делителем числа 16»∨«*х*> 15»;

18) «*х*– квадрат натурального числа» → «*х*< 10»;

19) «*х*> 14»↔«4 является делителем *x*»;

20) «*х*– нечетное число»↔«2 не является делителем *x*».

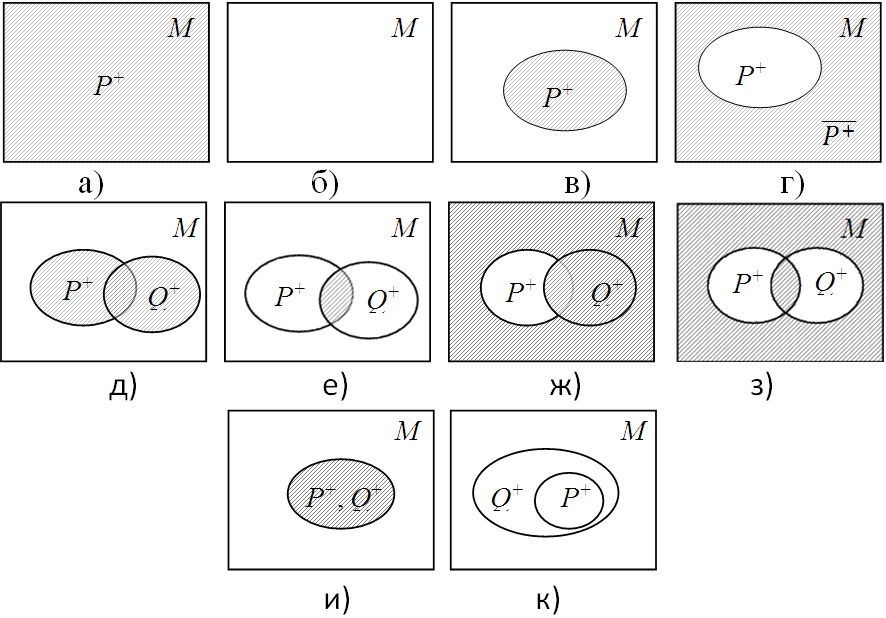
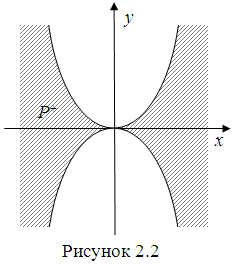


Рисунок 2.1. Множества истинности предикатов (заштрихованная область):

а) тождественно истинный предикат; б) тождественно ложный предикат; в) выполнимый и опровержимый предикат; г) отрицание предиката ¬*P*; д) дизъюнкция предикатов *P*∨*Q*; е) конъюнкция предикатов *P*&*Q*; ж) импликация предикатов *P*→*Q* ; з) эквивалентность предикатов *P*↔*Q* ; и) равносильность предикатов *PQ*; к) следование предиката *PQ*

1. Изобразите на координатной плоскости множество истинности предиката *P*(*x*,*y*)= «*x*2≥ |*y*|» , заданного на множестве действительных чисел *R*×*R.*

Решение. Согласно определению 2.7множество *P*+={(*x*,*y*): *x*2≥|*y*|} = {(*x*,*y*): «*x*2≥*y*, если y≥0» и «*x*2≥-*y*, если y<0»}= {(*x*,*y*): «*y*≤*x*2, если y≥0»}∪{(*x*,*y*): «*y*≥-*x*2, если *y*<0»}.Итак, после раскрытия модуля |*y*| решение распадается на две области: в верхней полуплоскости (*y*≥0) *y*≤*x*2и в нижней полуплоскости (*y*<0) *y*≥-*x*2. Множество истинности предиката изображено на рис. 2.2.

Рисунок 2.2

1. Задано множество целых чисел *М* = {3, 4, 5, 6, 7, 19, 20}. Найдите множество истинности предиката *P*(*x*)=«если число 2 является делителем числа *x*, то *x* кратно 5», заданного на множестве*М.*

Решение. Данный предикат является импликацией двух предикатов *P*1(*x*)= «число 2 является делителем числа *x*» и *P*2(*x*)= «*x* кратно 5», заданных на множестве *M*: *P*(*x*)=*P*1(*x*)→*P*2(*x*). Множества истинности равны: ={4,6, 20}, ={5,20}. Тогда *P*+=∪=(*M*\)∪={3, 5, 7, 19}∪{5, 20}={3, 5, 7, 19, 20}.

1. Множествоистинности предиката

Напишите двухместный предикат, область истинности которого совпадает с заштрихованной частью рисунка 2.3, считая, что границы принадлежат множеству истинности.По возможности упростите предикат.

1. Кванторы

Пусть и – такие одноместные предикаты, заданные над одним и тем же множеством , что высказывание:

1) истинно; докажите, что высказывание ложно;

2) ложно; докажите, что высказывание истинно, а высказывание ложно;

3) ложно; докажите, что тогда каждое из высказываний и истинно;

4) ложно; докажите, что тогда будет ложным высказывание ;

5) истинно; докажите, что тогда истинно и следующее высказывание ;

6) ложно; докажите, что высказывание ложно, а истинно;

7) истинно; доказать, что высказывание также тогда будет истинным;

8) истинно; доказать, что высказывание ложно;

9) ложно; проверьте, что тогда высказывание истинно;

10) ложно; проверьте, что тогда будет ложным и высказывание ;

11) ложно; докажите, что первое из высказываний и ложно, а второе истинно.

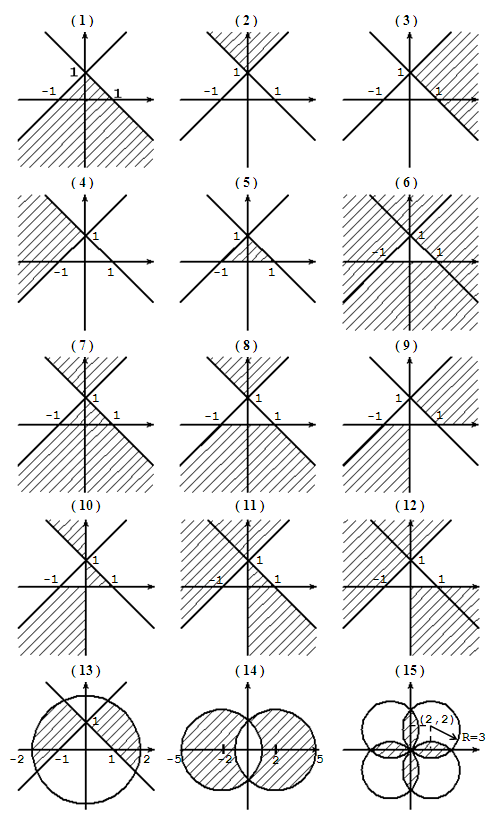


Рисунок 2.3. Множества истинности предикатов

Какими могут быть множества и истинности предикатов и соответственно, заданных над непустым множеством , если известно, что следующее высказывание истинно:

12) ;

13) ;

14) ;

15) ;

16) ;

17) ;

18) ;

19) ;

20) ;

21) ;

Какими могут быть множества и истинности предикатов и соответственно, заданных над непустым множеством , если известно, что следующее высказывание ложно:

22) ;

23) ;

24) ;

25) ;

26) ;

27) ;

28) ;

29) ;

30) ;

31) ;

1. Дано: истинно; проверьте, что тогда высказывание ложно.

Решение. Из условия, по определению квантора существования следует, что для некоторого предмета . Отсюда по свойству конъюнкции заключаем, что и . Тогда , и из последнего соотношения с учетом только что установленного получим . Учитывая, что , последнеевозможно только если .

Итак, и . Тогда по определению дизъюнкции имеем: для некоторого , то есть существует по крайней мере один предмет *x*=*a*, в которой предикат ложен. По определению квантора общности отсюда следует, что высказывание ложно.

1. Дано: истинно.Какими могут быть множества и ?

По определению конъюнкции двух высказываний из условия следует:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |

Далее, из (1) по определению отрицания заключаем, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

По определению квантора общности (3) означает, что предикат не является тождественно истинным, т.е. что его множество истинности не есть все множество , т.е. , т.е. . Последнее условие, как нетрудно понять, равносильно следующему: . Далее, из (2) по определению квантора существования следует, что предикат выполним, т.е. его множество истинности не пусто: , т.е. , или . Отсюда следует, что (т.е. ) или .

Ответ. Множества и должны удовлетворять следующим условиям: и либо , либо .

1. Дано истинно. Какими могут быть множества и ?

Из условия задачи по определению эквивалентности двух высказываний заключаем, что должны выполняться либо два следующих условия:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |

либо два следующих условия:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |
|  | (4) |

Из (1) следует, что предикат тождественно истинный, т.е. его множество истинности совпадает с . Поскольку и суть части множества , то из последнего равенства следует

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Условие (2) эквивалентно следующему: , откуда заключаем, что предикат тождественно ложный, т.е. его множество истинности пусто:. Следовательно,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Сравнивая полученные условия (5) и (6), ввиду того, что , заключаем, что условия (1) и (2) не могут выполняться.

Рассмотрим условия (3) и (4). Из первого следует, что предикат опровержим, т.е. не является тождественно истинным, а значит его множество истинности . Отсюда следует, что или (так как и суть части множества ), т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Наконец из (4) следует, что , т.е. предикат выполним, значит . Отсюда заключаем, что или , т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Условия (7) и (8) должны выполняться одновременно.

Ответ: и

1. Дано ложно. Какими могут быть множества и ?

Решение. По определению импликации двух высказываний из условия задачи следует, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |

Далее, из (1) заключаем, что , т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Из (2) по определению операции отрицания следует, что , откуда, в свою очередь, следует, что . Следовательно, . Пересечем обе части этого равенства с :

Это означает, что . Кроме того (3), .

Ответ:.

1. Дано ложно. Какими могут быть множества и ?

Решение. Из условия задачи следует, что и. Из первого равенства следует, что предикат тождественно ложен, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Из второго равенства следует, что предикат тождественно ложен, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Преобразуем (1) с учетом (2):

Возьмем дополнения от обеих частей полученного равенства. Получим: , ответ:.

## 2.3. Равносильность и следование предикатов

1. Предикаты и над одними и теми же множествами называют *равносильными,* если , т.е. если их множества истинности совпадают.

Обозначение равносильности предикатов:

1. Предикат называют *следствием* предиката , заданного над теми же множествами, что и предикат , если он обращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание обращается предикат , т.е. если .

Обозначение логического следования предикатов:

Диаграммы Венна для соответствующих множеств истинности эквивалентности и следования предикатов приведены на рис. 2.1 и), к). Заметим, что равносильность и логическое следование – это отношения между предикатами, а не операции над ними.

1. Равносильность и следование предикатов

Задайте множество предметов *M*так, чтобы над ним следующие предикаты *P*(*x*), *x*∈*M*были равносильны:

1) « кратно 3», « кратно 7»;

2) «», «»;

3) «Город находится на берегу реки Волги», «Город находится на берегу реки Свияги»;

4) « – простое число», « – четное число»;

5) «Диагонали в четырехугольнике равны», «Четырехугольник - параллелограмм»;

6) «Диагонали в четырехугольнике взаимно-перпендикулярны», «Четырехугольник – ромб»;

7) « – треугольник», «Биссектриса одного из внутренних углов треугольника является его медианой»;

8) « делится на 3», « делится на 9»;

9) « – куб», « – параллелепипед»;

10) « – цилиндр», « – конус»;

Определите, является ли один из следующих предикатов, заданных на множестве действительных чисел, следствием другого:

11) «», «»;

12) «», «»;

13) «», «»;

14) «», «»;

15) «», «»;

16) «», «»;

17) «», «»;

18) «», «»;

19) «», «»;

20) «», «»;

1. Задать предметное множество *M* так, чтобы предикаты *P*(*x*)= «Треугольник – равнобедренный» и *Q*(*x*)=«Три высоты треугольника равны между собой», *x*∈*M*, были равносильны:*P*(*x*)*Q*(*x*).

Решение. Ясно, что требуемое множество нужно искать среди подмножеств множества всех треугольников. Элементы этого множества должны быть одновременно и равнобедренными треугольниками, и такими треугольниками, у которых все три высоты равны между собой. Можно показать, что три высоты в треугольнике равны между собой тогда и только тогда, когда этот треугольник равносторонний. Поскольку, кроме того, всякий равносторонний треугольник является равнобедренным, то искомым множеством может быть, например, множество всех равносторонних треугольников. Другое множество, над которым два данных предиката равносильны, – множество всех неравнобедренных треугольников.

1. Определите, является ли один из следующих предикатов, заданных на множестве действительных чисел*R*, следствием другого:

*P*(*x*)=«», *Q*(*x*)=«».

Решение. Предикат *Q*(*x*)превращается в истинное высказывание лишь при двух подстановках: и . Нетрудно проверить, что эти подстановки превращают и предикат*P*(*x*) в истинное высказывание (являются корнями кубического уравнения). Поэтому первый предикат является следствием второго*Q*(*x*)*P*(*x*).

Проверим обратное следование. Кубическое уравнение в предикате *P*(*x*) имеет три корня: *x*=-2, *x*=1, *x*=3; при этих значениях *xP*(*x*) истинен. А предикат *Q*(*x*), как мы выяснили ранее, истинен только при *x*=1 и *x*=3. Поэтому обратное следствие не верно *P*(*x*)*Q*(*x*).

1. Равносильность и следование предикатов

Задайте множество значений предметной переменной *x*∈*M*так, чтобы на этом множестве второй предикат был бы следствием первого:

1) « кратно 3», « четно»;

2) «», «»;

3) « нечетно», « – квадрат натурального числа»;

4) « – ромб», « – параллелограмм»;

5) « – параллелограмм», « – ромб»;

6) « – русский ученый», « – математик»;

7) «», «»;

8) « делится на 3», « делится на 9»;

9) « – куб», « – прямоугольный параллелепипед»;

10) « – цилиндр», « – конус»;

Выясните, равносильны ли следующие предикаты, если их рассматривать над множеством действительных чисел *R*, множеством рациональныхчисел *Q*, множеством целых чисел *Z* и множеством натуральных чисел *N*.

11) «», «»;

12) «», «sinx≤ 1»;

13) «=0», «||≤0»;

14) «=15», «= 15»;

15) «», «=1»;

16) «», «=4»;

17) «», «=»;

18) «», «»;

19) «», «»;

20) «кратно 3», «»;

***Справка.*** Множество **натуральных чисел*N****=* {1,2,3,....} – это числа, получаемые при естественном счёте предметов; множество **целых чисел Z**={…, -2, -1, 0, 1, 2, …} - состоит из натуральных чисел, натуральных чисел со знаком минус и нуля; множество **рациональных чисел *Q***={*m*/*n*: *m*∈*Z*, *n*∈*N*} - это числа, представимые в виде дроби*m*/*n*, где *m*- целое число, а *n*- натуральное число; множество **действительных чисел *R***={*x*: *x*∈*Q* или *x*∈*J*} включает в себя рациональные числа *Q* и иррациональные числа *J*.

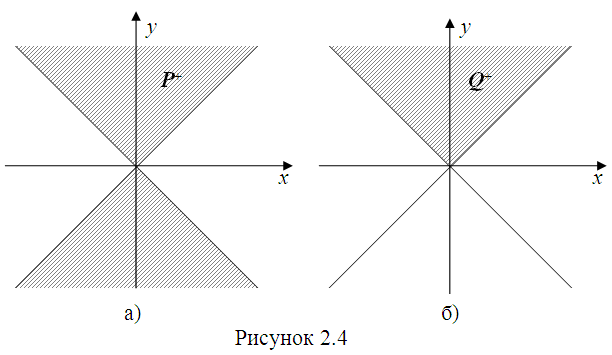
1. Задайте множество значений предметной переменной *x*∈*M* так, чтобы на этом множестве предикат *Q*(*x*) = « – параллелограмм» был бы следствием предиката *P*(*x*)=« – квадрат», т.е. *P*(*x*)*Q*(*x*).

Решение. Поскольку всякий квадрат является параллелограммом, в качестве множества, на котором *Q*(*x*)является следствием первого, может быть взято *M*- множество всех четырехугольников.

1. Равносильны ли предикаты и , если их рассматривать над множеством *R*, множеством *Q*, множеством *Z* и множеством *N*?

Решение. На множестве *N* предикаты имеют одинаковые множества истинности *P*+=*S*+={1}, поэтому они равносильны. На множестве *Z* множества истинности предикатов тоже совпадают *P*+=*S*+={-1,1}, т.е. *P*(*x*)*S*(*x*) на*x*∈*Z*. На множестве *Q* (*x*∈*Q*):*S*+={-1, 1, 1.5}, на множестве *R*: *S*+={-, -1, 1, 1.5}, а *P*+={-1,1}. Следовательно, над множествами *Q* и *R* предикаты *P*(*x*) и *S*(*x*) не равносильны.

1. Равносильны ли предикаты и , если их рассматривать над множеством *R*2, множеством *Q2*, множеством *Z*2 и множеством *N*2?

Решение. Преобразуем предикаты, чтобы выяснить, какие у них области истинности. , который, очевидно, истинен, когда выражения в скобках имеют разные знаки. Т.е. =((. Область истинности *P*+ изображена на рис. 2.4 а).

Во втором предикате убираем модуль:

Рисунок 2.4

& “. Область истинности *Q*+ изображена на рис. 2.4 б).

На множестве*N*2предикаты имеют одинаковые множества истинности *P*+=*S*+={(*x*,*y*): *x*≤*y*,*x,y*∈{1,2,…}} (им соответствует 1–й квадрант). На множествах *Z*2, *Q*2, *R*2 (вся область) множества истинности не совпадают, т.е. предикаты не равносильны.

## 2.4. Формулы логики предикатов

Предметы, вступающие в отношения друг с другом, описываются *термами.*Слово терм имеет много толкований, однако, в формальной логике (теории) терм обозначает выражение, являющееся формальным именем объекта или именем формы.

1. *Терм*– это (см. Алфавит):
2. предметная переменная *x*∈*Var* – простой терм;
3. предметная константа *с*∈*Const*– простой терм;
4. *f*(*t*1,*t*2,…,*t*n), если *f*∈*Func*, а *t*1,*t*2, … ,*t*nесть термы – составной терм;
5. других термов нет.

Обозначим: *Term* – множество термов данного языка; *Var*T – множество переменных, входящих в состав терма; *T*(*x*1,*x*2,…,*x*n) – терм, у которого *n* переменных. Если *Var*T=∅, то терм *T* называется *основным термом*.

Примеры термов:

|  |  |
| --- | --- |
| *x*2 | – т.к. *x*2∈*Var*; |
| *c*1 | – т.к. *с*1∈*Const*; основной терм; |
| *f*(*x*2,*c*) | – т.к. *f*∈*Func*, *x*2,*c*-термы; |
| *f*(*x*+(1+*exp*(2\**y*)) | –если*f,*+,\*, *exp*∈*Func*; 1,2∈*Const*; *x, y*∈*Var;* |
| *f*(*c*1*,g*(*h*(*c*1*,c*2))) | – основной терм |

В логике предикатов термы описывают *предметы* и *операции* (включая функции) над ними в предметной области. Предикаты описывают *отношения* между термами, а формулы – *операции*с предикатами, причем предикат считается атомарной (0-местной) формулой.

Формулы будем обозначать заглавными латинскими буквами: *F*, *G*, *H*2,…

1. *Формула* в логике предикатов – это:

***атомарная формула:***

1. 0-местный предикат (высказывание)*P*;
2. n-местный предикат*P*(*t*1,*t*2, … ,*t*n), где *t*1,*t*2, … ,*t*n – термы;

***составная формула:***

1. если*F*и*G* - формулы, то формулы также (*F*&*G*), (*F*∨*G*), (*F*→*G*), (*F*↔*G*), (¬*F*);
2. если *x*∈*Var –* свободная переменная и *F*– формула, то формулы также (∀*x*)(*F*) и (∃*x*)(*F*)
3. других формул нет.

Примеры формул:

|  |  |
| --- | --- |
| *P(x*1*,f(x*2,*c*)) | – т.к. *P*∈*Pred*; *x*1, *f(x*2,*c*)∈*Term*; |
| *R(x*1) | – т.к. *R*∈*Pred*; *x*1∈*Term*; |
| *f*(*x*2,*c*) | – т.к. *f*∈*Func*;*x*2,*c*-термы; |
| (∀*x*1)(¬*R*(*x*1))→(∃*y*)(*P*(*y*,*f*(*x*)) | –составная формула |

Формула логики предикатов превращается в конкретный предикат при подстановке вместо всех ее предикатных переменных конкретных предикатов.

**2.4.1. Свободные и связанные переменные**

Мы уже знаем, что кванторы связывают переменную, по которой они определены, в том смысле, что результирующий предикат не зависит от связанной переменной. В формулах необходимо четко разграничивать связанные и свободные переменные:

1. квантор ∀ или ∃ связывает ту переменную, которая следует за ним;
2. *в области действия квантора*, связывающего эту переменную, переменная является *связанной*; вне действия квантора она является *свободной*;
3. переменные, не являющиеся связанными кванторами, называются *свободными*;
4. во избежание ошибок желательно в формулах связанные и свободные переменные обозначать разными символами.

Рисунок 2.5. Свободные и связанные переменные

**(∃*x*2)(((∀*y*)(¬*R*(*y*)))→(*P*(*y*,*f*(*c*,*x*2))))**

Область действия квантора ∀

Область действия квантора ∃

y – свободная переменная

y –переменная, связанная квантором ∀

*x*2–переменная, связанная квантором ∃

Например, если в формуле на рис.2.5 связанную переменную *y*обозначитьчерез *z,* тополучим равносильную формулу, в которой*x*2, *z*–связанные, *y* - свободная переменная:

(∃*x*2)(((∀*z*)(¬*R*(*z*)))→(*P*(*y*,*f*(*c*,*x*2)))).

Скобки в формулах можно опускать, учитывая *приоритет операций*. Наивысший (и одинаковый) приоритет имеют операции (¬, ∀, ∃), они выполняются справа налево. Далее в порядке убывания *приоритета* идут операции &, ∨, →, ↔; они выполняются слева направо.Например, предыдущая формула может быть эквивалентным образом представлена в виде:

*F*(*y*)=(∃*x*2)((∀*z*)(¬*R*(*z*))→*P*(*y*,*f*(*c*,*x*2))).

Формулы, в которых нет свободных предметных переменных, называются *замкнутыми*, а формулы, содержащие свободные предметные переменные, – *открытыми*. Так, приведенная выше формула логики предикатов *F*(*y*) является открытой.Примеры замкнутых формул: *Р*, (∀*z*)(*R*(*z*)), (∃*х*)(∀*у*)(*Р*(*х*,*у*)).

## 2.5. Интерпретация формул логики предикатов

*Интерпретация* - в логике означает приписывание некоторого содержательного смысла, значения символам и формулам формальной системы; в результате формальная система превращается в язык, описыва­ющий ту или иную предметную область.Сама эта предметная об­ласть и значения, приписываемые символам и формулам, также называется интерпретацией.

Подстановка в формулу конкретных предикатов вместо предикатных символов и конкретных предметов вместо предметных переменных превращает ее в осмысленное высказывание (ложное или истинное).

Интерпретация *I* задается четверкой:

*I*=(*DI*,*ConstI*, *FuncI*, *PredI*), где

*DI* – непустое множество, которое называется *областью интерпретации*или *универсумом*, фактически это предметная область;

*ConstI*–интепретация констант:*Const*→*DI*, сопоставляющая каждой константе *с* предмет *cI* из области интерпретации;

*FuncI* – интепретация функциональных символов:*Func*(n)→(*DI*(n)→*DI*), сопоставляющая каждому n-местному функциональному символу *f*(n) всюду определенную на области интерпретации n-местную функцию*fI*(n);

*PredI* – интепретация предикатных символов: *Pred*(m)→(*DI*(m)→ {true, false}), сопоставляющая каждому m-местному предикатному символувсюду определенное на области интерпретации m-местное отношение *PI*(m).

1. Дана формула limit(*a*,*x*)=

Определим ее интерпретацию следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| область интерпретации*DI*: | |
| *DI* | – множество действительных чисел R; |
| константы*ConstI*: | |
| 0 | – константа, действительное число 0; |
| функциональные символы*FuncI*: | |
| *h*(*x*,*y*) | = |*x*-*y*| – абсолютная разность *x* и *y*; |
| предикатные символы*PredI*: | |
| *R*(*x*) | – «x – действительное число»; |
| *N*(*x*) | – «x – натуральное число»; |
| *S*(*x*) | – «*x* – последовательность действительных чисел»; |
| *E*(*x*,*y*,*z*) | – «*x* – это *y*-вый член последовательности *z*»; |
| <(*x*,*y*) | – «число *x* меньше числа *y*». |

В данной интерпретации формула определяет высказывание: «Даны:действительное число *a* (*R*(*a*))и последовательность действительных чисел *x* (*S*(*x*)) такие, что для любого(∀ε) положительного числа ε (*R*(ε)&<(0,ε)) существует (∃) натуральное число (номер) (*N*()), что для всех(∀*n*) *n*> (*N*(*n*)&<()) существует(∃*x*n) n-ый член последовательности *x*: *x*n (E(*x*n,*n*,*x*)) и |*x*n-*a*|<ε (<». Здесь подчеркнута интерпретация формулы, а обычным шрифтом в скобках показаны части формулы, отвечающие за данную интерпретацию. Эта формула есть определение предела *a*последовательности действительных чисел*x*.

Сравните полученную интерпретацию с определением предела числовой последовательности в матанализе: «Точка *a* (конечная или бесконечно удаленная) числовой прямой называется *пределом* последовательности {*xn*} действительных чисел, если для любого ε> 0 существует такой номер , что для всех номеров *n*>члены последовательности*xn* содержатся в ε-окрестности точки *a*: | *xn*- *a*|<ε »*.*

Нетрудно заметить, что эти два определения практически совпадают, за исключением квантора (∃*x*n). Предлагается самостоятельно додумать, с какой целью он введен в формулу.

Общий принцип правильного использования кванторов в формулах:

|  |  |
| --- | --- |
| (∀*x*) (*A*(*x*)→*B*(*x*)) | – каждый предмет, наделенный свойством *A*, обладает свойством *B*; |
| (∃*x*) (*A*(*x*)&*B*(*x*)) | – некоторый предмет, наделенный свойством *A*, обладает свойством *B*. |

1. Формулы логики предикатов, их интерпретация

Для каждого из приведенных ниже высказываний, состоящих из одного или более предложений а) сформулируйте подходящую интерпретацию, используя константы для обозначения имен собственных и предикаты для обозначения свойств и отношений, фигурирующих в высказывании; б) сопоставьте высказыванию замкнутую формулу, адекватно выражающую смысл этого высказывания.

1. Не все то золото, что блестит.
2. Если каждый любит сам себя, то кто-то кого-то любит.
3. Вассал моего вассала – не мой вассал.
4. Только нечестные воры обкрадывают друг друга.
5. Несудившие неподсудны.
6. Маленькие богомолы едят друг друга, а большие – нет.
7. Все мои друзья знакомы со мной, хотя некоторые мои знакомые со мной не дружат.
8. Мне нравится логика и все те, кому нравится то, что нравится мне.
9. Если задача имеет решение, то математик может ее решить. Я - математик, но не могу решить эту задачу. Значит задача неразрешима.
10. Если Василиск существует, то его кто-то видел. Всякий, кто видел Василиска, слеп. Слепой ничего не видит. Значит, Василиска не существует.

Даны предикаты: *C*(*x*) = «*x*-квадрат»; *S*(*x*)= «*x*-шар»; *B*(*x*)= «*x*-черный предмет»;*W*(*x*)= «*x*-белый предмет»; *U*(*x*,*y*)=«предмет *x* лежит ниже предмета *y*». Задайте интерпретацию, использующую данные предикаты и напишите формулы для следующих утверждений:

1. «Хотя бы один предмет, лежащий ниже всех четных квадратов, является шаром»;
2. «Нет такого белого квадрата, который лежит под каким-то черным шаром»;
3. «Каков бы ни был черный предмет, либо он является шаром, лежащим выше всех белых квадратов, либо он является квадратом, лежащим ниже какого-нибудь шара»;
4. «Никакой черный квадрат и никакой черный шар не лежат друг над другом»;
5. «Если все шары черные, то белых квадратов нет»;
6. «Всякая фигура, не являющаяся белым квадратом, лежащим хотя бы под одним шаром, имеет черный цвет и лежит над всеми белыми фигурами».

Какие из утверждений, сформулированных выше в п.п. 11)-16), адекватно выражаются следующими формулами:

1. (∀*x*)(*S*(*x*)&*B*(*x*)→¬(∃*y*)(*W*(*y*)&*S*(*y*)));
2. (∃*x*)(∀*y*)(*S*(*x*)&*B*(*x*)→(¬*W*(*y*)∨¬*C*(*y*)));
3. (∀*x*)(∀*y*)(*W*(*x*)&*C*(*x*)→(¬*B*(*y*)∨¬*S*(*y*)∨¬*U*(*x*,*y*)));
4. ¬(∃*x*)(*W*(*x*)&*C*(*x*)→(∃*y*)(*B*(*y*)&*S*(*y*)&*U*(*x*,*y*))).
5. Задать интерпретацию и формулу, адекватно выражающую смысл высказывания «Вы можете обманывать всех иногда, вы можете обманывать кого-то всегда, но вы не можете обманывать всех всегда».

Решение. Область интерпретации *DI* – множество людей. Предикаты: *P*(*x*,*y,z*)=«*x*в отношении *y*выполняет действие*z*»; *Q*(*x*)= «действие *x*является обманом».

Заметим, что предложение на естественном языке не всегда однозначно. 1) В данном высказывании слово «вы» можно трактовать как конкретного человека, которому обращено предложение. В этом случае для его обозначения необходимо использовать квантор ∃. 2) Но слово «вы» можно трактовать как обобщение типа «любой человек». В этом случае используется квантор всеобщности ∀. Формальный язык логики предикатов, позволяет избежать подобных неточностей.Запишем предикаты: *R*1(*x*)=(∀*y*)(∃*z*)(*P*(*x*,*y*,*z*)&*Q*(*z*)) –«*х* обманывает всех иногда»; *R*2(*x*)=(∃*y*)(∀*z*)(*P*(*x*,*y*,*z*)&*Q*(*z*)) –«*х*обманывает кого-то всегда» и *R*3(*x*)=(∀*y*)(∀*z*)(*P*(*x*,*y*,*z*)&*Q*(*z*)) –«*х*обманывает всех всегда». Тогда формула может иметь, соответственно, вид: 1) (∃*x*)((*R*1(*x*)∨*R*2(*x*))&¬*R*3(*x*)); 2) (∀*x*)((*R*1(*x*)∨*R*2(*x*))&¬*R*3(*x*)).

## 2.6. Классификация формул. Семантические таблицы

1. Формулу логики предикатов *F*(*x*1,*x*2,…,*x*n) называют *выполнимой* (*опровержимой*) *в интерпретации I*, если существует такойнабор элементов (*d*1,*d*2,…,*d*n)∈*D*I, на котором она обращается в выполнимый *F*(*d*1,*d*2,…,*d*n)=1 (опровержимый*F*(*d*1,*d*2,…,*d*n)=0) предикат.
2. Формула *F*(*x*1,*x*2,…,*x*n) называется *выполнимой* (*опровержимой*), если есть интерпретация *I*, в которой эта формула выполнима (опровержима).
3. Формулу логики предикатов *F*(*x*1,*x*2,…,*x*n)называют *тождественно истинной* (*тождественно ложной*) *на интерпретации I*,если для любого набора элементов(*d*1,*d*2,…,*d*n)∈*D*Iона превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Обозначение тождественно-истинной формулы *F*на интерпретации *I*:

*IF*

1. Формулу логики предикатов называют *общезначимой*, или *тавтологией* (тождественно *ложной* или *противоречием*), если при *любой интерпретации*она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Обозначение тождественно-истинной формулы *F*:

*F*

Итак, чтобы доказать выполнимость (опровержимость) формулы достаточно подобрать интерпретацию (пример 2.21), на которой она выполнима (опровержима).Доказать, что формула тождественно истинна (тождественно-ложна) гораздо труднее. Обычно для такого доказательства используется метод «от противного» (пример 2.22).

1. Показать, что формулы выполнимы (опровержимы)
2. *P*(*x*1)&¬*P*(*x*2);
3. (∀*x*)(*P*(*x*))→(∃*x*)(*P*(*x*));
4. (∃*x*)(*P*(*x*))→(∀*x*)(*P*(*x*)).

Решение.Зададим интерпретацию на двухэлементном множестве*I*1: *D*I={*d*1,*d*2}, *P*(*d*1)=1, *P*(*d*2)=0 и

интерпретацию на одноэлементном множестве*I*2:*D*I={*d*}, *P*(*d*)=1.

Тогда на *I*1:*P*(*d*1)&¬*P*(*d*2)=1, а*P*(*d*1)&¬*P*(*d*1)=0. Следовательно, формула *P*(*x*1)&¬*P*(*x*2) и выполнима и опровержима;

на*I*2:формулы (∀*x*)(*P*(*x*))→(∃*x*)(*P*(*x*))=1 и (∃*x*)(*P*(*x*))→(∀*x*)(*P*(*x*))=1, так как множество *D*I состоит из одного элемента *d* и *P*(*d*)=1, что дает (∀*x*)(*P*(*x*))=1 и (∃*x*)(*P*(*x*))=1. Следовательно, эти формулы выполнимы;

на *I*1: формула (∃*x*)(*P*(*x*))→(∀*x*)(*P*(*x*))=0, так как (∃*x*)(*P*(*x*))=1, а (∀*x*)(*P*(*x*))=0; формула (∀*x*)(*P*(*x*))→(∃*x*)(*P*(*x*))=1, подобрать итерпретацию, на которой эта формула опровержима, не удалось.

Ответ. Формулы *P*(*x*1)&¬*P*(*x*2) и (∃*x*)(*P*(*x*))→(∀*x*)(*P*(*x*)) выполнимы и опровержимы. Формула (∀*x*)(*P*(*x*))→(∃*x*)(*P*(*x*)) – выполнима.

1. Покажем, что формула (∀*x*)(*P*(*x*))→(∃*x*)(*P*(*x*)) - тавтология.

Решение. Допустим противное: на некотором множестве *M* имеется конкретный предикат *A*(*x*) такой, чтоданная формула превращается в противоречивый предикат от *x*. Для импликации это возможно только, если посылка (∀*x*)(*A*(*x*)) истинна, а заключение (∃*x*)(*A*(*x*)) ложно. Из истинности первого следует, что предикат *A*(*x*) – тождественно-истинный, а из истинности второго – что предикат *A*(*x*) – тождественно-ложный. Получаем противоречие. Следовательно, формула – тавтология.

Доказательство тождественной истинности (противоречивости) формулы логики предикатов выполняется методом «от противного» и требует индивидуального подхода к разрешению каждой формулы.

**2.6.1. Метод семантических таблиц**

Существует формальная *разрешающая процедура* для формул логики высказываний и логики предикатов, позволяющая проверить общезначимость и противоречивость формул.

***Лемма 2.1.*** Для любой формулы *F*(*x*1,*x*2,…,*x*n) справедливо:

1. *F*(*x*1,*x*2,…,*x*n) (∀*x*1)…(∀*x*n)(*F*(*x*1,*x*2,…,*x*n));
2. *F*(*x*1,*x*2,…,*x*n) – выполнимая (∃*x*1)…( ∃*x*n)(*F*(*x*1,*x*2,…,*x*n)) - выполнимая;
3. *F*(*x*1,*x*2,…,*x*n) – выполнимая в любой интерпретации (∃*x*1)…( ∃*x*n)(*F*(*x*1,*x*2,…,*x*n)).
4. Проверить общезначимость формулы

*F*(*x*)=(∀*x*)(*P*(*x*)→*R*(*x*))→((∀*x*)(*P*(*x*))→(∀*x*)(*R*(*x*))

Решение. Предположим, что *F*необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация (контрмодель) *I*, опровергающая *F*.Попытаемся построить эту интерпретацию:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *I* | (1) |
| *I* | *I* | (2) |
| *I* | *I* | (3) |
|  | *I* | (4) |
| *I* | противоречие | (5) |
| *I* |  | (6) |
| *I* |  | (7) |

Наша таблица состоит из двух столбцов. В левом столбце мы пишем формулы, значения которых полагаем истинными, в правом – ложными. В строке (1) записано наше предположение, что формула *F* – не тавтология. Для импликации это возможно, если посылка истинна (левый столбец), а заключение ложно (правый столбец) строки (2). Предикат в строке (2) опровержим, когда истинно (в левом столбце строки (3)), а ложно (пишем в правом столбце строки (3)). Так как предикат в строке (3) содержит квантор общности (с отрицанием), это значит, что существует некоторый предмет, обозначим его *d*, для которого предикат *R*(*d*) ложен (строка 4). Предикат в строке 2 истинен, следовательно истинно - строка 5. Аналогично, в строке 3 истинно , следовательно, истинно и (строка 6). По правилу modus ponens получаем , (строка 7).

Итак, *R*(*d*) присутствует одновременно и в левом и в правом столбце таблицы, то есть *R*(*d*) одновременно истинно и ложно. Полученное противоречие доказывает, что контрмодели не существует, поэтому формула *F*(*x*) общезначима.

1. Проверить общезначимость формулы

→(∀*x*)(P(x)).

Решение. Предположим, что *F*необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация (контрмодель) *I*, опровергающая *F*. Построим эту интерпретацию:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *I*→(∀*x*)(*P*(*x*)) | (1) |
| *I* | *I* | (2) |
| *I* |  | (3) |
|  | *I*  противоречия нет | (4) |
|  |  |  |

В строке (1) записано предположение обопровержимости формулы *F*(*x*).Для импликации это возможно, если посылка истинна (пишем в левый столбец), а заключение ложно (правый столбец) строки (2). Предикат истинен, поэтому существует предмет *d*1, на котором предикат *P*(*d*1)=1 (строка 3). С другой стороны, из строки (2) имеем, что ложно , это означает, что существует такой предмет *d*2, для которого предикат *P*(*d*2) ложен (строка (4)).

Так как противоречия нет, мы построили контрмодель*I*, в которой данная формула опровержима. Это *I*: *D*I={*d*1,*d*2}-двухэлементное множество и предикат *P* задан на множестве так, что *P*(*d*1)=1 (true), *P*(*d*2)=0 (false). Следовательно, формула *F*(*x*) не является тавтологией

Обратите внимание, что мы взяли разные предметы *d*1 и *d*2, так как квантор ∃ гарантирует существование какого-нибудь предмета, но эти предметы не обязаны совпадать.

Систематизируем рассмотренный в примерах 2.24 и 2.25 способ проверки общезначимости формул:

1. общезначимость формулы доказываем «от противного», пытаясь построить контрмодель, опровергающую данную формулу;
2. контрмодель строим, указывая, какие формулы должны выполняться, а какие – нет;
3. для уточнения требований используем таблицу в левый столбец которой заносим формулы, которые должны выполняться, а в правый - которые не должны выполняться; требования последовательно уточняются;
4. если требования, предъявляемые к контрмодели оказались несовместными, значит проверяемая формула общезначима.

*Семантическая таблица* – это упорядоченная пара множеств формул , где – множество формул, которые мы хотим считать истинными; - множество формул которые мы хотим считать ложными.

Пусть {*x*1, *x*2, …, *x*n} – множество свободных переменных в формулах из множеств .

Семантическая таблица называется *выполнимой*, если существует такая интерпретация *I* и такой набор значений *d*1, *d*2, …, *d*n∈*D*I свободных переменных, для которых

* *F*L(*d*1, *d*2, ..., *d*n)=1 для любой формулы *F*L∈;
* *F*R(*d*1, *d*2, ..., *d*n)=0 для любой формулы *F*R∈.

2. Семантическая таблица

*T*= –*выполнима*. Ее выполнимость подтверждает интерпретация *I*: *D*I={*d*1,*d*2}, *P*(*d*1)=1, *P*(*d*2)=0 и набор (*d*1,*d*2) значений свободных переменных (*x*,*y*). Левый столбец таблицы: –значения обеих формул истинны. В правом столбце: –значения обеих формул ложны.

1. Семантическая таблица

T= - *невыполнима*, так как формула в правой части таблицы тождественно истинна, то есть ни при какой интерпретации не может принимать значение 0 (false).

Обратите внимание, если в какой-нибудь части таблицы множество формул пусто (, то эта часть таблицы выполнима.

Семантическая таблица , у которой ∩≠∅, называется *закрытой*. ***Закрытая таблица невыполнима***.

Семантическая таблица , у которой множества состоят только из атомарных формул (см. п.2.4), называется *атомарной*.***Незакрытая атомарная таблица выполнима.***

Правила табличного вывода имеют вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *T*0 | или | *T*0 | , |
| *T*1 | *T*1, *T*2 |

где *T*0, *T*1, *T*2 – семантические таблицы. Смысл такой записи звучит так: «От таблицы *T*0 переходим к таблице *T*1 (или *T*2). Таблица *T*0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица *T*1 (или *T*2)».

Обратите внимание, что по правилу 2 таблица *T*0 может редуцироваться на две альтернативные таблицы *T*1 и *T*2 . В этом случае для выполнимости таблицы *T*0 должны быть выполнимы таблицы *T*1 ИЛИ *T*2 , а для невыполнимости *T*0 – необходимо, чтобы были невыполнимы *T*1 И *T*2.

Приведем *правила табличного вывода*, которые сохраняют выполнимость семантических таблиц:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *L*& |  | | |  | | |  | | | *R*& |  |  | | | | | | |  |
|  | | |  | | |  | | |  |  | | | | | | |  |
| *L*∨ |  | |  | | | | |  | | *R*∨ |  | |  | | |  | | | |
|  | |  | | | | |  | |  | |  | | |  | | | |
| *L*→ |  | |  | | | | |  | | *R*→ |  | |  | | | |  | | |
|  | |  | | | | |  | |  | |  | | | |  | | |
| *L*¬ |  | | | |  |  | | | | *R*¬ |  | | |  |  | | | | | |
|  | | | |  |  | | | |  | | |  |  | | | | | |
| *L*∀ |  |  | | | | | | |  | *R*∀ |  |  | | | | | |  | | |
|  |  | | | | | | |  |  |  | | | | | |  | | |
| где *t* — произвольная индивидная переменная или константа. Эвристический совет: в качестве *t* нужно взять индивидную константу, которая уже встречается в подтаблице, или переменную, которая имеет свободные вхождения в какую-то из формул подтаблицы; если таковых нет, то вводится произвольная индивидная константа. | | | | | | | | | | где *с*1 — новая индивидная константа, то есть константа, не встречающаяся ещё ни в левом, ни в правом столбцах | | | | | | | | | | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *L*∃ |  |  |  | *R*∃ |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| где *с*2 — новая индивидная константа, то есть константа, не встречающаяся ещё ни в левом, ни в правом столбцах | | | | где *t* — произвольная индивидная переменная или константа. Совет по ее выбору, как у правила *L*∀ | | | |

1. *Табличный вывод* – это дерево:
2. корнем дерева является таблица *T*0;
3. из вершины *T*i исходят дуги в вершины *T*j(, *T*k), соответствующие правилу табличного вывода
4. листьями дерева могут быть только закрытые или атомарные таблицы.
5. Табличный вывод называется *успешным*, если дерево вывода – конечное и все листья дерева – закрытые таблицы.

Существование успешного вывода означает, что семантическая таблица невыполнима.

В случае конечного неуспешного вывода, а для этого достаточно, чтобы листья хотя бы одного поддерева были атомарными, это поддерево дает интерпретацию на конечном множестве *D*I, подтверждающую выполнимость семантической таблицы.

В случае бесконечного неуспешного вывода – задача не решена.

Корневая таблица *T*0строится в зависимости от того, что требуется доказать:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Что доказываем | *T*0 | Вывод, подтверждающий гипотезу |
| – общезначимость формулы *F*; |  | конечный успешный вывод; |
| выполнимость формулы *F* |  | конечный неуспешный вывод; |
| опровержимость *F* |  | конечный неуспешный вывод; |
| противоречимость *F* |  | конечный успешный вывод. |

1. Доказать общезначимость формул:

1)

2);

3)

Решение. Построим табличный вывод для этих формул.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. *T*0= | |
| (*R*→) | |
| *T*1= | |
| (*R*→) | |
| *T*2= | |
| (*R*∀) | |
| *T*3= | |
| (*L*∀) | |
| *T*4= | |
| (*L*∀) | |
| *T*5= | |
| (*L*→) | |
| *T*6= | *T*7= |
| закрытая таблица | закрытая таблица |

Построили конечный успешный вывод. Следовательно, формула общезначима.

|  |
| --- |
| 1. *T*0= |
| (*R*→) |
| *T*1= |
| (*L*∃) |
| *T*2= |
| (*R*∀) |
| *T*3= |
| атомарная таблица |

Конечный неуспешный вывод. Формула опровержима. Интерпретация, на которой она опровержима имеет вид*I*: *D*I={*c*1, *c*2}, *P*(*c*1)=1, *P*(*c*2)=0.

|  |
| --- |
| 1. *T*0= |
| (*R*→) |
| *T*1= |
| (*L*∀) |
| *T*2= |
| (*R*∃) |
| *T*3= |
| (*L*∃) |
| *T*4= |
| (*R*∀) |
| *T*5= |
|  |
|  |

Бесконечный неуспешный вывод – решения нет.

Табличный вывод

Докажите общезначимость следующих формул, построив успешный табличный вывод.

1) ;

2) ()()&()();

3) (∨(;

4) ;

5) ;

6) ;

7) ;

8) (∀*x*)((*P*(*x*))→(∃*y*)(*Q*(*x*,*f*(*y*))))→(∃*x*)(¬*P*(*x*))∨(∀*x*)(∃*z*)(*Q*(*x*,*z*));

9) (∀*x*)

10) (*x*);

Определите, какие из следующих формул выполнимы, а какие нет (т.е. тождественно ложны), используя табличный вывод:

11) ;

12) ;

13) ;

14) ;

15) ;

16) ;

17) ;

18) ;

19) ;

20) ;