# Модуль 1. Арифметические основы ЭВМ

## Тема 1. Системы счисления

## Тема 2. Машинная арифметика

Представление чисел в компьютере имеет две особенности:

* числа записываются в двоичной системе счисления (в отличие от привычной десятичной);
* для записи и обработки чисел отводится конечное количество разрядов (в привычной арифметике такое ограничение отсутствует).

Если для записи числа в компьютере отводится *N* двоичных разрядов, то, согласно формуле Хартли, число различимых состояний *K* (различных чисел), которые могут быть закодированы *N* разрядами, равно:

|  |  |
| --- | --- |
| *К*=2*N* |  |

Следствие из этой формулы заключается в том, что мы не можем представить в компьютере сколь угодно большие числа со сколь угодно большой точностью. А способ представления (кодирования) числа определяет диапазон и точность представления чисел в компьютере. Также, способ кодирования влияет на алгоритмы обработки чисел.

Принято различать кодирование чисел:

* с фиксированной запятой (со знаком и без знака);
* с плавающей запятой.

Числа, соответствующие кодам в форме с фиксированной запятой, располагаются на числовой оси с постоянным шагом (см. рис. 1а), а числа в форме с плавающей запятой – с переменным (см. рис. 1б):

X

X

a)

б)

Рис.1. Расположение чисел

а)-с фиксированной запятой; б)-с плавающей запятой

Способ кодирования числа задает соответствие между формой представления числа в памяти компьютера и его значением.

Далее условимся считать, что *X*(2) – двоичное представление числа *Х* в памяти компьютера, и для кодирования числа *Х* используются *N* двоичных разрядов.

### Беззнаковые числа с фиксированной запятой

Форма представления чисел с фиксированной запятой без знака соответствует записи числа в двоичной системе счисления. Термин «фиксированная запятая» означает, что мы договорились о месте положения запятой и оно фиксировано. Для определенности, далее мы полагаем, что запятая фиксируется между *m* и *m*-1 разрядами (0≤*m*≤*N*).

Если *m*=0, то есть запятая фиксируется после 0-го разряда, то мы имеем дело с **целыми числами**. Если *m*=*N*, значит, запятая фиксируется перед старшим разрядом, и мы получаем **дробные числа**. В противном случае числа имеют как целую, так и дробную часть. Значение числа в форме с фиксированной запятой в общем случае определяется формулой:

|  |  |
| --- | --- |
| *X=aN-12N-m-1+aN-2N-m-2+…+am20+am-12-1+…+a02-m* = *X*(2) *2-m.* |  |

Диапазон представления ***беззнаковых чисел с фиксированной запятой*** равен:

|  |  |
| --- | --- |
| 0 *≤ X ≤ 2-m*(*2N*-1) |  |

Максимальная абсолютная погрешность постоянна во всем диапазоне и равна половине последнего разряда, то есть:

|  |  |
| --- | --- |
| |Δ*X*| *≤ 2-m-1* |  |

### Числа с фиксированной запятой со знаком

Существуют несколько способов кодирования знаковых чисел:

* прямой код;
* обратный;
* дополнительный;
* код со смещением.

Знак числа в прямом, обратном и дополнительном кодах располагается в старшем разряде двоичного представления числа, и кодируется: 0 – число положительное; 1- отрицательное.

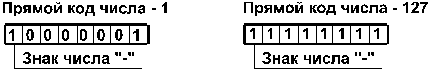
В коде со смещением полагается, что истинное значение числа смещено относительного его двоичного кода на заданную константу *L* (0 *< L < 2-m*(*2N*-1)) таким образом, чтобы смещенные значения были положительны: 0 *< Xсм < 2-m*(*2N*-1)).

**2.2.1. Положительные числа** в **прямом**, **обратном** и **дополнительном** кодах изображаются ***одинаково***  -  двоичными кодами с цифрой 0 в знаковом разряде. Например:



**Отрицательные числа** в **прямом**, **обратном** и **дополнительном** кодах имеют разное изображение.

2.2.2. **Прямой код (отрицательного числа)**. В знаковый разряд помещается цифра 1, а в разряды цифровой части числа — двоичный код его абсолютной величины. Например:



Для прямого кода справедливы соотношения:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

И обратно:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

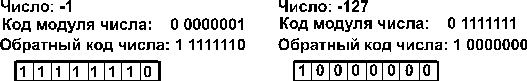
Диапазон представления чисел в прямом коде равен:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Недостатки прямого кода:

* возможны положительный и отрицательный нули: 00000000 и 10000000;
* алгоритм выполнения операций сложения и умножения зависят от знаков и значений операндов.

2.2.3. **Обратный код (отрицательного числа)**. Получается инвертированием всех цифр двоичного кода абсолютной величины числа, включая разряд знака: нули заменяются единицами, а единицы — нулями. Например:



Для обратного кода справедливы соотношения:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Обратное преобразование:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

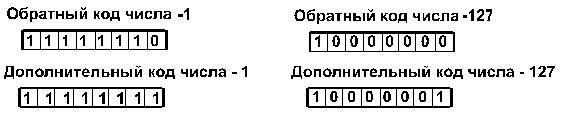
Диапазон представления чисел в обратном коде равен:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Недостаток обратного кода:

* возможны положительный и отрицательный нули: 00000000 и 11111111;

**2.2.4. Дополнительный код (отрицательного числа)**. Получается из обратного кода прибавлением единицы к его младшему разряду. Например:



Для дополнительного кода справедливы соотношения преобразования:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Диапазон представления чисел в дополнительном коде равен:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Достоинство дополнительного кода:

* операции сложения и вычитания выполняются так же как с беззнаковыми числами, при этом автоматически получается правильный знак результата.

**2.2.5. Код со смещением.** Получается добавлением к числу некоторой константы *L*, которая превращает это число ***в положительное***, с последующим двоичным кодированием. Соотношения преобразования выглядят следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Диапазон представления чисел в коде со смещением равен:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Точность представления числа во всех кодировках такая же как у беззнаковых чисел, см. формулу (2.4).

Все операции со смещенными числами выполняются так же как с беззнаковыми, но необходима коррекция результата (см. п.

Обычно **отрицательные десятичные числа при вводе в машину автоматически преобразуются в обратный или дополнительный двоичный код** и в таком виде хранятся, перемещаются и участвуют в операциях. При выводе таких чисел из машины происходит **обратное преобразование в отрицательные десятичные числа.**

Пример: Представить число +7, -12, -15, -16 в прямом, обратном, дополнительном кодах и со смещением L=32

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Число** *A* | **Прямой код** *Aпр* | **Обратный код** *Aобр* | **Дополнительный код** *Aдоп* | **Код со смещением 32** *Aсм(32.* |
| +7 | 0 0000111 | 0 0000111 | 0 0000111 | 00100111 |
| -12 | 1 0001100 | 1 1110011 | 1 1110100 | 00010100 |
| -15 | 1 0001111 | 1 1110000 | 1 1110001 | 00010001 |
| -16 | 1 0010000 | 1 1101111 | 1 1110000 | 00010000 |

Обратите внимание, что прямой, обратный и дополнительный коды положительного числа совпадают, отличаются только коды отрицательного числа. Обратный код получается инвертированием разрядов модуля числа, а дополнительный – получается из обратного добавлением 1.

2.2.6. **Обратное преобразование**, позволяющее получить модуль числа, выполняется по тем же правилам, что и прямое.

При переводе ***из обратного в прямой код*** нужно выполнить *инверсию цифр числа*.

При переводе ***из дополнительного кода в прямой*** выполняем:

1) инверсию цифр числа,

2)добавляем +1 в младший разряд инвертированного числа.

Пример: Представить число -12 в обратном и дополнительном кодах, выполнить обратное преобразование:

|  |  |
| --- | --- |
| Код модуля числа -12 : 0 0001100 (12) | |
| Преобразование в обратный код:  0 0001100 (12)  1 1110011 (-12*обр*) | Преобразование из обратного в прямой код  1 1110011 (-12*обр*)  0 0001100 (12) |
| Преобразование в дополнительный код  0 0001100 (12)  1 1110011 (инверсия разрядов) + 1  1 1110100 (-12доп) | Преобразование из дополнит. в прямой код  1 1110100 (-12*доп*)  0 0001011 (инверсия разрядов)  + 1  0 0001100 (12) |

Теперь, когда мы определили основные формулы соответствия код-значение, рассмотрим алгоритмы выполнения арифметических действия сложения и вычитания с этими кодами

### Арифметические действия над числами со знаком

В большинстве компьютеров операция вычитания не используется. Вместо нее производится сложение обратных или дополнительных кодов уменьшаемого и вычитаемого. Это позволяет существенно упростить конструкцию АЛУ.

Удобно пользоваться ***модифицированными кодами.*** У них знак разряда занимает 2 бита: 00 – число положительное, 11 – число отрицательное, 01 и 10 – запрещенные комбинации знака, они возникают при переполнении разрядной сетки в результате выполнения операции сложения (вычитания)

Преимущества работы с модифицированными дополнительными или обратными кодами:

* + 1. операции сложения (вычитания) выполняются точно так же как с прямыми кодами, при этом знак и значение результата получается автоматически в том же коде;
    2. легко определить факт переполнения по запрещенным комбинациям знака.

**2.3.1. Сложение (вычитание) обратных кодов**

Правила выполнения операции сложения (вычитания) ***в обратном коде***:

1) выполняется сложение (вычитание) двоичных разрядов чисел, в том числе и знаковых, переносы (заем в) из старшего знакового разряда игнорируются;

2) если возникает перенос в знаковый разряд, то к результату операции нужно добавить 1;

3) если возникает заем из знакового разряда, то из результата операции вычитается 1.

Результат операции получается в обратном коде. Если знаковые разряды результата: 00 – ответ положительный, 11 – отрицательный, 01 или 10 – переполнение.

Пример: Даны два числа A и B. Найти сумму A+B и разность A-B в обратном коде

Перенос (заем) в знаковый разряд обозначим символом < (>).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Данные | Модифицированный обратный код | Сумма | Разность |
| 1 | A=18,  B=-45 | 00 0010010 (18)  11 1010010 (-45обр) | 00 0010010 (18)  +11 1010010 (-45об)  11 1100100 (-27об)  Переобраз.в прямой код:  **11 0011011(-27прям)**  Ответ: -27 | 00 0010010 (18)  -11 1010010 (-45об)  00**>**1000000  - 1  **00 0111111 (63)**  Ответ: 63 |
| 2 | A=-18  B=-45 | 11 1101101 (-18обр)  11 1010010 (-45обр) | 11 1101101 (-18обр)  +11 1010010 (-45обр)  11**<**0111111  + 1  **11 1000000 (-63обр)**  Переобраз.в прямой код:  11 0111111(-63прям)  Ответ: -63 | 11 1101101 (-18обр)  -11 1010010 (-45обр)  **00 0011011 (27)**  Ответ: 27 |
| 3 | A=-118  B=-45 | 11 0001001 (-118обр)  11 1010010 (-45обр) | 11 0001001(-118обр)  +11 1010010(-45обр)  **10** 1011011**(переп-е)**  Ответ: переполнение | 11 0001001(-118обр)  -11**>**1010010(-45обр)  11 0110111  - 1  **11 0110110 (-73обр)**  Переобраз.в прямой код:  11 1001001(-73прям)  Ответ: -73 |
| 4 | A=45  B=118 | 00 0101101 (45)  00 1110110 (118) | 00 0101101 (45)  +00 1110110 (118)  **01** 0100011**(переп-е)**  Ответ: переполнение | 00 0101101 (45)  -00 1110110 (118)  11**>**0110111  - 1  **11 0110110 (-73обр)**  Переобраз.в прямой код:  11 1001001(-73прям)  Ответ: -73 |

Если результат получен со знаком минус (с "11"), то для проверки вычислений результат преобразуем в прямой код!!!

**2.3.2. Сложение (вычитание) дополнительных кодов**

Правило выполнения операции сложения (вычитания) в дополнительном коде:

1) выполняется сложение (вычитание) двоичных разрядов чисел, в том числе и знаковых, переносы (заем в) из старшего знакового разряда игнорируются.

Результат операции получается в дополнительном коде. Если знаковые разряды результата: 00 – ответ положительный, 11 – отрицательный, 01 или 10 – переполнение.

Пример: Даны два числа A и B. Найти сумму A+B и разность A-B в дополнительном коде

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Данные | Модифицированный обратный код | Сумма  A+B | Разность  A-B |
| 1 | A=18,  B=-45 | 00 0010010 (18)  11 1010011 (-45доп) | 00 0010010 (18)  +11 1010011 (-45доп)  **11 1100101 (-27доп)**  Переобраз.в прямой код:  11 1100101 (-27доп)  11 0011010 (инверс)  + 1  11 0011011 (27прям)  Ответ: -27 | 00 0010010 (18)  -11 1010011 (-45доп)  **00 0111111 (63)**  Ответ: 63 |
| 2 | A=-18  B=-45 | 11 1101110 (-18доп)  11 1010011 (-45доп) | 11 1101110 (-18доп)  +11 1010011 (-45доп)  **11 1000001 (-63доп)**  Переобраз.в прямой код:  11 1000001 (-63доп)  11 0111110(инверсия)  + 1  11 0111111 (-63прям)  Ответ: -63 | 11 1101110 (-18доп)  -11 1010011 (-45доп)  **00 0011011 (27)**  Ответ: 27 |
| 3 | A=-118  B=-45 | 11 0001010 (-118доп)  11 1010011 (-45доп) | 11 0001010(-118доп)  +11 1010011(-45доп)  **10** 1011101(**переп-е**)  Ответ: переполнение | 11 0001010(-118доп)  -11 1010011(-45доп)  **11 0110111(-73доп)**  Переобраз.в прямой код:  11 0110111(-73доп)  11 1001000(инверсия)  + 1  11 1001001 (-73прям)  Ответ: -73 |
| 4 | A=45  B=118 | 00 0101101 (45)  00 1110110 (118) | 00 0101101 (45)  +00 1110110 (118)  **01** 0100011(**переп-е**)  Ответ: переполнение | 00 0101101 (45)  -00 1110110 (118)  **11 0110111 (-73доп)**  Переобраз.в прямой код:  11 0110111(-73доп)  11 1001000(инверсия)  + 1  11 1001001 (-73прям)  Ответ: -73 |

Если результат получен со знаком минус (с "11"), то для проверки вычислений результат преобразуем в прямой код!!!

Домашнее задание.

Преобразовать десятичные числа в прямой, обратный и дополнительный коды и в код со смешением 127. Выполнить алгебраическое сложение и вычитание в двоичной системе счисления для прямого, обратного и дополнительного кодов и кода со смещением 127. Результат представить в 10 с/с. Разрядная сетка 8 бит. Указать на переполнение разрядной сетки, если есть.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Числа | Вариант | Числа | Вариант | Числа | Вариант | Числа |
| **1** | 9, -2 | **7** | -101, 43 | **13** | -23, -64 | **19** | -100, 126 |
| **2** | -9, 2 | **8** | -127, -1 | **14** | -7, 127 | **20** | -4, 65 |
| **3** | -5, -125 | **9** | -73, 45 | **15** | -12, 105 | **21** | -80, 44 |
| **4** | 5, -125 | **10** | 120, -120 | **16** | -73, 45 | **22** | -22, 100 |
| **5** | 20, -21 | **11** | 120, -122 | **17** | 50, -25 | **23** | -3,95 |
| **6** | -75, -12 | **12** | 16, -32 | **18** | 25, -50 | **24** | 65, 66 |

**Пример выполнения**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| В-24 | Прямой код | Обратный код | Дополнительный | Смещение +127 |
| 65 | 0 1000001 | 00 1000001 | 00 1000001 | 11000000 |
| 66 | 0 1000010 | 00 1000010 | 00 1000010 | 11000001 |
| (65)+(66) | 1000001  +1000010  10000011 (**переп**) | 00 1000001  +00 1000010  01 0000011  + 1 (корр)  **01** 0000100 (**переп**) | 00 1000001  +00 1000010  **01** 0000011 (**переп**) | 11000000  +11000001  110000001  - 01111111 (корр)  **10**0000010 (**переп**) |
| (65)-(66) =  - (66-65) | 1000010  - 1000001  0000001 (1)  **10000001** (-1) | 00 1000001  - 00 1000010  11 1111111  - 1 (корр)  **11 1111110** (-1)  Проверка:  **1111110** (-1)  0000001 (1) | 00 1000001  - 00 1000010  **11 1111111** (-1)  Проверка  1111111 (-1доп)  0000000 (инвер)  + 1  0000001 (1) | 11000000  - 11000001  111111111  +01111111 (корр)  **001111110** (-1+127) |