Министерство высшего и среднего специального
образования СССР

Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола

Кафедра высшей математики № 2



# ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

## Часть III

Методические указания и контрольные задания

Одобрено объединенным научно-методическим
советом по математике



Челябинск
1967

УДК 517.5(07)

Типовые расчеты по курсу высшей математики: Методические указания и контрольные задания /Составители: Н.К.Гольдшейд, М.Л.Катков, Ю.Г.Малиновский, А.И.Петрашева, Н.А.Тихомирова, Л.А. Смекалина; Под ред. Л.М.Белякова. - Челябинск: ЧПИ, 1987.-Ч.II.-83 с.

Подобраны задачи и упражнения для самостоятельной работы студентов по темам : "Ряды", "Дифференциальные уравнения", "Теория функций комплексного переменного", приведен разбор наиболее типичных примеров и даны рекомендации по выполнению заданий.

Список лит. - 6 назв.

Рецензент М.М.Гольденберг.

Настоящая работа содержит методические указания и контрольные задания к типовым расчетам (ТР) по темам: "Ряды", "Дифференциальные уравнения", "Теория функций комплексного переменного". ТР состоит из трех частей: I) теоретические вопросы; 2) теоретические упражнения; 3) задачи и примеры. Теоретические вопросы и упражнения являются общими для всех студентов, задачи и примеры для каждого студента учебной группы индивидуальны. Дата защиты ТР устанавливается ведущим занятия по высшей математике преподавателем в соответствии с учебным графиком для данной специальности.

При выполнении ТР необходимо придерживаться следующих правил: I) решение задач и теоретических упражнений выполнить в отдельной тетради; 2) перед решением каждой задачи записать полный текст условия; 3) решение задач сопровождать краткими и четко изложенными пояснениями; 4) тетрадь с выполненным заданием сдать ведущему практические занятия преподавателю за неделю до защиты ТР.

Во время защиты ТР студент должен уметь:

I) отвечать на теоретические вопросы ТР;

2) пояснять решения теоретических упражнений и примеров из выполненного задания;

3) решать аналогичные примеры и задачи.

При выполнении ТР рекомендуется использовать следующую литературу:

I. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1978.-Т. П.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - М.: Наука, 1981.

3. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа /Под ред. А.Б.Ефимова, Б.П.Демидовича. - М.: Наука, 1981.

4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.: Наука, 1977.

5. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах /П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. - М.: Высшая школа, 1980.- Ч. 2.

6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1965.

## ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕМЕ "РЯДЫ"

Приведем образцы решений некоторых типовых задач, относящихся к данной теме:

П р и м е р 1. Исследовать на сходимость ряд с общим членом

$$a_n = \frac{4n-1}{n^2[2+(-1)^n]}.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4n-1}{3n^2}, & \text{при четных } n, \\ \dfrac{4n-1}{n^2} & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Рассмотрим ряд $b_n = \frac{4n-1}{3n^2}$. Этот ряд расходится по II признаку сравнения, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{3n^2} : \frac{1}{n}\right) = \frac{4}{3} \neq 0,$$

а ряд с общим членом $\frac{1}{n}$ расходится.

Но тогда в силу неравенства $a_n \geqslant b_n$ по I признаку сравнения расходится и исходный ряд.

П р и м е р 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\sqrt{2}x - e^{-x^2}}{x(\sin x - x)}$.

Р е ш е н и е. Разлагая функции $\cos\sqrt{2}x$, $e^{-x^2}$, $\sin x$ в степенные ряды, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{2}x - e^{-x^2}}{x(\sin x - x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{8x^6}{6!}+\ldots\right)-\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots\right)}{x\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)-x\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+\frac{7x^6}{45}+\ldots}{-\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{120}+\ldots} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+\frac{7}{45}x^2+\ldots}{-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+\ldots} = 2.$$

П р и м е р 3. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, найти значение восьмой производной от функции $y = x^3 e^{-\frac{x}{2}}$ при $x = 0$.

Р е ш е н и е. Пользуясь разложением функции $e^x$ в ряд Маклорена, получаем разложение данной функции в степенной ряд:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+3}}{2^n\cdot n!}.$$

Так как полученный степенной ряд является рядом Тейлора для данной функции, любой коэффициент этого ряда имеет вид

$$a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}.$$

Рассматривая коэффициент $a_8$ перед $x^8$, приходим к равенству

$$\frac{y^{(8)}(0)}{8!}=(-1)^5\frac{1}{2^5\cdot 5!}.$$

Откуда $y^{(8)}(0)=-10,5.$

## Теоретические вопросы

1. Сходимость и сумма ряда.
2. Необходимое условие сходимости ряда.
3. Теоремы сравнения.
4. Признак Даламбера.
5. Признак Коши.
6. Интегральный признак сходимости ряда.
7. Теорема Лейбница.
8. Оценка остатка знакочередующего ряда.
9. Область сходимости функционального ряда.
10. Условия непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости суммы функционального ряда.
11. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
12. Условия разложимости функции в ряд Тейлора.
13. Разложение в ряд функций $\sin x, \cos x, \ln(1+x), e^x, (1+x)^\alpha$.
14. Ряды Фурье, формулы их коэффициентов.
15. Условия разложимости функции в ряд Фурье.

## Теоретические упражнения

1. Что можно сказать о сумме двух рядов, из которых: а) один ряд сходится, а другой расходится; б) оба ряда расходятся?

2. Даны ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) с неотрицательными членами. Что можно сказать о сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ и

$\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$, если ряды A и B: а) сходятся; б) расходятся?

3. Доказать, что ряд чисел, обратный членам арифметической прогрессии, расходится.

4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0)$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходится. Показать, что обратное утверждение неверно. Можно ли что-либо сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, если отказаться от условия неотрицательности чисел $a_n$ ?

5. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ сходится в точке $x_0$, то он сходится абсолютно при любом $x > x_0$.

6. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R_1$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ – радиус сходимости $R_2$. Какой радиус сходимости имеет ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x_n$ ? Что можно сказать о радиусе сходимости последнего ряда, если $R_1 = R_2$?

7. Показать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ всюду непрерывна.

8. Можно ли в каждой точке числовой прямой почленно дифференцировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ ?

## Вариант I

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{(n-1)!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}01$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)(x+3)^{2n}}{(n+2)^2}.$$

7. Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x)=\ln(x+2)$ и определить область сходимости.

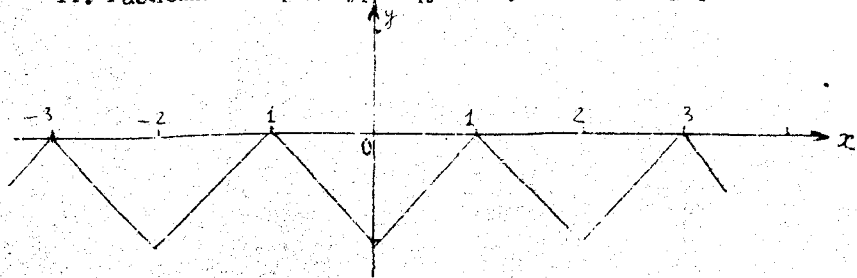
8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx .$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях $y''+xy'+2y=0;\ \ y(0)=1;\ \ y'(0)=0.$

10. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\frac{x^2}{4}$ в интервале $]-\pi;\pi[$.

11. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графиком.




Вариант 2

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha$ = 0,01

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)!}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(x-3)^n}{(n+1)^2\cdot 5^{n+1}}.$$

7. Функцию $f(x)=3^{x}$ разложить по степеням $(x-1)$ и найти область сходимости.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

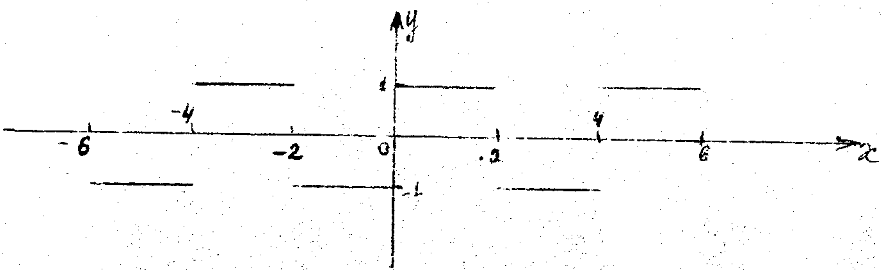
$$\int_0^{0,25} \frac{\sqrt{x}}{e^{x}}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y' = xy + y^2;\quad y(0)=1.$$

10. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|\sin x|$.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.




## Вариант 3

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4+\cos^2\frac{\pi n}{2}}{n(n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{(2n+1)^2 \cdot 9^{n+1}}.$$

7. Вычислить $\sqrt[10]{e}$ с точностью до 0,0001.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

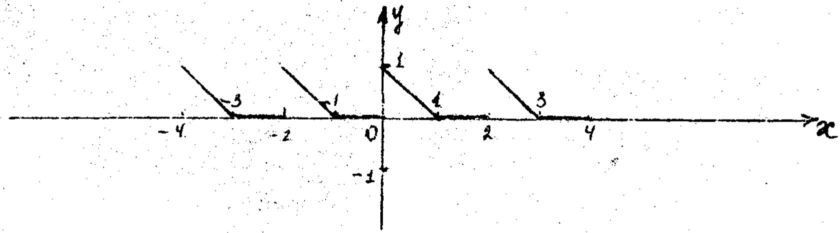
$$\int_0^{0,8} x^2 \cos x\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y'' = ye^x + 1, \quad y(0) = 2;\ y'(0) = 1.$$

10. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ в интервале $]0; 2\pi[$.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.




## Вариант 4

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+\sin n^2}{\sqrt[5]{n^7}+1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (n!)^2}{(2n)!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$. 4. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!\,(2n+1)}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2 (x+1)^{2n+1}}.$$

7. Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x) = \cos^2 x^3$ и определить область сходимости.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

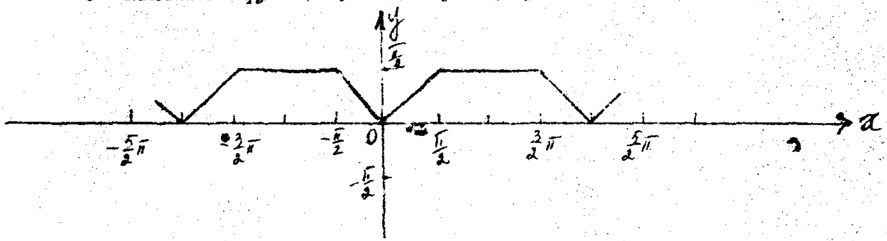
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y' = e^y + xy\, ;\; y(0) = 0 .$$

10. Функцию $f(x) = x^2$ в интервале $]0;\pi[$ разложить в ряд синусов.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.




## Вариант 5

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3n-\sqrt{n}}$ .

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{(3n+5)\cdot 2^n}$ . 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$ . 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n^2}{n^4-n^2+1}$ .

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}01$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)} .$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8} .$$

7. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, найти значение пятой производной функции $y=x^2\sqrt[4]{1+x}$ при $x = 0$.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

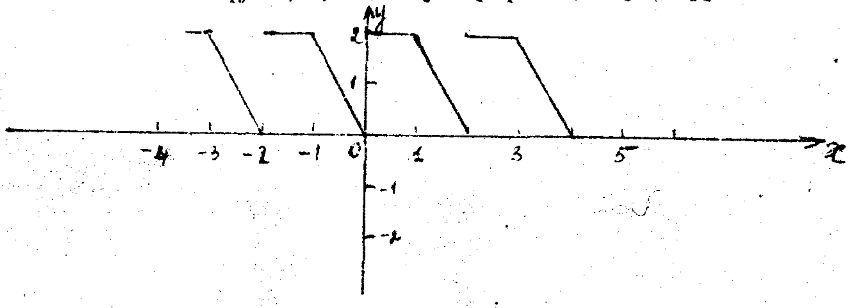
$$y' = \sin y - \sin x; \quad y(0)=0.$$

10. Функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } \quad = 0; \\ 2x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ 0 \text{ при } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

разложить в ряд косинусов.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.




Вариант 6

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n^2}{n^3+2}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}\cdot \sin\frac{5}{3^n}}{n^2}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^n \cdot (n+1)^2$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{3n^2+5}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0,0001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n}}{4^{n+1}(n+3)}.$$

7. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\sin^2 x^3$ и определить область сходимости.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

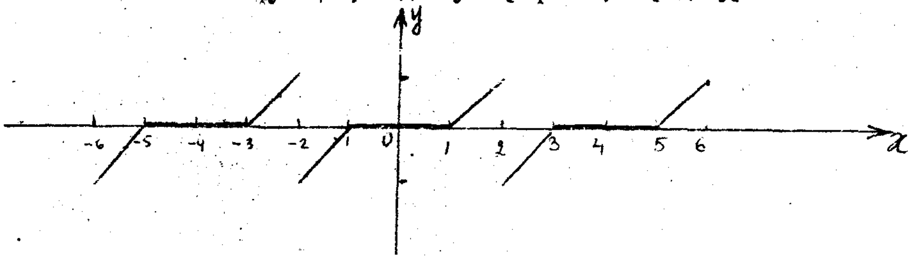
$$\int_0^{0,5} x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y' = y + \frac{x^2}{y}; \quad y(0) = 1.$$

10. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 3 - x$ в интервале $]-2;2[$.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.




## Вариант 7

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{7^n (n!)^2}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+4}}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0,1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n \cdot 3^n (x-2)^n}.$$

7. Разложить по степеням $x$ функцию $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t^2}{t^2} dt$ и найти радиус сходимости.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

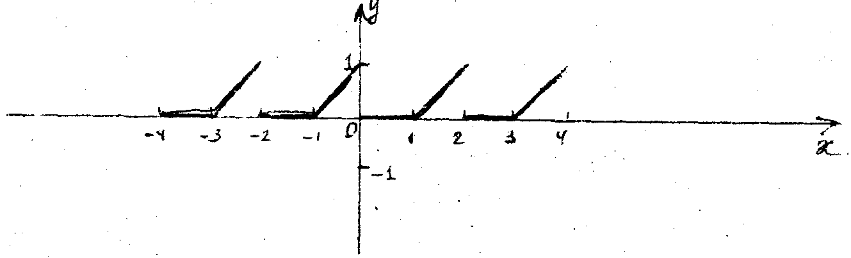
$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y' = x + y^2; \quad y(0) = 1.$$

10. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ в интервале $]-3;3[$.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.




Вариант 8

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\cos\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+1}\right)^{2n+1}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt[4]{16n+3}}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{(n+1)^2 (x-1)^n}.$$

7. Разложить функцию $f(x) = x^2 e^{-x}$ в ряд по степеням $x$ и вычислить с точностью до 0,0001 значение этой функции при $x = 0{,}5$.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx .$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

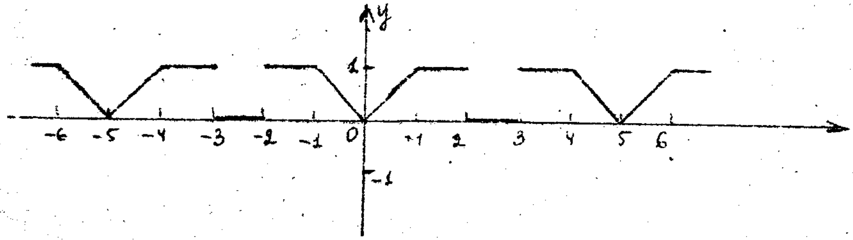
$$y'' = xy \cdot y' ; \quad y(0) = 1 ; \quad y'(0) = -1 .$$

10. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x & \text{для } 0 \le x \le \frac{1}{2} ; \\ 0 & \text{для } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

разложить в ряд по косинусам.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.




## Вариант 9

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \sqrt{n}}{n^2 + 3}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^{2n-1}}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}001$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+5)^n}{4^n(2n+1)^2}.$$

7. Используя разложение функций в степенные ряды, вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}.$$

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

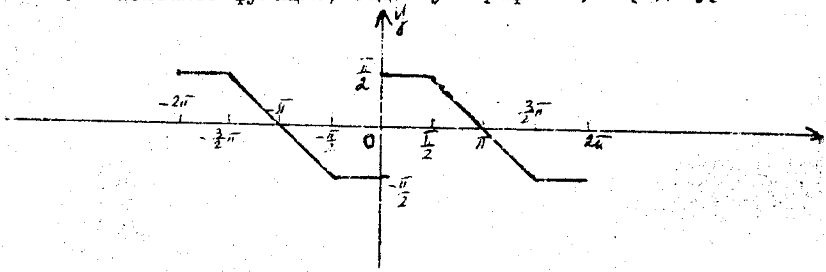
$$y' = xy^2 - 1; \quad y(0) = 1.$$

10. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x < 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



# Вариант I0

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\cos n}}{3n-1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{3n}$

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha$ = 0,000I

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{((2n+1)!)^2}$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-n)4^n}.$$

7. Разложить функцию $f(x)=e^{2x}$ в ряд по степеням $(x-3)$. Определить область сходимости.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,00I, взяв необходимое число слагаемых

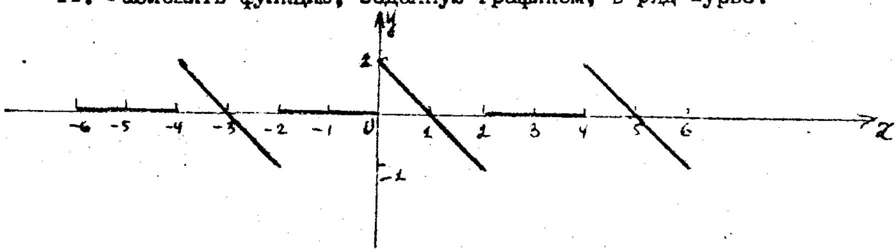
$$\int_0^1\frac{x-\sin x}{x^3}dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y'=x^2y^2-1\ ;\ y(0)=1.$$

I0. Разложить функцию $f(x)=\cos\alpha x$ при $-\pi<x<\pi$ ( $\alpha$ – не целое) в ряд Фурье.

II. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## Вариант II

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sin n}}{n^2+4}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 3^n}{(n+2)!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{5^{n+1}}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-3}{3n^2-3}\right)^2$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}00I$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n \frac{1}{((2n)!)^2}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n-1)2^{n-1}}.$$

7. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{I{,}2}$, взяв четыре члена разложения и оценить погрешность.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,00I, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0{,}5} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}\,dx.$$

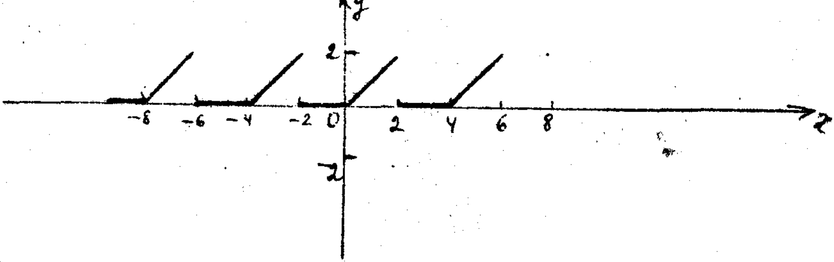
9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y' = 1 + x + x^2 - 2y^2; \quad y(1) = 1.$$

I0. Разложить в ряд Фурье в интервале $]-\pi;\pi[$ функцию

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}.$$

II. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## Вариант I2

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 n}{n^3+6}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$.  3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.  4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln(2n)}$

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}0I$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n \frac{1}{n}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)(x-2)^n}{(5n-8)^3}.$$

7. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$, используя разложение функций в степенной ряд.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,00I, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^1 \frac{x}{e^{x^3}}\,dx.$$

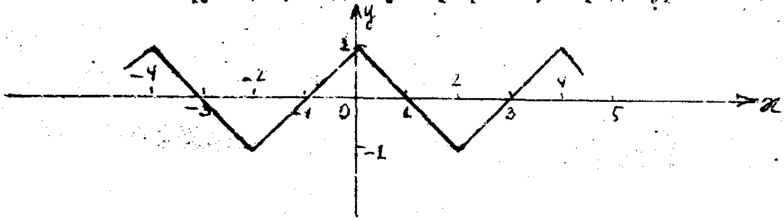
9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y' = x^3 + y^2;\ y(0) = 1.$$

I0. Разложить в ряд Фурье в интервале $]-\pi;\pi[$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2} & \text{при } -\pi \le x < 0; \\ \frac{\pi-x}{2} & \text{при } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

II. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



В а р и а н т 13

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3+\cos n\pi)}{n^5+4}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{2n+1}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{2}{n+1}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}0001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{7^n}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(x+5)^n}{(n+1)^3 \cdot 2^{n-1}}.$$

7. Вычислить приближенно $\sqrt{27}$, взяв четыре члена разложения, и оценить погрешность.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

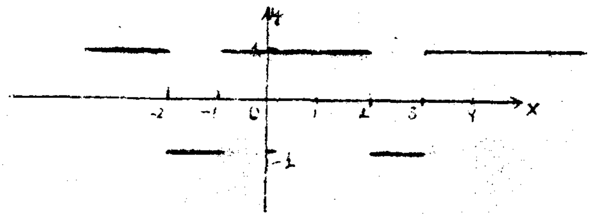
$$\int_0^{0,5} \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y' = e^{2xy} + y; \quad y(0) = 0.$$

10. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ в интервале $]0;\pi[$ в ряд косинусов.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## Вариант I4

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3(2+\cos n\pi)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$.   3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{n^2+2}$.   4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n} .$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(x+5)^n}{(n^2+1)2^{n+2}} .$$

7. Используя разложение функций в степенной ряд, вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} .$$

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,00I, взяв необходимое число слагаемых

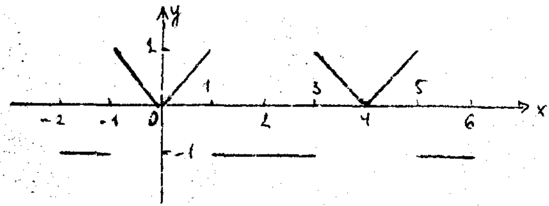
$$\int_0^{0,7} \frac{e^x - 1}{x} dx .$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y'' + xy^2 = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0 .$$

I0. Разложить функцию $f(x) = 2x$ в интервале $]0;1[$ в ряд синусов.

II. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## Вариант I5

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sin\left(\frac{2+(-1)^n}{6}\pi\right)$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3\, 2^{3n}}{(3n)!}$.  3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.  4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n+1)}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha \leq 0{,}001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(2n)!}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n (x-1)^{2n}}.$$

7. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{18}$, взяв четыре члена разложения, и оценить погрешность.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,8} \frac{\sin x - x}{x^3}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

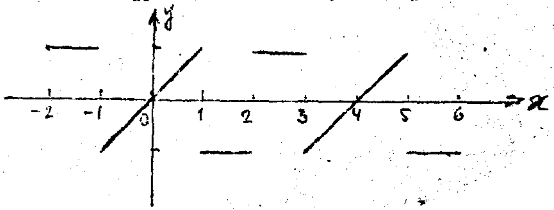
$$y' = xy^2 + 1;\quad y(1) = 0.$$

10. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 2 - x & \text{при } 1 < x < 2 \end{cases}$$

в ряд синусов в интервале $]0;2[$.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье:



## Вариант 15

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{9n^3+1}}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0,01$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3 \cdot n!}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{(n+1)^3 2^{n+1}}.$$

7. Найти предел, используя разложение функций в степенной ряд

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x(\sin x - x)}.$$

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,4} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

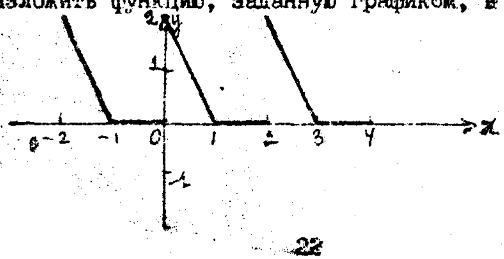
$$y' = xy - y^2; \quad y(0) = -1.$$

10. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x \le 1; \\ 2 - x & \text{при } 1 < x < 2 \end{cases}$$

в ряд косинусов в интервале $]0;2[$.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## Вариант I7

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi + \sin n}{n^2+1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{n^n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}00001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n)!}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(x-4)^n}{n^2 \cdot 3^{n-1}}.$$

7. Разложить функцию $f(x) = e^{3x}$ по степеням $(x-2)$. Определить область сходимости.

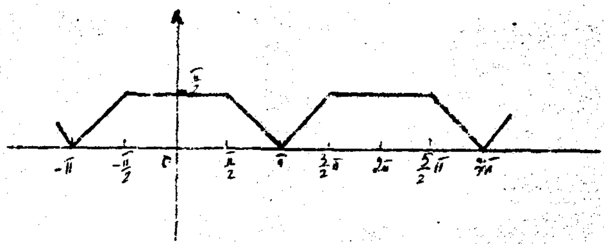
8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,75} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях $y' = y^2 e^x + 1;\ \ y(0) = 2$.

10. Разложить в ряд косинусов функцию $f(x) = x - 1$ в интервале $]0;1[$.

II. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье:



## Вариант 18

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{3}}{3^{n+2}}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n!) \sin \frac{\pi}{2^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{3n+2}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0,001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n! \, (2n)!}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 (x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}.$$

7. Найти предел, используя разложение функций в степенной ряд

$$\lim_{x \to 0} \frac{x e^{-\frac{x^2}{6}} - \sin x}{x^5}.$$

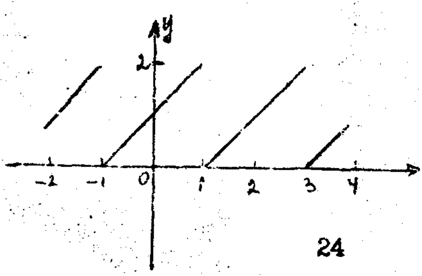
8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях $y''' = y^2 + xy''$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

10. Разложить в ряд по синусам функцию $f(x) = x + 2$ в интервале $]0;1[$.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



# Вариант 19

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+3}+2}{\sqrt[5]{n^7+1}}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$.   3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 10)^n}$.   4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{\ln(n+4)}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}.$$

7. Разложить в ряд по степеням $x$ функцию

$$f(x)=\int_0^x \ln(1+4t^2)\,dt.$$

определить область сходимости.

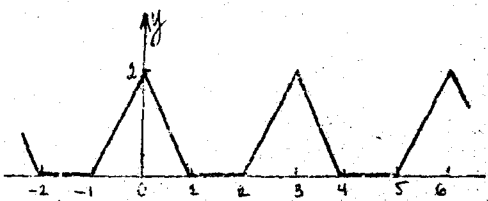
8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,25} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях $y' = x^2 + y^3;\ y(0) = 2$.

10. Разложить функцию $f(x) = x^2 - 2x$ в интервале $]0;2[$ в ряд по косинусам.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## Вариант 20

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin\frac{\pi n}{4}}{n^2}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{\sqrt{4n^3+1}}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$$

7. Найти предел, используя разложение функций в степенной ряд

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{\cos 2x - 1}.$$

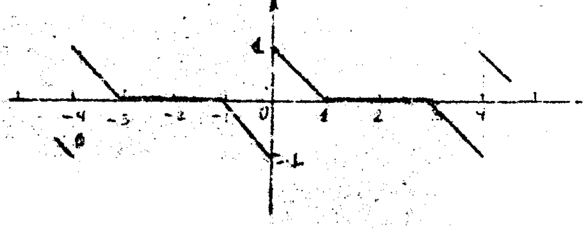
8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях $y''' + x\sin y = 0;\ y(0) = \frac{\pi}{2};\ y'(0) = y''(0) = 0.$

10. Разложить в ряд по косинусам функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ в интервале $]0;\pi[$.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



Вариант 21

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{2n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n)!}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0,0001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n)!}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)(x-3)^n}.$$

7. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, найти значение десятой производной функции $f(x) = x^6 e^x$ при $x = 0$.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

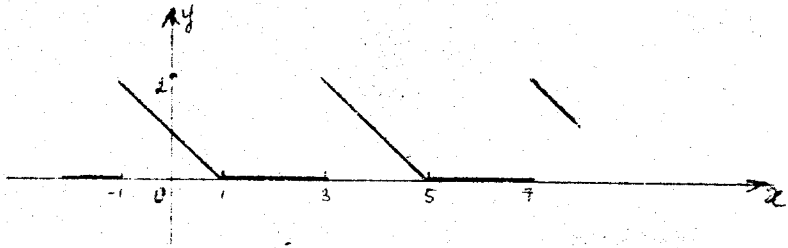
$$\int_0^{0,5} \frac{1-e^{2x^2}}{x}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях

$$y' = e^y + xy;\quad y(0) = 0.$$

10. Разложить в ряд по косинусам функцию $f(x) = 1 - x$ в интервале $]0;2[$.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## Вариант 22

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{3n^2+1}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n}(n+1)!}{(2n)!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{(3n+2)^2}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}001$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{3^n(n+1)}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^2 (x+2)^n}$$

7. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{30}$ с точностью до 0,001.

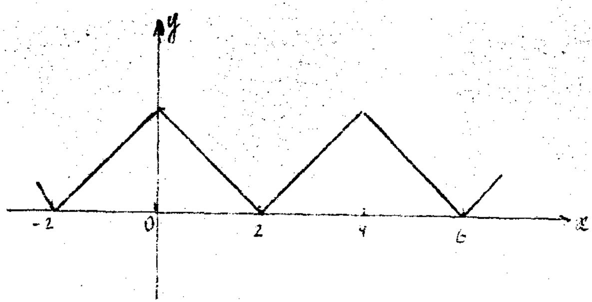
8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях $y' = x^2 - y^2;\ y(0) = 2$.

10. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x + 1$ на интервале $]0;\pi[$ в ряд по синусам.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## Вариант 23

Исследовать на сходимость ряды: 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln n}}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!\,4^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n+2)}{4n^2+1}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}001$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(2n-1)^3 (x+3)^{n+2}}.$$

7. Найти предел, используя разложение функций в степенной ряд

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\ln(1+x^3)}.$$

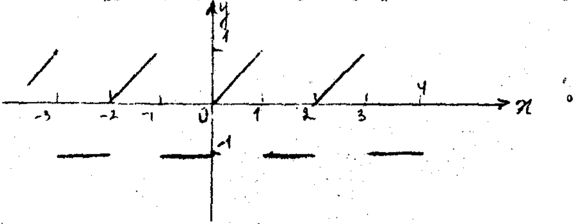
8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,125} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x}\,dx.$$

9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях $y' = y^2 + \sin x$ ; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

10. Разложить функцию $f(x) = 2x - 1$ в интервале $]0;1[$ в ряд по синусам.

11. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## Вариант 24

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{5^n (n!)^2}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^n$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n^2+2}\right)^2$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}0I$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^3}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+4)(x-2)^n}.$$

7. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, найти значение пятой производной от функции $y = x^2\sqrt[4]{1+x}$ при $x=0$.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,00I, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0{,}25} \frac{1-\cos 2x}{x^2}\,dx.$$

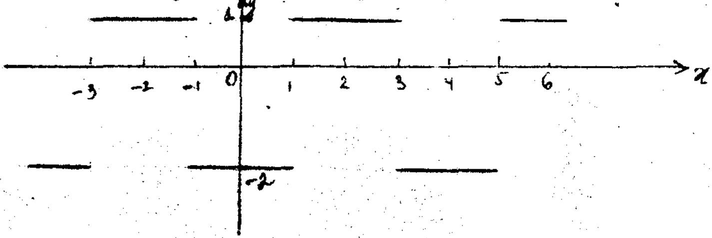
9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях $y'' - xy' + y - 1 = 0;\ y(0) = y'(0) = 0$.

I0. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < x < \frac{I}{2}; \\ I, & \text{при } \frac{I}{2} < x < I \end{cases}$$

в ряд по косинусам в интервале $]0;I[$.

II. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



# Вариант 25

Исследовать на сходимость ряды: I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{n\left(3+\sin\frac{\pi n}{4}\right)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n-1)!}$  3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.  4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$.

5. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}00I$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}.$$

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}.$$

7. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, найти значение седьмой производной от функции $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ при $x = 0$.

8. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,00I, взяв необходимое число слагаемых

$$\int_0^{0,8} \frac{dx}{e^{x^3}}.$$

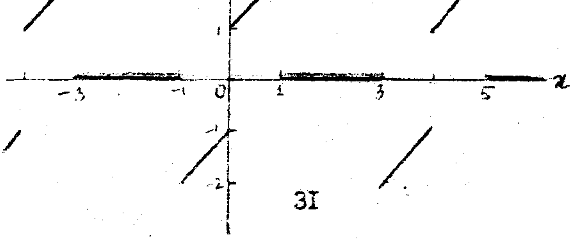
9. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях $y' = xy^2 + \sqrt{y}$ ; $y(0) = 1$.

I0. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \text{I, при } 0 \le x \quad \frac{\text{I}}{2}; \\ \text{0, при } \frac{\text{I}}{2} < x < \text{I} \end{cases}$$

в ряд по синусам в интервале $]0;\text{I}[$.

II. Разложить функцию, заданную графиком, в ряд Фурье.



## ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕМЕ "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ"

Приведем примеры оформления некоторых типовых задач, относящихся к данной теме.

П р и м е р  I. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^x}, \tag{1}$$

$$y(0) = 1 + 2\ln 2, \; y'(0) = 3\ln 2. \tag{2}$$

Р е ш е н и е. Заданное дифференциальное уравнение - линейное неоднородное 2-го порядка. В силу линейности и неоднородности структура его общего решения $y = Y + y_c$, где $Y$ - общее решение однородного уравнения, $y_c$ - какое-то частное решение неоднородного уравнения.

Характеристическое уравнение (I)

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \tag{3}$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Тогда

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \tag{4}$$

общее решение однородного уравнения. И поскольку правая часть (I) не имеет специального вида, то для нахождения $y_c$ применяем метод вариации произвольных постоянных, т.е. решение $y_c$ ищем в виде (4), считая $C_1$ и $C_2$ функциями $x$: $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, а именно $y_c = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$

Для определения $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ получаем систему

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0; \\ C_1'(e^x)' + C_2'(e^{2x})' = \dfrac{e^x}{1+e^x} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0; \\ C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} = \dfrac{e^x}{1+e^x}. \end{cases} \tag{5}$$

Решая систему, получаем

$$C_1' = -\frac{1}{1+e^x}, \quad C_2' = \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(1+e^x)}.$$

Откуда

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{1+e^x} = \left| \begin{array}{l} \text{Замена: } 1+e^x = t;\ x = \ln(t-1) \\ dx = \frac{dt}{t-1} \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{dt}{t(t-1)} = -\int \frac{t-(t-1)}{t(t-1)}dt = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= \ln t - \ln|t-1| + \overline{C_1} = \ln(1+e^x) - x + \overline{C_1}.$$

Замечание. $\int \frac{dt}{t(t-1)}$ можно было бы взять, разлагая $\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t}$ или, выделяя полный квадрат, $(t-1)t = (t-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{e^x(1+e^x)}dx = \int e^{-x}dx - \int\frac{dx}{1+e^x} =$$

$$= -e^{-x} + \ln(1+e^x) - x + \overline{C_2}.$$

Нам нужна какая-то из первообразных $C_1(x)$ и из $C_2(x)$ поэтому можем положить $\overline{C_1} = \overline{C_2} = 0$

Следовательно,

$$y_0 = [\ln(1+e^x) - x]e^x + [\ln(1+e^x) - e^{-x} - x]e^{2x}$$

из (4) $\quad Y = \overline{\overline{C_1}}e^x + \overline{\overline{C_2}}e^{2x}$,

(6) $\quad y = Y + y_0 = [\ln(1+e^x) - x]e^x + [\ln(1+e^x) - e^{-x} - x]e^{2x} + \overline{\overline{C_1}}e^x + \overline{\overline{C_2}}e^{2x}.$

З а м е ч а н и е. Общее решение неоднородного уравнения можно получить, подставляя в (4)

$$C_1(x)=\ln(1+e^x)-x+\bar{\bar{C_1}} \quad \text{и} \quad C_2(x)=-e^{-x}+\ln(1+e^x)-x+\bar{\bar{C_2}}.$$

Исходя из начальных условий, находим $\bar{\bar{C_1}}$ и $\bar{\bar{C_2}}$:

из (6) $y(0)=\ln 2+\ln 2-1+\bar{\bar{C_1}}+\bar{\bar{C_2}}=2\ln 2-1+\bar{\bar{C_1}}+\bar{\bar{C_2}}.$

Но из (2) $y(0)=1+2\ln 2$, т.е. $2\ln 2-1+\bar{\bar{C_1}}+\bar{\bar{C_2}}=1+2\ln 2$

$\bar{\bar{C_1}}+\bar{\bar{C_2}}=2,$

$$y'=C_1'e^x+C_2'e^{2x}+C_1(e^x)'+C_2(e^{2x})'+y_0'.$$

Используем из (5) $C_1'e^x+C_2'e^{2x}=0.$

Тогда $y'=C_1(e^x)'+C_2(e^{2x})'+y_0'=C_1e^x+2C_2e^{2x}+y_0'=$

$=(\ln(1+e^x)-x)e^x+(\ln(1+e^x)-e^{-x}-x)2e^{2x}+\bar{\bar{C_1}}e^x+\bar{\bar{C_2}}e^{2x},$

$y'(0)=\ln 2+2(\ln 2-1)+\bar{\bar{C_1}}+2\bar{\bar{C_2}}=3\ln 2-2+\bar{\bar{C_1}}+2\bar{\bar{C_2}}.$

Из начального условия (2) $y'(0)=3\ln 2,$

$\bar{\bar{C_1}}+2\bar{\bar{C_2}}+3\ln 2-2=3\ln 2,$

т.е. $\bar{\bar{C_1}}+2\bar{\bar{C_2}}=2$

и для $C_1$, $C_2$ получаем систему

$$\begin{cases}\bar{\bar{C_1}}+2\bar{\bar{C_2}}=2;\\ \bar{\bar{C_1}}+\bar{\bar{C_2}}=2,\end{cases}$$

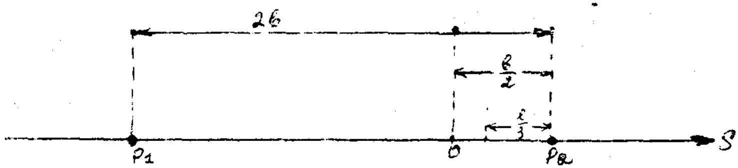
$$\bar{\bar{C_2}}=0;\ \bar{\bar{C_1}}=2.$$

Итак, получаем решение задачи Коши:

$$y=(\ln(1+e^x)-x)e^x+(\ln(1+e^x)-e^{-x}-x)e^{2x}+2e^x.$$

П р и м е р 2. Материальная точка массы $m$ притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию; коэффициент пропорциональности для первого центра равен $k$, для второго $3k$. Расстояние между центрами $2b$. В начальный момент точка находится на расстоянии $\frac{b}{3}$ от центра с большим коэффициентом притяжения, двигаясь к центру со скоростью $v_0 = b\sqrt{\frac{k}{m}}$. Найти амплитуду и начальную фазу колебания.

Р е ш е н и е.




Пусть $P_1$ и $P_2$ – центры притяжения. Возьмем за начало координат ($S = 0$) точку O, в которой данная масса находится в положении равновесия. Условием равновесия является равенство $k|OP_1| = 3k|OP_2|$, значит, точка O должна делить отрезок $P_1P_2$ в отношении 3:1. При таком выборе системы координат точка $P_1$ имеет координату $-\frac{3b}{2}$, а $P_2$ – координату $\frac{b}{2}$. Кроме того, так как в начальный момент $t = 0$ точка находилась на расстоянии $\frac{b}{3}$ от $P_2$ и двигалась к $P_1$ со скоростью, равной по модулю $b\sqrt{\frac{k}{m}}$, мы получим следующие начальные условия задачи Коши:

$$S\Big|_{t=0} = \frac{b}{2} - \frac{b}{3} = \frac{b}{6},$$

$$\frac{dS}{dt}\Big|_{t=0} = -b\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Уравнение движения по закону Ньютона будет $m\frac{d^2S}{dt^2} = F$, где $F$ – проекция на ось $OS$ равнодействующей двух сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, соответствующих центрам $P_1$ и $P_2$. Если точка $M$ имеет координату $S$, то ее расстояния от $P_1$ и $P_2$ равны соответственно

$$|MP_1| = |S - (-\tfrac{3}{2}b)| = S + \tfrac{3}{2}b \quad \text{и} \quad |MP_2| = |\tfrac{b}{2} - S| = \tfrac{b}{2} - S.$$

(очевидно, что $-\frac{3b}{2} < S < \frac{b}{2}$). Поэтому по условию задачи

$F_1 = k(S+\frac{3}{2}b)$, $F_2 = 3k(\frac{b}{2}-S)$. Так как $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ противоположно направлены, то $F = F_2 - F_1 = -4kS$.

Обозначая $\frac{k}{m} = w^2$, получаем уравнение

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 4w^2 S = 0$$

с начальными условиями

$$S(0) = \frac{b}{6},$$

$$S'(0) = -bw.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4w^2 = 0$ имеет корни $\pm 2wi$, поэтому общее решение $S = C_1 \sin 2wt + C_2 \cos 2wt$. Находим $S' = 2wC_1 \cos 2wt - 2w \sin 2wt$ и определяем из начальных условий $C_2 = \frac{b}{6}$, $C_1 = -\frac{b}{2}$.

Решением задачи будет функция

$$S = -\frac{b}{2}\sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{b}{6}\cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$

определяющая гармоническое колебание с амплитудой

$$A = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{36}} = \frac{b\sqrt{10}}{6}$$

и начальной фазой

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{b}{2A}\right) = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$

при этом решение может быть представлено в виде

$$S = A\sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right).$$

## Теоретические вопросы

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к однородным.

3. Линейные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли.

4. Уравнения в полных дифференциалах.

5. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин.

6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы.

7. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

8. Линейный дифференциальный оператор, его свойства. Линейное однородное дифференциальное уравнение, свойства его решений.

9. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.

10. Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.

11. Линейное однородное дифференциальное уравнение. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения.

13. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

14. Линейные однородные дифференциельные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней характеристического уравнения).

15. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней характеристического уравнения).

16. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод подбора.

17. Системы дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши для нормальной системы уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка).

18. Нормальные системы линейных уравнений. Запись в векторном виде. Структура общего решения (в векторной форме). Нормальная система линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

## Теоретические упражнения

1. Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки графиков решений уравнений $y'=f(x,y)$, соответствующие максимумам и минимумам. Как отличить максимум от минимума?

2. Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки перегиба графиков решений уравнения $y'=y-x^2$.

3. Методом изоклин построить интегральную кривую для дифференциального уравнения $yy' = -2x$, проходящую через точку М(0,5).

4. Составить общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$ , где $p(x)$ – непрерывная функция, если известно ненулевое частное решение $y_1$ этого уравнения.

5. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка, если известны два частных его решения.

6. Могут ли графики двух решений уравнения на плоскости $(x,y)$ пересекаться в некоторой точке $(x_0, y_0)$:

а) для уравнения $y' = x + y^2$;

б) для уравнения $y'' = x + y^2$?

7. Найти два решения задачи Коши для уравнения $y'' = 2\sqrt{y'}$ с начальными условиями $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$. Почему результат не противоречит теореме существования и единственности решения задачи Коши?

8. Доказать, что в случае $q(x) < 0$ решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ не могут иметь положительных максимумов.

9. Пусть $y_1 = 2x + 1$ и $y_2 = x - 4$ фундаментальная система решений некоторого однородного линейного уравнения второго порядка. Не восстанавливая самого уравнения, выяснить, какие пары из следующих функций $z_1 = 1$; $z_2 = x^2$; $z_3 = 3$; $z_4 = x + 1$ также образуют фундаментальную систему решений этого уравнения.

10. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее следующие частные решения: $y_1 = x^2 - 3x$; $y_2 = 2x^2 + 9$; $y_3 = 2x + 3$.

11. Зная три частных решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$ и $y_3 = x^3$ линейного неоднородного уравнения второго порядка, определить его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

12. При каких действительных $a$ и $b$ все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$

а) стремятся к нулю при $x \to +\infty$;

б) ограничены на всей числовой прямой;

в) обращаются в нуль на бесконечном множестве точек $x$?

## Вариант I

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx$.

2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

3. $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$.  4. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ ; $y(1) = 0$.

6. $y^2 dx + (x + e^{\frac{2}{y}})dy = 0$ ; $y(e) = 2$.

7. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2$, $y(0) = 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' x \ln x = y''.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x} ; \; y(0) = 3; \; y'(0) = 0.$$

10. При каком значении $\omega$ периодическое решение уравнения

$$y'' + 2y' + 6y = \sin \omega t.$$

имеет наибольшую амплитуду?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 2y'' - 3y' = (8x+6)e^x.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$ :

$$\lambda_1 = 1; \; \lambda_{2,3} = \pm i;$$

а) $f(x) = (x^2+3)e^x$;

б) $f(x) = e^x \sin x$;

в) $f(x) = 3 + (x^2+2)e^x$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y; \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}.$$

## Вариант 2

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$ 2. $xy' = \dfrac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}.$

3. $y' = \dfrac{x+y-2}{2x-2}.$ 4. $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0.$

Найти решение задачи Коши:

5. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x;\ y(\frac{\pi}{2}) = 0.$

6. $(y^4e^y + 2x)y' = y;\ y(0) = 1.$

7. $xy' + y = 2y^2\ln x;\ y(1) = \frac{1}{2}.$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''' + y'' = 1.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}};\ y(0) = \ln 4;\ y'(0) = 3(1-\ln 2).$$

10. При каком значении $\omega$ периодическое решение уравнения

$$y'' + 4y' + 24y = \sin\omega t$$

имеет наибольшую амплитуду?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 6y'' + 9y' = (16x+24)e^x.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = f(x).$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$\lambda_1 = 1;\ \lambda_{2,3} = \pm i;$

а) $f(x) = (x^2+3)e^x;$

б) $f(x) = e^x\sin x;$

в) $f(x) = 3 + (x^2+2)e^x.$

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3x+y; \\ \dfrac{dx}{dt} = y-x. \end{cases}$$

## Вариант 3

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$. 2. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

3. $y' = \dfrac{-x+3y-4}{3x+3}$. 4. $(3x^2+4y^2)dx + (8xy+e^y)dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$; $y(0)=0$.

6. $y^2 dx + (xy-1)dy = 0$; $y(\frac{1}{e}) = e$.

7. $2(xy'+y) = xy^2$; $y(1)=2$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$2xy''' = y''$.

9. Найти решение задачи Коши:

$y'' + 4y = 8\,ctg\,2x$; $y(\frac{\pi}{4}) = 5$; $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

10. Материальная точка массы $m$ притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Коэффициент пропорциональности для одного центра $k$, для другого - $2k$. Расстояние между центрами $2b$. В начальный момент точка находится в середине линии центров, двигаясь к центру с меньшей силой притяжения со скоростью $v_0$, численно равной $b\sqrt{\frac{k}{m}}$. Найти амплитуду и начальную фазу колебаний точки.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y''' - y'' - 9y' + 9y = (12-16x)e^x$.

12. Дано уравнение

$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$.

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$\lambda_1=-1;\ \lambda_2=4;\ \lambda_3=4;$

а) $f(x)=3xe^{4x};$

б) $f(x)=e^{4x}(x\sin x+3\cos x);$

в) $f(x)=\cos 5x+e^{-x}+x^3.$

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+4y;\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y.\end{cases}$$

## Вариант 4

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $\sqrt{3+y^2}\,dx-y\,dy=x^2y\,dy.$ 2. $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y.$

3. $y'=\dfrac{2y-2}{x+y-2}.$ 4. $\left(2x-1-\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\dfrac{1}{x}\right)dy=0.$

Найти решение задачи Коши:

5. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\cos^2 x;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$

6. $2(4y^2+4y-x)\cdot y'=1;\ y(0)=0.$

7. $y'+4x^3y=4(x^3+1)e^{-4x}y^2;\ y(0)=1.$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'''+y''=x+1.$$

9. Найти решение задачи Коши

$$y''-6y'+8y=\frac{4}{1+e^{-2x}};\ y(0)=1+2\ln 2;\ y'(0)=6\ln 2.$$

10. Материальная точка, притягиваемая к неподвижному центру силой, прямо пропорциональной расстоянию точки до центра, совершает колебательное движение. Сила сопротивления среды прямо пропорциональна (с тем же коэффициентом пропорциональности) скорости. Найти период колебания точки, если амплитуда после двух колебаний уменьшается в два раза.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y''' - 4y'' + 3y' = 4(1-x)e^{-x}$.

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0.$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

а) $f(x) = (2x-1)\sin 4x - \cos 4x$;

б) $f(x) = (7-3x)e^{-x}$;

в) $f(x) = 2x^2 + 5 - e^{3x}\sin x$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases}.$$

## В а р и а н т 5

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 3xy^2\,dx$. 2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$.

3. $y' = \dfrac{x+y-2}{3x-y-2}$. 4. $(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$; $y(-1) = \frac{3}{2}$.

6. $(\cos 2y \cdot \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y$; $y(\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{3}$.

7. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x$; $y(1) = 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.

9. Найти решение задачи Коши:

$y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

10. При каком значении $\omega$ периодическое решение уравнения

$$y''+4y'+9y=\sin\omega t$$

имеет наибольшую амплитуду?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''-3y''+4y=(18x-21)e^{-x}$$

12. Дано уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_1y=f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1=0$; $\lambda_{2,3}=-3\pm5i$;

а) $f(x)=(2x-11)e^{-3x}$;

б) $f(x)=x^3+5$;

в) $f(x)=e^{-3x}(x^2\sin5x+3)$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+2y;\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y.\end{cases}$$

## Вариант 6

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $x\sqrt{3+y^2}\,dx+y\sqrt{2+x^2}\,dy=0.$  2. $xy'=\dfrac{3y^3+4x^2y}{2x^2+2y^2}.$

3. $y'=\dfrac{2x+y-3}{x-1}.$  4. $(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0.$

Найти решение задачи Коши:

5. $y'-\dfrac{y}{x+1}=e^x(x+1)$; $y(0)=1$.

6. $(x\cos^2y-y^2)y'=y\cos^2y$; $y(\pi)=\frac{\pi}{4}$.

7. $2(y'+xy)=(1+x)e^{-x}y^2$; $y(0)=2$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''+xy'=1.$$

9. Найти решение задачи Коши

$$y''+\pi^2y=\frac{\pi^2}{\sin\pi x};\ y(\tfrac{1}{2})=1;\ y'(\tfrac{1}{2})=\frac{\pi^2}{2}.$$

10. Материальная точка массы $m$ притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Коэффициент пропорциональности для одного центра $k$, для другого – $2k$. Расстояние между центрами $2b$. В начальный момент точка находится на расстоянии $\frac{b}{2}$ от центра с большим коэффициентом притяжения, двигаясь к центру со скоростью $v_0$, численно равной $\frac{b}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Найти амплитуду и начальную фазу колебаний точки.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''-5y''+8y'-4y=(2x-5)e^x.$$

12. Дано уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1=2\pi$, $\lambda_{2,3}=2\pi\pm3i$.

а) $f(x)=e^{2\pi x}\sin 3x$;

б) $f(x)=e^{2\pi x}(\cos x+5)$;

в) $f(x)=x^3e^{6{,}28x}$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=7x+2y;\\ \frac{dy}{dt}=3x+2y.\end{cases}$$

## Вариант 7

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0$.

2. $y'=\frac{x+2y}{2y-x}$.

3. $y' = \dfrac{x+7y-8}{9x-y-8}$.

4. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

6. $e^{y^2}(dx - 2xy\,dy) = y\,dy$; $y(0) = 0$.

7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x$; $y(1) = 3$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

9. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{\pi^2}y = \frac{1}{\pi^2 \cos\frac{x}{\pi}};\ y(0) = 2;\ y'(0) = 0.$$

10. Сила, растягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 0,5 кГ, когда длина увеличивается на 1 см. К пружине подвешен груз 3 кГ. Этот груз слегка оттянут вниз и затем отпущен. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости. Найти период колебательного движения груза, если амплитуда после пяти колебаний уменьшается в три раза.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^{x}.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1 = -\sqrt{3}$; $\lambda_2 = \sqrt{3}$; $\lambda_3 = 13$.

а) $f(x) = x\left(e^{\sqrt{3}x} + 5e^{-\sqrt{3}x}\right)$;

б) $f(x) = e^{13x}(x^2 - 7)$;

в) $f(x) = 2x^2 \sin\sqrt{3}x$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$$

## Вариант 8

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$ 2. $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y.$

3. $y'=\dfrac{3y+3}{2x+y-1}.$ 4. $e^y dx+(\cos y+xe^y)dy=0.$

Найти решение задачи Коши:

5. $y'+\frac{y}{x}=\sin x;\quad y(\pi)=\frac{1}{\pi}.$

6. $dx+(xy-y^3)dy=0;\ y(-1)=0.$

7. $2y'+y\cdot\cos x=y^{-1}\cos x(1+\sin x);\ y(0)=1.$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^3y'''+x^2y''=1.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''-3y'=\frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}};\ y(0)=4\ln 4;\ y'(0)=3(3\ln 4-1).$$

10. Материальная точка массы $m$ притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию, коэффициент пропорциональности для одного центра $k$, для другого – $3k$. Расстояние между центрами $2b$. В начальный момент точка находится на расстоянии $\frac{b}{3}$ от центра с большим коэффициентом притяжения, двигаясь к другому центру со скоростью $v_0$, численно равной $b\sqrt{\frac{k}{m}}$. Найти амплитуду и начальную фазу колебаний точки.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''+2y''+y'=(18x+21)e^{2x}.$$

12. Дано уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$$\lambda_1=-\sqrt{5};\ \lambda_2=\sqrt{5};\ \lambda_3=\sqrt{5};$$

а) $f(x)=2x^2e^{\sqrt{5}x}(2\cos\sqrt{5}x-\sin\sqrt{5}x)$;

б) $f(x)=-x^2+3+7e^{-\sqrt{5}x}$;

в) $f(x)=12x^2\cos\sqrt{5}x$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+4y; \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y. \end{cases}$$

## Вариант 9

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$
2. $3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4.$
3. $y'=\frac{x+3y+4}{3x-6}.$
4. $\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0.$

Найти решение задачи Коши:

5. $y'+\frac{y}{2x}=x^2;\ y(1)=1.$
6. $(3y\cos 2y-2y^2\sin 2y-2x)y'=y;\quad y(16)=\frac{\pi}{4}.$
7. $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}(1-x^3);\ y(0)=-1.$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\operatorname{tg}x\, y'''=2y''.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''+y=4\operatorname{ctg}x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4;\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4.$$

10. При каком значении $\omega$ периодическое решение уравнения

$$y''-2y'+11y=\sin\omega t$$

имеет наибольшую амплитуду?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + y'' - y' - y = (8x+4)e^{x}.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 7$;

а) $f(x) = e^{-x}(3-x^2)\sin 7x$;

б) $f(x) = (5x^2 - 2x - 9)e^{7x}$;

в) $f(x) = x\cos 7x + e^{-x}$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 11y - 2x. \end{cases}$$

## Вариант 10

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$. 2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$.

3. $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$. 4. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^{y})dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$; $y(0) = \dfrac{2}{3}$.

6. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1$, $y(0) = 0$.

7. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$, $y(0) = -1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''.$$

9. Найти решение задачи Коши

$$y''-6y'+8y=\frac{4}{2+e^{-2x}};\ y(0)=1+3\ln 3;\ y'(0)=10\ln 3.$$

10. Сила, растягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 1 кГ, когда длина увеличивается на 1 см. К пружине подвешен груз весом 2 кГ. Период колебательного движения, которое получил груз, будучи слегка оттянут книзу и затем отпущен, равен $4\pi$ с. За какое время амплитуда колебания груза уменьшится в 2 раза, если сила сопротивления среды пропорциональна скорости.

11. Найти обще решение дифференциального уравнения

$$y'''-3y'+2y=-4xe^{x}.$$

12. Дано уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1, a_2, a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1=-3-7i;\ \lambda_2=-3+7i;\ \lambda_3=-3;$

а) $f(x)=e^{-3x}\cos 7x+e^{-x};$

б) $f(x)=-x\sin 7x;$

в) $f(x)=e^{-3x}(2\sin 7x-5x\cos 7x).$

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y-3x;\\ \dfrac{dy}{dt}=y-2x.\end{cases}$$

## Вариант II

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $y(4+e^{x})dy-e^{x}dx=0.$ 2. $y'=\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+2.$

3. $y'=\frac{x-2y+3}{-2x-2}.$ 4. $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0.$

Найти решение задачи Коши:

5. $y'-\frac{2x-5}{x^2}y=5;\ y(2)=4.$

6. $(2\ln y - \ln^2 y)dy = y\,dx - x\,dy$; $y(4)=e^2$.

7. $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3$; $y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^4y'' + x^3y' = 1.$$

9. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}};\quad y(0)=0;\ y'(0)=0.$$

10. Материальная точка притягивается каждым из двух центром с силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности одинаков для обоих центров). Сила сопротивления среды пропорциональна (с вдвое большим коэффициентом пропорциональности) скорости. Под действием этих сил точка совершает колебательное движение. Найти период колебаний, если за пять колебаний амплитуда уменьшается в три раза.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 3y' + 2y = (4x+9)e^{2x}.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$\lambda_1 = -5$; $\lambda_{2,3} = -1 \pm 2i$;

а) $f(x) = (-2-3x)\sin 2x$;

б) $f(x) = e^{-5x}\sin 2x + e^{-x}$;

в) $f(x) = e^{-x}(27\cos 2x - x^2\sin 2x)$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

## Вариант 12

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$.  2. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y$.

3. $y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}$.  4. $(x^2-4xy-2y^2)dx + (y^2-4xy-2x^2)dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x$; $y(1) = e$.

6. $2(x+y^4)y' = y$,  $y(-2) = -1$.

7. $3xy' + 5y = (4x-5)y^4$; $y(1) = 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''' + 2y'' = 0.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x};\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4;\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

10. Материальная точка, притягиваемая к неподвижному центру силой, прямо пропорциональной расстоянию от точки до центра, совершает колебательное движение с периодом $2\pi$. Сила сопротивления среды прямо пропорциональна (с тем же коэффициентом пропорциональности) скорости. Во сколько раз уменьшается амплитуда после каждого периода колебаний?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x+16)e^x.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1, a_2, a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1 = \frac{1}{7}$; $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{7} \pm 2i$;

а) $f(x) = 5x^3 \sin 2x$;

б) $f(x) = 9x^2 e^{-\frac{x}{7}}$;

в) $f(x) = (4x+7)(e^{-\frac{x}{7}}\cos 2x + x^2)$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

## Вариант 13

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\, yy' = 0$. 2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$.

3. $y' = \dfrac{2x+3y-5}{5x-5}$ 4. $xdx + ydy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' - \frac{y}{x} = 2\frac{\ln x}{x}$; $y(1) = 1$.

6. $y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy$; $y(\frac{1}{4}) = 2$.

7. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2+3\cos x)y^{-1}$, $y(0) = 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3.$$

9. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

10. При каком значении $\omega$ периодическое решение уравнения

$$y'' + 2y' + 3y = \sin \omega t$$

имеет наибольшую амплитуду?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1, a_2, a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$\lambda_1=-1;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3=6;$

а) $f(x)=(5x-7)\sin 6x-x^2\cos 6x;$

б) $f(x)=xe^{-x};$

в) $f(x)=x^3+3-e^{6x}\sin\frac{x}{3}.$

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x-y;\\ \frac{dy}{dt}=4x-y.\end{cases}$$

## Вариант 14

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx.$ 2. $xy'=\frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}.$

3. $y'=\frac{4y-8}{3x+2y-7}.$ 4. $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0.$

Найти решение задачи Коши:

5. $y'-\frac{y}{x}=-\frac{8}{x^2};\ y(1)=4.$

6. $2y^2dx+(x+e^{\frac{1}{y}})dy=0;\ y(e)=1.$

7. $3(xy'+y)=xy^2;\ y(1)=3.$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^5y'''+x^4y''=1.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''-y'=\frac{e^{-x}}{2+e^{-x}},\ y(0)=\ln 27;\ y'(0)=\ln 9-1.$$

10. Материальная точка притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности одинаков для обоих центров). Сила сопротивления среды пропорциональна скорости (с тем же самым коэффициентом пропорциональности). Под действием этих сил точка совершает колебательное движение с периодом $\pi$ с. Во сколько раз уменьшается амплитуда колебаний точки за каждый период?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + y'' - 2y' = (6x+5)e^{x}.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1, a_2, a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 2 \pm 7i;$$

а) $f(x) = x^3 + x^2 + 3$;

б) $f(x) = xe^{2x}$;

в) $f(x) = e^{2x}(x\sin 7x - 5\cos 7x)$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y; \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 4y. \end{cases}$$

## Вариант 15

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $2x\,dx - 2y\,dy = x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx.$
2. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$
3. $y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}.$
4. $\left(xe^{x} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$

Найти решение задачи Коши:

5. $y' + \frac{2}{x}y = x^3;\ y(1) = -\frac{5}{6}.$
6. $(xy + \sqrt{y})dy + y^2 dx = 0;\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.$
7. $y' - y = 2xy^2;\ y(0) = \frac{1}{2}.$
8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''+4y=4\operatorname{ctg}2x\ ;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3;\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2.$$

10. При каком значении $\omega$ периодическое решение уравнения

$$y''-4y'+17y=\sin\omega t$$

имеет наибольшую амплитуду?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''+4y''+4y'=(9x+15)e^{x}.$$

12. Дано уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$$\lambda_1=\pi;\quad \lambda_{2,3}=3\pi\pm i;$$

а) $f(x)=(7-x^2)e^{3,14x}$;

б) $f(x)=e^{3\pi x}(x+\sin x)$;

в) $f(x)=e^{3\pi x}(\cos x-x^2\sin x)$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y;\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x-y.\end{cases}$$

## Вариант 16

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $x\sqrt{4+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$. 2. $xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$.

3. $y'=\dfrac{y-2x+3}{x-1}$. 4. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}=0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y'+\dfrac{y}{x}=3x$; $y(1)=1$.

6. $\sin 2y\,dx=(\sin^2 2y-2\sin^2 y+2x)\,dy$; $y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

7. $2xy'-3y=-(20x^2+12)y^3$; $y(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\cancel{y' + \frac{y}{x} = 3x;\ y(1) = 1}.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}},\ y(0) = 1 + 8\ln 2,\ y'(0) = 14\ln 2.$$

10. Материальная точка массы $m$ притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Коэффициент пропорциональности для одного из центров $k$, для другого – $3k$. Расстояние между центрами $2b$. В начальный момент точка находится в середине линии центров, двигаясь к центру с большей силой притяжения со скоростью $v_0$, численно равной $b\sqrt{\frac{k}{m}}$. Найти амплитуду и начальную фазу колебаний точки.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^{x}.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1 = -\sqrt{2};\ \lambda_2 = \sqrt{2};\ \lambda_3 = 13;$

а) $f(x) = e^{13x}(x + 5);$

б) $f(x) = x^2 \sin \sqrt{2}x;$

в) $f(x) = x^2\left(2e^{-\sqrt{2}x} + 3e^{\sqrt{2}x}\right).$

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

## Вариант 17

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $(e^{x} + 8)dy - y e^{x} dx = 0.$ 2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$

3. $y' = \frac{x-2y-3}{x-1}$.  4. $xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + tg^2y)dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$; $y(1) = 3$.

6. $(y^2 + 2y - x)y' = 1$; $y(2) = 0$.

7. $y' + 2xy = 2x^3y^3$; $y(0) = \sqrt{2}$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$th\,x\, y^{(IV)} = y'''.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

10. Сила, растягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 1 кГ, когда длина увеличивается на 1 см. К пружине подвешен груз весом 2 кГ. Этот груз слегка оттянут вниз и затем отпущен. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости. Найти период колебательного движения груза, если амплитуда после 10 колебаний уменьшается в два раза.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$$\lambda_1 = 7;\ \lambda_{2,3} = \pm 7i;$$

а) $f(x) = (2x^2 + 11)e^x \cos 7x$;

б) $f(x) = 5x \cos 7x$;

в) $f(x) = 3 + (x^2 + 16)e^{7x}$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y; \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 3x. \end{cases}$$

## Вариант 18

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$. 2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$.

3. $y' = \dfrac{3x+2y-1}{x+1}$. 4. $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1; \quad y(1) = 1$.

6. $2y\sqrt{y}\,dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0; \quad y(-4) = 1$.

7. $xy' + y = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''' + y'' = \sqrt{x}.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}; \; y\left(\tfrac{\pi}{8}\right) = 3; \; y'\left(\tfrac{\pi}{8}\right) = 2\pi.$$

10. При каком значении $\omega$ периодическое решение уравнения

$$y'' - 6y' + 22y = \sin \omega t$$

имеет наибольшую амплитуду?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 3y'' + 2y' = (1-2x)e^{-x}.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1 = \sqrt{13}$; $\lambda_2 = -\sqrt{13}$; $\lambda_3 = \sqrt{13}$:

а) $f(x)=x^2\cos\sqrt{13}\,x$;

б) $f(x)=3e^{\sqrt{13}\,x}-\frac{x^3}{3}$;

в) $f(x)=x^2e^{-\sqrt{13}\,x}(\sin\sqrt{13}\,x+7\cos\sqrt{13}\,x)$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x-3y;\\ \frac{dy}{dt}=3x+4y.\end{cases}$$

## В а р и а н т 19

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $(1+e^x)yy'=e^x$.

2. $y'=\frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$.

3. $y'=\frac{5y+5}{4x+3y-1}$.

4. $(\sin 2x-2\cos(x+y))dx-2\cos(x+y)dy=0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y'=-\frac{3y}{x}+\frac{2}{x^3}$; $y(1)=1$.

6. $dx=(\sin y+3\cos y+3x)dy$; $y\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)=\frac{\pi}{2}$.

7. $2y'+3y\cos x=(8+12\cos x)e^{2x}y^{-1}$; $y(0)=2$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''\operatorname{tg}x=y''+1.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''+16y=\frac{16}{\cos 4x};\ y(0)=3;\ y'(0)=0.$$

10. Материальная точка притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности одинаков для обоих центров). Сила сопротивления среды пропорциональна (с вдвое большим коэффициентом пропорциональности) скорости. Под действием этих сил точка совершает колебательное движение с периодом $2\pi$ с. За какое время амплитуда колебаний уменьшится в два раза?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}.$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1, a_2, a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_{2,3} = -3 \pm i$;

а) $f(x) = (x^2 - 4x)\cos x$;

б) $f(x) = e^{-3x}(\sin x + 1) + 5e^{-2x}$;

в) $f(x) = e^{-3x}(\cos x + x^2 \sin x)$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 3x; \\ \dfrac{dy}{dt} = -20x + 6y. \end{cases}$$

## Вариант 20

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $y\ln y + xy' = 0$.

2. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3. $y' = \dfrac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}$.

4. $\left(xy^2 + \dfrac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \dfrac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' + 2xy = -2x^3$; $y(1) = e^{-1}$.

6. $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)y' = \sin 2y$; $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}$.

7. $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2$; $y(0) = 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''-2y'=\frac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}};\ y(0)=\ln 4;\ y'(0)=\ln 4-2.$$

10. Материальная точка, притягиваемая к неподвижному центру силой F, прямо пропорциональной расстоянию от точки до центра, совершает колебательное движение. Сила сопротивления среды $f_c$ прямо пропорциональна скорости (с коэффициентом пропорциональности в два раза большим, чем у F). Найти период колебаний, если после 3 колебаний амплитуда уменьшится в 10 раз.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''-4y''+3y'=-4xe^{x}.$$

12. Дано уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_1y=f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$$\lambda_1=-\frac{1}{2};\qquad \lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm 2i;$$

а) $f(x)=\cos 2x+x^2\sin 2x;$

б) $f(x)=(8x^2-3)e^{-\frac{x}{2}};$

в) $f(x)=x^2\left(e^{-\frac{x}{2}}\cos 2x+x+3\right).$

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5y-x;\\ \dfrac{dy}{dt}=5x+y.\end{cases}$$

## Вариант 21

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $(1+e^{x})y'=ye^{x}.$ 2. $y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+12.$

3. $y'=\frac{x+y+2}{x+1}.$ 4. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0.$

Найти решение задачи Коши:

5. $y'+\frac{xy}{2(1-x^2)}=\frac{x}{2},\ y(0)=\frac{2}{3}.$

6. $(13y^3-x)y'=4y$; $y(5)=1$.

7. $8xy'-12y=-(5x^2+3)y^3$; $y(1)=\sqrt{2}$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' \,\mathrm{th}\, 7x = 7y''.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''+\frac{y}{4}=\frac{1}{4}\mathrm{ctg}\frac{x}{2};\ y(\pi)=2;\ y'(\pi)=\frac{1}{2}.$$

10. Материальная точка притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности одинаков для обоих центров). Сила сопротивления среды пропорциональна скорости (с тем же коэффициентом пропорциональности). Под действием этих сил точка совершает колебательное движение. Найти период колебаний, если за три колебания амплитуда уменьшается в два раза.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''-5y''+3y'+9y=e^{-x}(32x-32).$$

12. Дано уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$:

$$\lambda_1=2;\ \lambda_{2,3}=9;$$

а) $f(x)=(x^3-5)e^{9x}$;

б) $f(x)=e^{2x}(x\sin 9x+\cos 9x)$;

в) $f(x)=\cos 12x+e^{9x}+x^3$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+8y;\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+y.\end{cases}$$

## Вариант 22

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $\sqrt{1-x^2}\,y'+xy^2+x=0$.  2. $xy'=\dfrac{3y^3+12x^2y}{6x^2+2y^2}$.

3. $y'=\dfrac{2x+y-3}{4x-4}$  4. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y'+xy=-x^3$; $y(0)=3$.

6. $(x+\ln^2 y-\ln y)y'=\dfrac{y}{2}$; $y(2)=1$.

7. $2(y'+y)=xy^2$; $y(0)=2$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^3y'''+x^2y''=\sqrt{x}.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''-3y'+2y=\frac{1}{2+e^{-x}};\ y(0)=1+3\ln 3;\ y'(0)=5\ln 3.$$

10. При каком значении $\omega$ периодическое решение уравнения

$$y''+6y'+19y=\sin \omega t$$

имеет максимальную амплитуду?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''+4y''+8y'=(20x+14)e^{2x}.$$

12. Дано уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1, a_2, a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1=-1$; $\lambda_2=0$; $\lambda_3=5$;

а) $f(x)=e^{-x}(x^3+2x^2+x+3)$;

б) $f(x)=2x\sin 5x-x^2\cos 5x$;

в) $f(x)=2x^2+7x-e^{-x}\sin x$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y; \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

## В а р и а н т 23

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $6x\,dx - 2y\,dy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$. 2. $y' = \frac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$.

3. $y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}$. 4. $\frac{x+y^2}{y^2}dy - \frac{dx}{y} = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2$; $y(0)=1$.

6. $(2xy+\sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0$; $y(-\frac{1}{2}) = 1$.

7. $y' + xy = (x-1)e^x y^2$; $y(0) = 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\operatorname{cth} x\, y'' - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2+e^x}; \; y(0)=0; \; y'(0)=0.$$

10. Сила, натягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 2 кГ, когда длина увеличивается на 1 см. К пружине подвешен груз весом 3 кГ. Период колебательного движения, которое получил груз, будучи слегка оттянут вниз и затем отпущен, равен $3\pi$ с. За какое время амплитуда колебаний груза уменьшится в два раза, если сила сопротивления среды пропорциональна скорости?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 7y'' + 15y' - 9y = e^x(8x-12).$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1=0$; $\lambda_{2,3}=-2\pm 8i$;

а) $f(x)=2x^3+3x+1$;

б) $f(x)=e^{-2x}(x^2+5)$;

в) $f(x)=2e^{-2x}(x\sin 8x+\cos 8x)$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=12x-5y; \\ \frac{dy}{dt}=5x+12y. \end{cases}$$

## Вариант 24

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $y(1+\ln y)+xy'=0$.
2. $xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$.
3. $y'=\frac{y}{2x+2y-2}$.
4. $\frac{1+xy}{x^2y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x$; $y(0)=1$.
6. $ydx+(2x-2\sin^2 y-y\sin 2y)dy=0$; $y(\frac{3}{2})=\frac{\pi}{4}$.
7. $2y'-3y\cos x=-e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1}$; $y(0)=1$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x+1)y'''+y''=x+1.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''+y=\frac{1}{\sin x};\quad y(\tfrac{\pi}{2})=1;\ y'(\tfrac{\pi}{2})=0.$$

10. Материальная точка, притягиваемая к неподвижному центру силой F, прямо пропорциональной расстоянию от точки до центра, совершает колебательное движение с периодом $4\pi$ с. Сила сопротивления среды пропорциональна (с коэффициентом пропорциональности в два раза большим, чем у F) скорости. За какое время амплитуда колебаний уменьшится в два раза?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = -e^{x}(8x+4).$$

12. Дано уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1 = \pi$; $\lambda_{2,3} = 2\pi \pm 7i$;

а) $f(x) = e^{\pi x}(x + \sin x)$;

б) $f(x) = e^{2\pi x}(\cos 7x - x^2 \sin 7x)$;

в) $f(x) = (2 - x^2)e^{3,14x}$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

## Вариант 25

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $(3+e^{x})yy' = e^{x}$.
2. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$.
3. $y' = \dfrac{x+5y-6}{7x-y-6}$.
4. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$.

Найти решение задачи Коши:

5. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; $y(0) = \frac{1}{2}$.
6. $2(y^3 - y + xy)dy = dx$; $y(-2) = 0$.
7. $y' - y = xy^2$; $y(0) = 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1 + \sin x)y''' = y''\cos x.$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$y''+y=\frac{1}{\cos x};\ y(0)=1;\ y'(0)=0.$$

10. При каком значении $\omega$ периодическое решение уравнения

$$y''-2y'+18y=\sin\omega t$$

имеет наибольшую амплитуду?

11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''+5y''+7y'+3y=e^{x}(16x+20).$$

12. Дано уравнение

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1$, $a_2$, $a_3$. Корни его характеристического уравнения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ известны. Указать вид частного решения для различных $f(x)$: $\lambda_1=-1$; $\lambda_2=-2$; $\lambda_3=2$;

а) $f(x)=e^{2x}(x^2+5x-13)$;

б) $f(x)=e^{-x}(2+x)\cos 2x$;

в) $f(x)=x^2\sin 2x+xe^{-x}$.

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x;\\ \dfrac{dy}{dt}=15x+y.\end{cases}$$

## ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕМЕ "ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО"

Приведем образцы оформления решений некоторых типовых задач по этой теме.

**П р и м е р 1.** Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{L}\frac{e^{-\pi z}}{z^2+4}\,dz,\quad L:|z+i|=1,5.$$

**Р е ш е н и е.** Функция $f(z)=\dfrac{e^{-\pi z}}{z-2i}$ аналитична в круге, ограниченном окружностью $|z+i|=1,5$. Поэтому, применяя формулу Коши, находим: $\oint \frac{e^{-\pi z}}{z^2+4}dz = \oint\limits_{L} \frac{f(z)}{z+2i}dz = 2\pi i\, f(-2i) =$

$= 2\pi i \cdot \frac{e^{2\pi i}}{-4i} = -\frac{\pi}{2}.$

Пример 2. Найти решение уравнения $x'''(t)+4x'(t)=1$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

Решение. Составим уравнение в изображениях

$$p^3X(p)+4pX(p)=\frac{1}{p}.$$

Отсюда

$$X(p)=\frac{1}{p^2(p^2+4)}.$$

Представим $X(p)$ в виде суммы дробей простейшего типа:

$$X(p)=\frac{A_1}{p}+\frac{A_2}{p^2}+\frac{Mp+N}{p^2+4}.$$

Находим: $A_1=0$, $A_2=\frac{1}{4}$, $M=-\frac{1}{4}$, $N=0$.

С помощью формул таблицы оригиналов и изображений находим искомое решение:

$$x(t)=\frac{t}{4}-\frac{1}{8}\sin 2t.$$

## Теоретические вопросы

1. Определения и свойства элементарных функций комплексного переменного.
2. Определение и условия дифференцируемости (Коши-Римана) функции комплексного переменного.
3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
4. Теорема Коши и интегральная формула Коши.
5. Классификация изолированных особых точек функций.
6. Лорановские разложения функций в окрестности изолированных особых точек.
7. Вычеты, их вычисление и приложения.
8. Определение оригинала и изображения.
9. Основные теоремы об оригиналах и изображениях.
10. Решение дифференциальных уравнений операционным методом.

## Теоретические упражнения

1. Доказать, что для функции

$$f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & \text{при } z \neq 0; \\ 0, & \text{при } z = 0; \end{cases}$$

а) в точке $z = 0$ выполнены условия Коши-Римана;

б) в точке $z = 0$ $f(z)$ не является дифференцируемой.

2. Доказать, что если при любом $z$ имеем $f'(z) = 0$, то

$$f(z) = const.$$

3. Доказать, что из условий Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ при полярной замене $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{r}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

4. Найти образ линии $|z| = 3$ при отображении $f(z) = \frac{1}{z}$. Сделать чертеж и указать на нем взаимно соответствующие произвольные точки.

5. Доказать, что функция $f(z) = \cos z$ в различных точках $z_1 \neq z_2$ полосы $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ принимает разные значения $f(z_1) \neq f(z_2)$.

6. Пусть $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ доказать:

а) $f(z) = \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z}{2^3} + \ldots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \ldots$

при $1 < |z| < 2$;

б) точка $z = 0$ не является существенно особой, хотя указанное в а) разложение имеет бесконечно много отрицательных степеней $z$. Объяснить кажущееся противоречие.

7. Доказать, что функции: $\int_0^t f(t)\,dt$, $f(t-\tau)$ при $\tau > 0$,

$f(t)\cdot g(t)$ - являются оригиналами, если $f(t)$, $g(t)$ - оригиналы.

8. Пусть $F(p)$ - изображения для $f(t)$, при каких условиях можно утверждать, что $p^n F(p)$ - изображение для $n$ -й производной $f^{(n)}(t)$. Ответ обосновать выводом.

9. Будет ли функция $f(t) = 0$ при $t < 0$ $f(t) = e^{e^t}$ при $t \geqslant 0$ - оригиналом? Ответ обосновать.

10. Доказать, что оригиналом изображения

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{p^k};\ |p|\geq R>0$$

является целая функция $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{(k-1)!}t^{k-1}$.

11. Найти операторное решение $X(p)$ (изображение) решения $x(t)$ дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\dots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t)$$

при нулевых начальных условиях $x(0)=x'(0)=\dots=x^{(n-1)}(0)=0$, зная, что $f(t)$ и $x(t)$ (вместе со своими производными) – оригиналы, а $F(p)$ – изображение для $f(t)$.

12. Доказать, что если $x_1(t)$ – решение уравнения $L[x(t)]=1$ с нулевыми начальными условиями, то для решения уравнения $L[x(t)]=f(t)$ с той же левой частью и теми же начальными условиями, имеем

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau=x_1(t)f(0)+\int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau.$$

## Вариант I

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа

$$(1+i3)^3.$$

2. Решить уравнение

$$z^6+2z^3+2=0.$$

3. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^1}{1\cdot z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$$x''+3x'+2x=0;\quad x(0)=0;\ x'(0)=1;$$

$$y''-2y'-3y=e^{4x};\ y(0)=0;\ y'(0)=1.$$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases}x'=3y-x; \\ y'=x+y+e^t,\end{cases}\qquad x(0)=y(0)=0;$$

## Вариант 2

I. Найти действительную и мнимую части комплексного числа

$$\frac{3+3i}{2-3i}.$$

2. Решить уравнение $z^4+16=0$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz$.

4. Функция $f(z)=\frac{z^2}{2z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$$x'''-x'=2e^t;\ x(0)=0;\ x'(0)=0;\ x''(0)=0;$$

$$y''+y=4xe^x;\ y(0)=0;\ y'(0)=0.$$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} x'+7x-y=0; \\ y'+2x+5y=0; \end{cases} \quad x(0)=1;\ y(0)=1.$$

## Вариант 3

I. Найти действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(\frac{1}{2-3i}\right)^2.$$

2. Решить уравнение $z^6-64=0$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z-\pi i}dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^3}{3z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$$y'''+y'=10e^{2x};\ y(0)=0;\ y'(0)=0;\ y''(0)=0;$$

$$y''-y=2e^x-x^2;\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} x'-2x-4y=\cos t; \\ y'+x+2y=\sin t; \end{cases} \quad x(0)=y(0)=0.$$

## Вариант 4

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\frac{(2+i)^2}{1-i}$.

2. Решить уравнение $z^6-2z^3+2=0$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^4}{4z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$x''+4x=4t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$;

$y''-y'-2y=4xe^x$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$.

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}+y=0; & x(0)=2;\ y(0)=0.\\ \frac{dy}{dt}+x=0;\end{cases}$$

## Вариант 5

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $(-1+i3)(1-i)$.

2. Вычислить $\sqrt[6]{i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos z}{z(z-\frac{\pi}{2})}dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^5}{5z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$x''-6x'+9x=0$; $x(0)=7$; $x'(0)=3$;

$y''-3y'+2y=\sin x$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

6. Решить систему операционным методом

$$\begin{cases}x'-y=0; & x(0)=0;\ y(0)=1.\\ x+y'=0;\end{cases}$$

## В а р и а н т 6

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа
$$(5+7i)(7+5i).$$

2. Вычислить $\sqrt[4]{1+i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{(z^3+4z)(z-\frac{\pi}{2})}dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^6}{6z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:
$$x''+9x'=\cos t\ ;\ x(0)=0;\ x'(0)=0;$$
$$y''-y=4\sin x;\ y(0)=1;\ y'(0)=1.$$

6. Решить систему операционным методом:
$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}+x-2y=0; & x(0)=1;\ y(0)=1.\\ \frac{dy}{dt}+x+4y=0;\end{cases}$$

## В а р и а н т 7

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа
$$(3-i)^4.$$

2. Вычислить $\sqrt[3]{2-2i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\frac{\pi}{4})}dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^7}{7z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:
$$x''+4x=4e^{2t}+4t^2;\quad x(0)=1;\quad x'(0)=2;$$
$$y''-5y'+4y=4x^2e^{2x};\ y(0)=0;\ y'(0)=1.$$

6. Решить систему операционным методом:
$$\begin{cases}x'+3x+y=0; & x(0)=2;\ y(0)=3.\\ y'-x+y=0;\end{cases}$$

2015

$13^{30}$

## Вариант 8

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\dfrac{(1-i)^2}{1+i}$.

2. Вычислить $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+2i|=3} \dfrac{dz}{z^2+9}$

4. Функцию $f(z)=\dfrac{z^8}{8z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$$x''-2x'+x=\operatorname{sh} t; \quad x(0)=x'(0)=0;$$
$$y''-3y'+2y=10\cos x; \; y(0)=y'(0)=0.$$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} x'+y'+x=\cos t; \\ x'+x+y=\sin t+2\cos t; \end{cases} \quad y(0)=1; \; x(0)=0.$$

## Вариант 9

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

2. Вычислить $\sqrt[6]{-8}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z^2}{z-2i}\,dz$.

4. Функцию $f(z)=\dfrac{z^9}{9z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$$y''-y'=2(1-x); \; y(0)=y'(0)=1;$$
$$y''+3y'-4y=5e^{-4x}-36xe^{-x}; \; y(0)=0; \; y'(0)=2.$$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} y'+5y-2x=e^{t}; \\ x'-y+6x=e^{-2t}; \end{cases} \quad x(0)=0; \; y(0)=0.$$

## Вариант IO

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $(i-1)^5$.

2. Вычислить $\sqrt{3+4i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{10}}{10z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$y''-4y=8\cos 2x$ ; $y(0)=0$; $y'(0)=6$;

$y''-y'-6y=2$; $y(0)=1$; $y(0)=0$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} x'-4y=8\sin 2t; \\ y'-x=-8\sin 2t; \end{cases} \quad x(0)=2;\ y(0)=2.$$

## Вариант II

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\left(\frac{i}{i+1}\right)^3$.

2. Решить уравнение $z^8-4z^4+8=0$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{dz}{z^2+9}$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{11}}{11z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$x^{IV}-x^{III}-2x''=20\sin t$ ; $x(0)=x'(0)=0$; $x''(0)=x^{III}(0)=4$.

$y''-9y=2-x$ ; $y(0)=y'(0)=\frac{1}{9}$.

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} x'=y; \\ y'=-x-e^{-t}+e^{t}; \end{cases} \quad x(0)=0;\ y(0)=0.$$

## Вариант 12

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $(\sqrt{3}+i)^6$.

2. Вычислить $\sqrt[8]{1}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+1|=4} \frac{\sin z}{z+i}\,dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{12}}{12z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$$x''-x'=te^t \quad x(0)=x'(0)=0,$$

$$y''-4y=4x \quad y(0)=1;\ y'(0)=0.$$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} x'+7x-y=0; \\ y'+2x+5y=0; \end{cases} \quad x(0)=1;\ y(0)=1.$$

## Вариант 13

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\frac{1+i}{1+4i}$.

2. Вычислить $\sqrt[3]{-2+2i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-2i|=4} \frac{dz}{(z^2+9)^2}$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{13}}{13z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$$x''+x'=t^2+2t; \quad x(0)=4,\ x'(0)=-2;$$

$$y''+4y=2\cos 2t; \quad y(0)=0,\ y'(0)=4.$$

6. Решить систему операционным методом

$$\begin{cases} x'+y'-y=e^t; \\ 2x'+y'+2y=\cos t; \end{cases} \quad x(0)=0;\ y(0)=0.$$

## Вариант 14

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$.

2. Решить уравнение $z^8+4z^4+8=0$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-\frac{\pi}{2}i)}dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{14}}{14z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения

$x''-2x'-3x=2t$; $x(0)=1$; $x'(0)=1$;

$y''+y=x^3+6x$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

6. Решить систему операционным методом

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y; & x(0)=y(0)=1.\\ \frac{dy}{dt}=2(x+y).\end{cases}$$

## Вариант 15

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^3$.

2. Вычислить $\sqrt[3]{1-i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^{z}}{z^4+8z^2-9}dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{15}}{15z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения

$y''+y=\cos x+\sin 2x$; $y(0)=y'(0)=0$;

$y''-y=\sin 2x$; $y(0)=y'(0)=0$.

6. Решить систему операционным методом

$$\begin{cases}x'+2y+5x=0;\\ y'+7y-x=0; & x(0)=y(0)=1.\end{cases}$$

## Вариант 16

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\dfrac{1+i}{\left(1+\frac{1}{i}\right)^2}$.

2. Решить уравнение $z^6-2z^3+2=0$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z^2}{z-2i}\,dz$.

4. Функцию $f(z)=\dfrac{z^{16}}{16z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения

$$x''-x'-6x=12;\quad x(0)=1;\ x'(0)=0;$$

$$y''+y=\cos x+\sin 2x;\quad y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} x'=x-2y; \\ y'=x-y; \end{cases}\quad x(0)=1;\ y(0)=1.$$

## Вариант 17

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\dfrac{1-i}{\sqrt{5}-2i}$.

2. Решить уравнение $z^6+2z^3+2=0$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\sin z}{z(z-6)}\,dz$.

4. Функцию $f(z)=\dfrac{z^{17}}{17z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$$x''+2x'+2x=0;\quad x(0)=3;\ x'(0)=4;$$

$$y''+y=e^{-x}+2;\quad y(0)=0;\ y'(0)=0.$$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} y'+4y+4x=0; \\ x'+2y+6x=0; \end{cases}\quad y(0)=3;\ x(0)=15.$$

## В а р и а н т 18

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $(\sqrt{3}+i)(2-i\sqrt{3})^2$.

2. Вычислить $\sqrt[4]{1+i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^3}$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{18}}{18z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$x'''+3x''-4x=0$; $x(0)=x'(0)=0$; $x''(0)=2$.

$y''-4y=4e^{2x}$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

6. Решить систему операционным методом

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}+2y=3t; & x(0)=2; \\ \frac{dy}{dt}-2x=4; & y(0)=3. \end{cases}$$

## В а р и а н т 19

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\frac{2+i^7}{3i-i^{13}}$.

2. Вычислить $\sqrt[3]{-8i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+2|=5} \frac{e^z}{(z+2)^4}dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{19}}{19z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$x''+x=e^{-t}$, $x(0)=x'(0)=0$;

$y'''+y'=10e^{2x}$ $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} 4x'-y'+3x=\sin t; & x(0)=2;\ y(0)=-1. \\ x'+y=\cos t; \end{cases}$$

## Вариант 20

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа

$$\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{2-i}.$$

2. Решить уравнение $z^6-64=0$.

3. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=4}\frac{\sin z}{z+i}\,dz$.

4. Функцию $f(z)=\dfrac{z^{20}}{20z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения

$y''-9y=12-x;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1;$

$y''+9y=6e^{3x};\quad y(0)=0,\ y'(0)=1.$

6. Решить систему операционным методом

$$\begin{cases} x'-2y+5x=e^{t}; \\ y'-x+6y=e^{-2t}; \end{cases}\quad x(0)=1,\ y(0)=-1.$$

## Вариант 21

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа

$$\frac{1}{3+2i}-\frac{i}{i+5}.$$

2. Вычислить $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.

3. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=3}\frac{dz}{z^2+9}$.

4. Функцию $f(z)=\dfrac{z^{21}}{21z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$x''-4x=8\sin 2t;\quad x(0)=1,\ x'(0)=0;$

$y''-9y=2-6x;\quad y(0)=1,\ y'(0)=1.$

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} y'=3z-y; & y(0)=0; \\ z'=y+z+e^{x}; & z(0)=0. \end{cases}$$

## Вариант 22

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа
$$(1+i)(5-2i).$$

2. Вычислить $\sqrt[6]{1-i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^2+9}$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{22}}{22z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$x''-3x'+2x=2e^t$; $x(0)=1$; $x'(0)=0$;

$y''-4y=2\sin 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

6. Решить систему операционным методом:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}+x=y+e^t; \\ \frac{dy}{dt}+y=x+e^t; \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1.$$

## Вариант 23

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа
$$(i+1)^7.$$

2. Вычислить $\sqrt[3]{2-2i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^3}$.

4. Функцию $f(z)=\frac{z^{23}}{27z+100}$ разложить в ряд по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$x'''+2x''-x'-2x=1$; $x(0)=3$; $x'(0)=-1$; $x''(0)=4$;

$y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

6. Решить систему операционным методом:
$$\begin{cases} x'+y'=y+e^t; \\ 2x'+y'+2y=\cos t; \end{cases} \quad x(0)=0;\ y(0)=0.$$

## Вариант 24

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $(\sqrt{3}-i)^5$.

2. Вычислить $\sqrt[3]{-8+8i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-z-6}\,dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{1}{z^2(1+5z)}$ разложить по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения

$x''+4x=\cos 3t$; $x(0)=x'(0)=2$;

$4y'''-8y''-y'-3y=-8e^t$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$.

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} x'+2x+2y=10e^{2t}; \\ y'-2x+y=7e^{2t}; \end{cases} \quad x(0)=1;\ y(0)=3.$$

## Вариант 25

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

2. Вычислить $\sqrt[4]{i}$.

3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{\frac{\pi}{8}}}{z^2+16}\,dz$.

4. Функцию $f(z)=\frac{1}{z^3(2z-1)}$ разложить по степеням $z$ и найти радиус сходимости.

5. Решить операционным методом уравнения:

$x'''+x'=e^{2t}$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$;

$x''-2x'+2x=1+3(t-1)$; $x(0)=x'(0)=0$.

6. Решить систему операционным методом:

$$\begin{cases} 2x'+y'-3x=0; \\ x''+y'-2y=e^{2t}; \end{cases} \quad x(0)=-1;\ x'(0)=1;\ y(0)=0.$$