Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Челябинский политехнический институт имени Ленинского комсомола

Кафедра высшей математики № I

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Ч а с т ь II

Методические указания и контрольные задания

Одобрено объединенным научно-методическим советом по математике

Челябинск
1987

УДК 51 (07)

Типовые расчеты по высшей математике. Часть II: Методические указания и контрольные задания /Составители: И.Г. Азова, А.С. Грищенко, Е.Н. Доманский, Н.И. Михайлова, К.О. Плюснина, Н.С. Распопова, Г.К. Тарасова; Под ред. Е.Н. Доманского. – Челябинск: ЧПИ, 1987. – 86 с.

Методические указания содержат три типовых расчета по следующим темам: интегрирование функций одной переменной (А.С. Грищенко, Н.И. Михайлова); функции нескольких переменных (Е.Н. Доманский, К.О. Плюснина, Н.С. Распопова); кратные и криволинейные интегралы (И.Г. Азова, Г.К. Тарасова). В соответствии с учебной программой они включают теоретические вопросы, теоретические упражнения и индивидуальные задания. Каждый типовой расчет начинается с указаний и пояснений по его выполнению.

Ил. 6, список лит. – 10 назв.

Рецензент Л.Д. Менихес.

В целях лучшего усвоения курса математики и интенсификации самостоятельных занятий студентам предлагаются индивидуальные задания по различным разделам изучаемого курса математики, называемые типовыми расчетами (ТР). Каждый типовой расчет состоит из трех частей: I) теоретические вопросы; 2) теоретические упражнения; 3) задачи и примеры. Теоретические вопросы и упражнения являются общими для всех студентов, выполняющих ТР. Практические задания (примеры и задачи) разделены на 25 вариантов и предназначены для индивидуального выполнения каждым студентом данной учебной группы.

Соответствующий вариант ТР выполняется студентом самостоятельно и поэтапно по мере изучения темы на лекциях и практических занятиях. При выполнении ТР необходимо: I)решение задач выполнить в отдельной тетради; 2) перед решением каждой задачи записать полный текст условия задачи; 3) решение задач сопровождать необходимыми пояснениями.

Контроль за выполнением ТР осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия в группе в два этапа: I) предварительная проверка правильности письменного решения индивидуального задания ТР; 2) защита ТР.

Защита типового расчета проводится в устной (в виде собеседования) или письменной форме и в срок, соответствующий учебному графику для данной специальности.

Во время защиты типового расчета студент должен уметь:

I) отвечать на теоретические вопросы, сформулированные в ТР;

2) решать теоретические упражнения ТР;

3) пояснять решения задач и примеров из своего индивидуального задания, решать аналогичные примеры и задачи.

Выполнение ТР является обязательным элементом самостоятельной работы студента. Программой по высшей математике предусматривается выполнение студентами в процессе обучения системы ТР, охватывающей все основные разделы курса. Ниже мы приведем следующие ТР:

I) интегрирование функций одной переменной;

2) функции нескольких переменных;

3) кратные и криволинейные интегралы.

I. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

I. Данный ТР должен способствовать лучшей организации самостоятельной работы студентов над разделом курса высшей математики "Интегрирование функций одной переменной". Студент должен овладеть основными методами нахождения первообразной функции; вычисления определенного интеграла (как собственного, так и несобственного); исследования сходимости несобственного интеграла. Кроме того, теоретические знания по этому разделу высшей математики нужно научиться применять к решению геометрических и физических задач.

Приведем некоторые примеры решения и оформления теоретических упражнений и задач ТР. Решение ряда теоретических упражнений ТР требует хорошего усвоения понятия определенного интеграла функций (упр. I–4). Идея вычисления пределов, составляющих содержание упражнения I состоит в том, чтобы сумму, стоящую под знаком предела, представить в виде интегральной суммы $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, подобрав при этом соответствующие функцию $y=f(x)$, отрезок $[a,b]$, способ разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки, способ выбора точки ξ_i из i-го частичного отрезка.

Задача I. Найти с помощью определенного интеграла

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(5n-1)^2}{n^3}\right].$$

Решение. Сумму, стоящую под знаком предела, представим в виде

$$\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(5n-1)^2}{n^3}=\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{5n-1}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}=\sum_{i=0}^{5n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}.$$

В сумме i меняется от 0 до $(5n-1)$. Естественно считать, что отрезок $[a,b]$ разбит на $5n$ частей точками $a=x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{4n}, \ldots, x_{5n-1}, x_{5n}=b$. Предположим, что $[a,b]$ разделен на $5n$ равных по длине частичных отрезков. Тогда длина каждого из них $\Delta x_i=\frac{b-a}{5n}$. Пусть точки разбиения $x_i=\frac{i}{n}$; $i=\overline{0,5n}$. А так как $a=x_0=\frac{0}{n}=0$; $b=x_{5n}=\frac{5n}{n}=5$, то соответствующий отрезок $[a,b]$ найден и $\Delta x_i=\frac{1}{n}$. Кроме того, естественно считать, что $f(\xi_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^2$. Тогда $f(x)=x^2$ и $\xi_i=\frac{i}{n}$; $i=\overline{0,5n-1}$ – левые концы частичных отрезков. Таким образом, сумма под знаком предела есть интегральная сумма для функции $f(x)=x^2$ на $[0,5]$ соответствующая разбиению отрезка $[0;\ 5]$ на равные по длине отрезки (способ разбиения) и выбору в качестве точек ξ_i левых концов частичных отрезков (способ выбора точек ξ_i). Так как функция $f(x)=x^2$ непрерывна на $[0;\ 5]$, то она интегрируема на $[0;\ 5]$. Тогда

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 0 \le i \le 5n-1}} \sum_{i=0}^{5n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \int_0^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^5 = \frac{125}{3}.$$

С другой стороны, $\lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 0 \le i \le 5n-1}} \sum\limits_{i=0}^{5n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{5n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$,

так как $\max\limits_{0 \le i \le 5n-1} \Delta x_i = \frac{1}{n}$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(5n-1)^2}{n^3}\right]=\frac{125}{3}$.

2. При помощи определенного интеграла в ряде случаев удобно вычислять площади фигур, длины дуги кривых, объемы тел (задачи 3; 4; 5).

З а д а ч а 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x(x-2)^2$.

Р е ш е н и е. Область определения неявно заданной функции $y^2=x(x-2)^2$ есть промежуток $[0,\ \infty[$. Так как в уравнение кривой y входит во второй степени, то кривая симметрична относительно оси ОХ. Положительная ветвь $y_1(x)$ задается уравнением

$$y = y_1(x) = \sqrt{x}\,|x-2| = \begin{cases} \sqrt{x}(2-x), & 0 \le x \le 2, \\ \sqrt{x}(x-2), & x > 2. \end{cases}$$

Общие точки симметричных ветвей $y_1(x)$ и $y_2(x) = -y_1(x)$ должны лежать на оси ОХ. Но $y_1(x) = \sqrt{x}\,|x-2| = 0$ лишь при $x_1 = 0$ и при $x_2 = 2$.

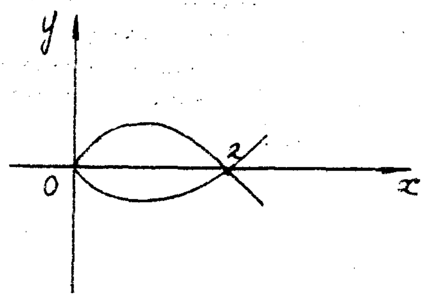
Следовательно, петля кривой образована кривыми $y=\sqrt{x}(2-x)$ и $y=-\sqrt{x}(2-x)$, $0 \le x \le 2$, поэтому площадь фигуры, ограниченной петлей, равна

$$S = 2\int_0^2 \sqrt{x}(2-x)dx =$$

$$= 2\int_0^2 (2x^{1/2} - x^{3/2})dx =$$

$$= \frac{8}{3}x^{3/2}\Big|_0^2 - \frac{4}{5}x^{5/2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{32\sqrt{2}}{15}\ (\text{кв. ед.}).$$

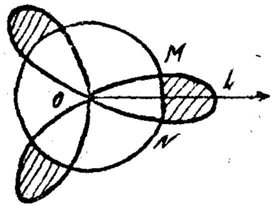


Задача 3. Найти площадь фигуры, лежащей вне круга $\rho = a$ и ограниченной кривой $\rho = 2a\cos 3\varphi$, $a > 0$.

Решение. Так как функция $\rho = 2a\cos 3\varphi$ имеет период $T = \frac{2\pi}{3}$, то при изменении φ от $-\pi$ до π радиус-вектор описывает три равных лепестка кривой. При этом допустимыми для φ являются те значения, при которых $\cos 3\varphi \geq 0$, откуда

$$-\frac{\pi}{6} + 2\frac{k\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + 2\frac{k\pi}{3} \qquad (k = 0;\ 1;\ 2;\ldots).$$

Следовательно, один из лепестков описывается при изменении φ от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{6}$. Остальные два лепестка получаются при изменении φ от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{5}{6}\pi$ и от $\frac{7}{6}\pi$ до $\frac{3}{2}\pi$ соответственно.



Вырезая из лепестков части, принадлежащие кругу $\rho = a$, мы получаем фигуру, площадь которой нужно определить. Ясно, что искомая площадь равна утроенной площади фигуры $MLNM$.

Найдем полярные координаты точек пересечения M и N. Для этого решим уравнение $2a\cos 3\varphi = a$, т.е. $\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$. Между $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$ находятся только корни $-\frac{\pi}{9}$ и $\frac{\pi}{9}$ ($k = 0$). Таким образом, точке N соответствует полярный угол $\varphi_1 = -\frac{\pi}{9}$, точке M – угол $\varphi_2 = \frac{\pi}{9}$.

Итак,

$$S_{MLNM} = S_{OMLNO} - S_{OMNO} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 4a^2\cos^2 3\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} a^2 d\varphi = a^2\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

3. Для работы над типовым расчетом рекомендуем пользоваться следующими учебными пособиями.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1.– М.: Наука, 1978.
3. Шнейдер В.Э., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Т.1. – М.: Высшая школа, 1978.

4. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. - М.: Наука, 1973.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 1966.

Теоретические вопросы

1. Первообразная. Теорема о первообразных. Неопределенный интеграл.
2. Примеры задач, приводящих к вычислению определенного интеграла.
3. Определение определенного интеграла; существование определенного интеграла.
4. Когда можно интегрировать по отрезку $[a, b]$ неравенство, равенство?
5. Теорема о среднем.
6. Каким образом в выводе формулы Ньютона-Лейбница используется непрерывность на $[a, b]$ функции $y = f(x)$?
7. Замена переменной в определенном интеграле.
8. Для чего в выводе формулы интегрирования по частям на $[a, b]$ требуется непрерывная дифференцируемость функций $u(x)$ и $v(x)$ на $[a, b]$?
9. Площадь криволинейного сектора.
10. Каким образом в выводе формулы длины дуги кривой $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ используется непрерывная дифференцируемость функции $y = f(x)$?
11. Формула длины дуги кривой, заданной параметрически.
12. Признаки сравнения сходимости несобственных интегралов.

Теоретические упражнения

1. Пользуясь определением определенного интеграла, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \frac{3^3}{n^4} + \dots + \frac{(4n-1)^3}{n^4} \right]$,

б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{3}{\sqrt{9n^2+1}} + \frac{3}{\sqrt{9n^2+2^2}} + \dots + \frac{3}{\sqrt{9n^2+n^2}} \right]$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{4n}\left(tg\frac{\pi}{4n}+tg\frac{2\pi}{4n}+\ldots+tg\frac{\pi(n-1)}{4n}\right)$.

2. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ - рационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ - иррационально} \end{cases}$$

не интегрируема на любом отрезке $[a,b]$ действительной оси.

3. Доказать, что интегрируемая в собственном смысле на $[a,b]$ функция ограничена на $[a,b]$.

4. Доказать, что функция $y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ интегрируема на $[-1;1]$.

5. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=\int\limits_0^{x^2}(t-1)(t-2)e^{-t^2}dt.$$

6. Оценить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0,5\cos x}$.

7. Доказать, что если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(a+b-x)dx$.

8. Доказать, что для непрерывной на $[-\ell,\ell]$ функции $f(x)$ имеем:

1) $\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 2\int\limits_0^{\ell} f(x)dx$, если $y=f(x)$ четна, и

2) $\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 0$, если $y=f(x)$ нечетна. Дать геометрическую интерпретацию этих фактов.

9. Доказать, что если $y=f(x)$ - непрерывная периодическая функция с областью определения $D(f)=(-\infty,+\infty)$, имеющая периодом число T, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx=\int\limits_0^T f(x)dx$, где a - любое число.

10. Объяснить, почему формальная замена $tg\,x=t$ в интеграле $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$ приводит к неверным результатам.

Указание: проверить справедливость условий теоремы о замене переменной в определенном интеграле.

Вариант I

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^{12}}$,

б) $\int \ln(1+9x^2)\,dx$,

в) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}\,dx$,

г) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx$,

д) $\int \frac{dx}{2\cos x+9\sin x+2}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx$,

б) $\int\limits_{0}^{16} \sqrt{256-x^2}\,dx$,

в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$,

б) $\rho = 6\cos 3\varphi$,

в) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=2$. $(x \geq 2)$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$,

б) $\begin{cases} x = 5(t-\sin t) \\ y = 5(1-\cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi$,

в) $\rho = 3e^{3\varphi/4}$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2+5x-6, \quad y=0.$$

6. Вычислить работу, которую надо совершить, чтобы насыпать кучу песка (удельный вес γ) в форме правильной треугольной пирамиды (сторона основания a, высота h). Песок поднимают с поверхности земли, на которой находится основание пирамиды.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_2^3 \frac{x-3}{\sqrt{x-2}}\,dx.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Вариант 2

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$,

б) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$,

в) $\int \frac{(x^3-6x^2+13x-6)\,dx}{(x+2)^3(x+1)}$,

г) $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}\,dx$,

д) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 9\sin^2 x + 2}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x+1)^2}$,

б) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$,

в) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $(y-1)^2 = x^3$, $x=1$,

б) $\rho = 2(1+\cos\varphi)$;

в) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=2$ $(y \geq 2)$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y^2 = x^3$, $x = 4/3$,

б) $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2$,

в) $\rho = 2e^{\frac{4}{3}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y = -x^2+3x-2$, $y=0$.

6. Вычислить работу, которую надо совершить, чтобы насыпать кучу песка (удельный вес γ) в форме конуса (радиус основания a , высота h). Песок поднимают с поверхности земли, на которой покоится основание конуса.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\ln^k(x-1)}, \quad k \in N.$$

Вариант 3

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$,

б) $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$,

в) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}dx$,

г) $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$.

д) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{4\,\mathrm{arctg}\,x - x}{1+x^2}\,dx$,

б) $\int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$,

в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$, $a>0$, $b>0$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x = 2-y^2$; $y^2 = x^3$,

б) $\rho = 4\cos 2\varphi$,

в) $\begin{cases} x = 4(t-\sin t) \\ y = 4(1-\cos t), \end{cases}$ $y=4$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y^2 = 2x^3$, лежащей внутри кривой $x^2+y^2=20$,

б) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$, в) $\rho = \sqrt{2}\, e^{\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2x - x^2,\ y = 0.$$

6. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать воду из конического сосуда высоты h и радиуса основания r, обращенного вершиной вниз.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{1+x^5}.$$

Вариант 4

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x\,dx}{x^4+x^2+1}$,

б) $\int e^{2x}(3-4x)\,dx$,

в) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}\,dx$,

г) $\int \frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+2)}\,dx$,

д) $\int \frac{dx}{5+\sin x}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+4}$,

б) $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$,

в) $\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \frac{\cos x\,dx}{1-\cos x-\sin x}$

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$;

б) $\rho = 4\sin 3\varphi$;

в) $\begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2$ $(x \ge 2)$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $3y^2 = x(x-1)^2$, заключенной между точками пересечения ее с осью OX;

б) $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$,

в) $\rho = 5e^{\frac{5}{12}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{12}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi.$$

6. Котел имеет форму параболоида вращения. Глубина котла h, радиус основания r. Определить работу, которую нужно совершить, чтобы выкачать воду из такого котла.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^k x}, \quad k \in N.$$

Вариант 5

I. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx$,

б) $\int x\cos^2 x\,dx$,

в) $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}\,dx$,

г) $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx$,

д) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx$,

б) $\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$,

в) $\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$,

б) $\rho = 3+2\sin\varphi$,

в) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=6\sin t, \end{cases}$ $y=3$ $(y\geq 3)$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $x^2=(y+1)^3$, отсеченной прямой $y=4$,

б) $y=-\ln\cos x$, $0\leq x\leq \frac{\pi}{6}$,

в) $\rho = 6e^{\frac{12}{5}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$x=\sqrt[3]{y-2}$, $x=1$, $y=1$.

6. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать воду из конического сосуда, высота которого h, а радиус основания r, если конус обращен вершиной вверх.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Вариант 6

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

б) $\int(4-3x)e^{-3x}dx$,

в) $\int\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx$,

г) $\int\frac{2x^3+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$

д) $\int\frac{dx}{3\cos^2 x+\sin^2 x+1}$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + \sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx$, в) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

б) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x^2-y^2=1$, $x=2$;

б) $\rho = 2\sin 5\varphi$;

в) $\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 2(1-\cos t), \end{cases}$ $y=3$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x=-1$,

б) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$;

в) $\rho = 3e^{3/4\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y=2x-x^2$, $y=-x+2$, $x=0$.

6. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость с удельным весом γ из полусферического сосуда радиуса R.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}} dx.$$

Вариант 7

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \operatorname{tg} x \ln\cos x\, dx$,

б) $\int e^{-2x}(4x-3)\, dx$,

в) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}\, dx$,

г) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\, dx$,

д) $\int \frac{dx}{5+\cos x-\sin x}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\, dx$,

б) $\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$,

в) $\int_{2\operatorname{arctg} 3}^{2\operatorname{arctg} 4} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y^2 = x(x+1)^2$ (площадь, ограниченную петлей);

б) $\begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 6\sqrt{3}$ $(x \geq 6\sqrt{3})$,

в) $\rho = 4(1-\cos\varphi)$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = e^x + 6$, $x = \ln\sqrt{8}$, $x = \ln\sqrt{15}$,

б) $x = 3(t-\sin t)$, $y = 3(1-\cos t)$, $0 \leq t \leq 2$,

в) $\rho = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y = \sin^2 x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

6. За какое время жидкость, заполняющая полусферическую чашу радиуса R, вытечет из отверстия на дне площадью S?

7. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{5/3} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}.$$

Вариант 8

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{(1-\cos x)dx}{(x-\sin x)^2}$,

б) $\int (1-6x)e^{2x}dx$,

в) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx$,

г) $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx$,

д) $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x+1}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^4 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{x}+2)^2}dx$;

б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$,

в) $\int_{\operatorname{arctg}\sqrt{5}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $7x^2-9y+9=0$, $5x^2-9y+27=0$.

б) $\begin{cases} x=6\cos t \\ y=2\sin t, \end{cases}$ $y=\sqrt{3}$, $y\geq\sqrt{3}$.

в) $\rho=2+\sin\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой $x=4$.

б) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}\cos 2t \\ y=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$ $\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{2}{3}\pi$.

в) $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi}$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y=x^3$, $x=1$, $y=0$.

6. Вычислить силу, с которой вода давит на прямоугольную пластинку высоты a, ширины b, вертикально погруженную в воду так, что верхняя сторона пластинки находится на глубине h параллельно поверхности воды.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{1+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3+6}}\,dx.$$

Вариант 9

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}\,dx$,

б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx$,

в) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}\,dx$,

г) $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}\,dx$,

д) $\int \frac{dx}{3\sin x+5}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1}$,

б) $\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{(2-x^2)^{3/2}}$,

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$,

б) $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$, $y=3$,

в) $\rho=6\sin 2\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\frac{x-3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$, $0\le x\le 3$, $a>0$, б) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$,

в) $\rho = 5e^{5/12\,\varphi}$, $\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

6. Два электрических заряда q_1 и q_2 находятся на расстоянии a друг от друга. Сначала оба заряда закреплены неподвижно; затем заряд q_2 освобождается. Тогда под действием силы отталкивания заряд q_2 начинает перемещаться. Какую работу должна совершить сила отталкивания, чтобы заряды оказались на расстоянии $2a$? Разделяющей средой служит воздух.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_2^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{x}\right) dx.$$

Вариант I0

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}$,

б) $\int x \sin^2 x \, dx$,

в) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx$,

г) $\int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)} dx$,

д) $\int \frac{dx}{4\cos x + 4\sin x - 1}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}} dx$,

б) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$,

в) $\int_{2\,\mathrm{arctg}\,2}^{2\,\mathrm{arctg}\,3} \frac{dx}{3\sin x - 5\cos x - 5}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = \arccos x$, $x = 0$, $y = 0$,

б) $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $\quad x = 4 \quad (x \geq 4),$

в) $\rho = 3 + 2\cos\varphi.$

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $9y^2 = x(x-3)^2,$ заключенной между ее точками пересечения с осью ОХ,

б) $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$

в) $\rho = 12 e^{\frac{12}{5}\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2, \; y^2 - x = 0.$

6. Какую работу по преодолению силы тяжести надо совершить, чтобы выкопать яму цилиндрической формы глубины H, радиуса R (удельный вес земли γ)?

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{(1-x)^{2/3}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} \ln\sqrt{x}\,dx.$$

Вариант II

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{(\sin x - \cos x)\,dx}{(\cos x + \sin x)^5},$

б) $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx,$

в) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3}\,dx,$

г) $\int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\,dx,$

д) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x - 5}.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx,$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2 + 3\cos^2 x}.$

б) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$,

б) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t \\ y=3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=3$ $(y\geq 3)$,

в) $\rho=6\cos 5\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=-x^2+2$, $y\geq 0$,

б) $\begin{cases} x=6\cos^3 t \\ y=6\sin^3 t \end{cases}$, $0\leq t\leq \frac{\pi}{3}$,

в) $\rho=1-\sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\leq \varphi\leq -\frac{\pi}{6}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=-2-x^2$, $x=4$, $x=1$, $x=\sqrt{y-2}$.

6. Стержень длины ℓ, массы M притягивает точку массы m, которая лежит на его продолжении на расстоянии a от ближайшего конца стержня. Найти силу взаимодействия стержня и точки.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Вариант I2

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$,

б) $\int (5x+6)\cos 2x\,dx$,

в) $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}\,dx$,

г) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}\,dx$,

д) $\int \frac{dx}{3\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+2}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx$, в) $\int\limits_{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{(1-\cos x)^3}$.

б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x = 4 - y^2, \quad x = y^2 - 2y$,

б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 9 \quad (y \geq 9)$,

в) $\rho = 2 - \sin\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = 1 - x^2, \quad y = x^2$,

б) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad +\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$,

в) $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$, $\quad -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, \; y = 1, \; x = 2$.

6. С какой силой полукольцо радиуса r и массы M действует на материальную точку массы m, находящуюся в его центре?

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

Вариант I3

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx$, г) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} dx$, б) $\int (5x-2)e^{3x}dx$,

в) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}dx$,

д) $\int \frac{dx}{7\cos x+5\sin x-3}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx$,

б) $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$,

в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\operatorname{arctg} x$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$,

б) $\begin{cases} x=32\cos^3 t \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x=4$ $(x\geq 4)$,

в) $\rho=4\cos 4\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=2\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right)$, $0\leq x\leq 4$,

б) $\begin{cases} x=2{,}5(t-\sin t) \\ y=2{,}5(1-\cos t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2}\leq t\leq \pi$,

в) $\rho=3(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6}\leq\varphi\leq 0$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$.

6. С какой силой проволочное кольцо радиуса R и массы M действует на материальную точку массы m, лежащую на прямой, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости. Расстояние от точки до центра кольца равно a.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^3 \frac{2x\,dx}{(x^2-1)^{2/3}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}dx.$$

Вариант 14

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$, г) $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx$,

б) $\int (4x+7)\cos 3x\,dx$, д) $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\sin^2 x-3}$. (–)

в) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}\,dx$,

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$, в) $\int\limits_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$. (–)

б) $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=9$, $y=4$,

б) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=8\sin t, \end{cases}$ $y=4$ $(y\geq 4)$.

в) $\rho = 4\cos^2 2\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=e^x+13$, $\ln\sqrt{15}\leq x\leq \ln\sqrt{24}$. (–)

б) $\begin{cases} x=3{,}5\,(2\cos t-\cos 2t) \\ y=3{,}5\,(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$, (–)

в) $\rho=4(1-\sin\varphi)$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2,\quad y=\sqrt{x}.$$

6. Стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня с угловой скоростью ω. Поперечное сечение стержня имеет площадь S, длина стержня l, плотность материала, из которого он изготовлен, γ. Найти кинетическую энергию стержня.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} . \quad (-)$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}} . \quad (-)$$

Вариант I5

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2} dx,$

б) $\int \ln(4x^2+1)dx,$

в) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x+1)^3(x-2)} dx,$

г) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx,$

д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x + 4}.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

б) $\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}},$

в) $\int_0^{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} \frac{(1-\sin x)dx}{\cos x(1+\cos x)}.$

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}, \ y = \frac{1}{2x}, \ x = 16,$

б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1-\cos t), \end{cases} \quad y = 6 \ (y \geq 6, \ 0 < x < 2\pi),$

в) $\rho = 2 + \cos\varphi.$

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = 2\sqrt{x}, \ x = 0, \ x = 4,$

б) $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$

в) $\rho = 5(1-\cos\varphi), \ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 0.$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin\frac{\pi x}{2}, \quad y = x^2.$$

6. Треугольная пластинка, основание которой a, а высота h, вращается вокруг своего основания с постоянной угловой скоростью ω. Найти кинетическую энергию пластинки, если толщина ее d, а плотность материала, из которого она изготовлена, γ.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-2x}\cos x\,dx.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$$

Вариант 16

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$,

б) $\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$,

в) $\int\frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}dx$,

г) $\int\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$,

д) $\int\frac{dx}{3\sin x+1}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^3\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$,

б) $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$,

в) $\int_0^{2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}\frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x = 8-y^2$, $x=-2y$,

б) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x=3\sqrt{3}$ $(x \geq 3\sqrt{3})$,

в) $\rho = 3-2\sin\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $a>0$ (астроида),

б) $\begin{cases} x=6(\cos t+t\sin t) \\ y=6(\sin t-t\cos t) \end{cases}$, $0\le t\le\pi$,

в) $\rho=6(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2,\ x=2,\ y=0.$$

6. Пластинка в форме параболического сегмента вращается вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью ω. Основание сегмента a, высота h, толщина пластинки d, плотность материала γ. Найти кинетическую энергию пластинки.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \cos\frac{\pi}{1-x}\,\frac{dx}{(1-x)^2}.$$

Вариант I7

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}$,

б) $\int\ln(x^2+9)dx$,

в) $\int\frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx$,

г) $\int\frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx$,

д) $\int\frac{dx}{5\cos x+2}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$,

б) $\int_0^{4\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$,

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+3\cos x}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = 11 - x^2,\ y = -10x,$

б) $\begin{cases} y = 6\cos t \\ x = 4\sin t, \end{cases}\quad x = 2\sqrt{3}\ (x \geq 2\sqrt{3}),$

в) $\rho = 8\sin^2 2\varphi.$

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3},$ заключенной между точками пересечения с осью OX;

б) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6},$

в) $\rho = 7(1 - \sin\varphi),\quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{x - 1},\ y = 0,\ y = 1,\ x = 0{,}5.$$

6. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h. Найти силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 1}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} x \sin x\, dx.$$

Вариант I8

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2}\, dx,$

б) $\int (2x - 5)\cos 4x\, dx,$

в) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x - 2)(x + 2)^3}\, dx,$

г) $\int \frac{3x^3 + x + 46}{(x - 1)^2(x^2 + 9)}\, dx,$

д) $\int \frac{dx}{2\cos x + 3\sin x + 4}.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$, в) $\int\limits_0^{2\,\mathrm{arctg}\frac{3}{2}} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

б) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=3\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $x=9$,

б) $\begin{cases} x=10(t-\sin t) \\ y=10(1-\cos t), \end{cases}$ $y=15$,

в) $\rho = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\frac{x^2}{2}$, $x=0$, $y=1$,

б) $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t) \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$,

в) $\rho = 6(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y=x^2+1$, $y=2$, $x=0$.

6. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой a, нижнее b, а высота h.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} x\cos x\,dx.$$

Вариант I9

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{8x-\mathrm{arctg}\,2x}{1+4x^2}dx$, г) $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx$, б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx$, д) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg} x + 2\cos^2 x}$.

в) $\int \frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)(x+2)^3}\,dx$,

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, в) $\int\limits_{2\operatorname{arctg}2}^{2\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

б) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^4\,dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x^2+y^2=3$, $3\sqrt{2}\,y=x^2$, $y \geq 0$,

б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=1$ $(x \geq 1)$,

в) $\rho = 4\sin 4\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y^2 = x^3$, $x = 4$,

б) $\begin{cases} x = 4(t-\sin t) \\ y = 4(1-\cos t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$,

в) $\rho = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y^2=x-2$, $y=0$, $y=x^3$, $y=1$.

6. Пластинка, имеющая форму эллипса, наполовину погружена в жидкость (вертикально) так, что одна из осей (длиной $2b$) лежит на поверхности. Как велика сила давления жидкости на каждую из сторон этой пластинки, если длина погруженной полуоси эллипса равна a , а плотность жидкости γ ?

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\sqrt[3]{x^4+1}\right)(x-2)}.$$

Вариант 20

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$,

г) $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx$,

б) $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$,

д) $\int \frac{dx}{\cos^2 x-2\sin^2 x-4}$.

в) $\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}dx$,

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$,

в) $\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3-\sin x}$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ (x\geq 0)$,

б) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=4\ (y\geq 4)$,

в) $\rho=2-\cos\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\ y=1,\ y=2$,

б) $\begin{cases} x=2(2\cos t-\cos 2t) \\ y=2(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\leq t\leq\frac{\pi}{3}$,

в) $\rho=2\varphi,\quad 0\leq\varphi\leq\frac{\varphi}{3}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y = \ln x, \ x = 2, \ y = 0.$

6. В дне цилиндрического сосуда, площадь основания которого S, а высота H, имеется отверстие. Вычислить площадь этого отверстия, если известно, что вода, наполняющая сосуд, вытекает из него в течение времени t.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^2 \frac{x^{11}dx}{2x+x^{13}+1}.$$

Вариант 2I

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$,

б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx$,

в) $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}dx$,

г) $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$,

д) $\int \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$,

б) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$,

в) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x = \sqrt{72-y^2}, \ 6x = y^2, \ y = 0 \ (y \geq 0)$;

б) $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t, \end{cases} \quad y = 1,$

в) $\rho = 2\cos\varphi, \ \rho = 2\sqrt{3}\sin\varphi, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=e^{x}$, $x=0$, $x=1$,

б) $\begin{cases} x=8(\cos t - t\sin t) \\ y=8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{4}$,

в) $\rho=2\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{5}{12}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y=(x-1)^2$, $y=1$.

6. За какое время жидкость вытечет из сосуда, имеющего форму правильной пирамиды, если площадь основания пирамиды S, высота H, площадь малого отверстия в дне сосуда s ?

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Вариант 22

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$,

б) $\int(3x+4)e^{3x}dx$,

в) $\int\frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}dx$,

г) $\int\frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$,

д) $\int\frac{dx}{5+\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1\frac{x^3dx}{(x^2+1)^2}$,

б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$,

в) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\sqrt{24-x^2}$, $x^2=2\sqrt{3}y$, $x=0$ $(x\geq 0)$,

б) $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$ $x=1$ $(x\geq 1)$,

в) $\rho=3+\cos 2\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $x^2+y^2=c^2$, $c>0$;

б) $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\leq t\leq 2\pi$,

в) $\rho=2\varphi$, $0\leq\varphi\leq\frac{12}{5}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y=x^3$, $y=x^2$.

6. Прямолинейный проводник длины ℓ равномерно заряжен положительным электричеством (σ – линейная плотность). На продолжении проводника на расстоянии a от него находится единичный положительный заряд. С какой силой взаимодействуют проводник и заряд? Разделяющей средой служит воздух.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx.$$

Вариант 23

I. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{2+3x^2}{(x^2+1)\cdot x^2}\,dx$,

б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}\,dx$,

в) $\int\frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}\,dx$,

г) $\int\frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}\,dx$,

д) $\int\frac{dx}{5\sin x+8\cos x-2}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg\,x \ln\cos x\,dx$, в) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}$.

б) $\int\limits_0^2 \frac{x^4dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=3\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $x=4$,

б) $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y=2$ $(y\geq 2)$,

в) $\rho = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y^2=4x$, заключенной между точками $(0,0)$, $(\frac{5}{4},\sqrt{5})$,

б) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $\frac{\pi}{6}\leq t\leq\frac{\pi}{4}$,

в) $\rho = 4\varphi$, $0\leq\varphi\leq\frac{3}{4}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y=(x+2)^2$, $y=2$.

6. Шар радиуса R с удельным весом γ погружен в воду так, что он касается поверхности. Какую работу надо совершить, чтобы извлечь шар из воды?

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1}\,dx.$$

Вариант 24

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \ln^2 \sin x}$,

г) $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$,

б) $\int e^{-2x}(4x+5)dx$,

д) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

в) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx$,

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$,

в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

б) $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x^2+y^2=12$, $x\sqrt{6}=y^2$ $(x\geq 0)$,

б) $\begin{cases} x=8(t-\sin t) \\ y=8(1-\cos t), \end{cases}$ $y=12$ $(y\geq 12,\ 0<x<16\pi)$,

в) $\rho = 1+\cos\frac{\varphi}{2}$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$, заключенной между точками $A(0,1)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$,

б) $\begin{cases} x=e^{t}(\cos t+\sin t) \\ y=e^{t}(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\leq t\leq\frac{3}{2}\pi$,

в) $\rho=3\varphi$, $0\leq\varphi\leq\frac{4}{3}$..

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y=(x-1)^3$, $y=1$, $y=0$.

6. За какое время жидкость вытечет из конической воронки, если радиус верхнего основания R, радиус нижнего отверстия r, а высота воронки H ?

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{0,5}^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})\,dx}{e^x-1}.$$

Вариант 25

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{tg(x+1)\,dx}{\cos^2(x+1)}$, г) $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$,

б) $\int \ln(x^2+4)dx$, д) $\int \frac{dx}{3\cos x+5\sin x-1}$.

в) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^2}dx$.

2. Вычислит определенные интегралы:

а) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\,arctg\,2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

б) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$,

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=(x-1)^2$, $y=x^2-2x$,

б) $\begin{cases} x=24\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $x=9\sqrt{3}$ $(x \geq 9\sqrt{3})$,

в) $\rho = 3-\sin 2\varphi$.

4. Вычислить длины дуг кривых:

а) $9y^2=4x^3$, заключенной между точками $O(0,0)$, $A(3,2\sqrt{3})$,

б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

в) $\rho = 5\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y=x,\ y=1-x,\ y=0.$$

6. Вычислить силу, с которой вода давит на прямоугольную пластинку высоты a, ширины b, вертикально погруженную в воду и касающуюся поверхности воды верхней стороной.

7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-1}^{0}\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^3}.$$

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{1-\cos x}.$$

2. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

При нахождении области определения функции требуется знание свойств элементарных функций. Рассмотрим пример для случая функции двух переменных.

Задача I. Найти область определения функции

$$z=\ln\left(x+\sqrt{6-2y}-2\right).$$

Решение. Выражение $\ln(x+\sqrt{6-2y}-2)$ имеет смысл для значения переменных x и y, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x+\sqrt{6-2y}-2>0 \\ 6-2y\geq 0. \end{cases} \qquad (I)$$

Система (I) эквивалентна совокупности следующих трех систем:

$$\begin{cases} 2-x>0 \\ 6-2y>(2-x)^2 \\ 3-y\geq 0, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} 2-x<0 \\ 3-y\geq 0, \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} 2-x=0 \\ 3-y>0. \end{cases} \qquad (4)$$

Область определения функции $z = \ln\left(x + \sqrt{6-2y} - 2\right)$ представляет собой объединение трех множеств точек (x, y), координаты x и y которых удовлетворяют соответственно системам (2), (3) и (4). Для того, чтобы изобразить область определения функции на плоскости, изобразим каждое из указанных трех множеств. Заменим неравенства системы (2) равенствами: $2-x=0$, $6-2y=(2-x)^2$, $y=3$. Изобразим линии, уравнения которых $x=2$, $y-3=-\frac{1}{2}(x-2)^2$, $y=3$. Вершина параболы $y-3=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ находится в точке (2; 3). На рис. I заштриховано множество точек, координаты x, y которых удовлетворяют системе (2) (заметим, что точки границы заштрихованного множества не входят). Аналогично можно изобразить множество точек (x, y), координаты x и y которых удовлетворяют системам (3) или (4).

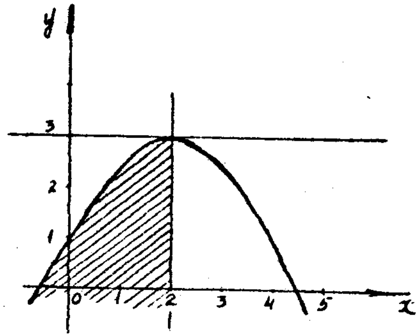


Рис. I

На рис. 2 заштриховано множество точек, являющихся областью определения функции
$z = \ln\left(x + \sqrt{6-2y} - 2\right)$,
причем точки параболы (x, y), для которых $x \le 2$ не входят в область определения (среди них точка (2; 3)).

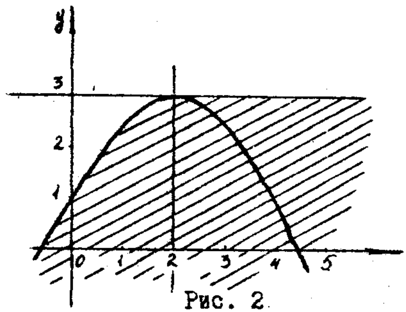


Рис. 2

Продемонстрируем решение задач 8 и 9 из типового расчета, связанных с экстремумами функции двух переменных.

При исследовании функции $z = f(x, y)$ на экстремум исходим от необходимых условий экстремума функции в точке: если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) экстремум, то

$$\begin{cases} z'_x(x_0, y_0) = 0 \\ z'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Обозначим $z''_{xx} = A$, $z''_{xy} = B$, $z''_{yy} = C$, $\Delta = AC - B^2$
и будем использовать следующее достаточное условие экстремума.

1. Если $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то экстремума в этой точке нет.
2. Если $\Delta(x_0, y_0) > 0$ и $A(x_0, y_0) < 0$ или $C(x_0, y_0) < 0$, то (x_0, y_0) –точка максимума;
   если $\Delta(x_0, y_0) > 0$ и $A(x_0, y_0) > 0$ или $C(x_0, y_0) > 0$, то (x_0, y_0) – точка минимума.
3. Если $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

З а д а ч а 2. Исследовать функцию $z = 2x^2 + xy - y^2 + x$ на экстремум.

Р е ш е н и е. Находим точки "подозрительные" на экстремум:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 4x + y + 1 = 0 \\ z'_y &= x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2y \\ 5y + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2y \\ y &= -\tfrac{1}{5} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{2}{5} \\ y &= -\tfrac{1}{5} \end{aligned}\right\}.$$

Вычисляем в точке $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ значение Δ.

$$z''_{xx} = 4, \quad z''_{xy} = 1, \quad z''_{yy} = -2, \quad \Delta = 4(-2) - 1 = -9 < 0$$

во всех точках, следовательно, экстремумов функция не имеет.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении наибольших и наименьших значений функции $z = f(x, y)$ на заданном замкнутом множестве M. Известно, что ограниченное и замкнутое множество на плоскости компактно. Тогда по теореме Вейерштрасса непрерывная функция $z = f(x, y)$, заданная на компактном множестве, достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Во внутренних точках множества M наибольшее и наименьшее значения могут достигаться только в экстремальных точках, следовательно, в этих точках z'_x и z'_y или равны нулю, или не существуют. На границе области во всех предлагаемых случаях функцию $f(x, y)$ можно представить как функцию одного аргумента, меняющуюся на некотором замкнутом отрезке $[a, b]$. Наибольшее и наименьшее значения такой функции достигаются или в точках, где производная равна нулю или не существует, или на концах отрезка.

Итак, получаем следующую схему для решения задачи 9 типового расчета:

1) находим точки $M_1, M_2, \dots M_n$, в которых z'_x и z'_y равны нулю или не существуют;
2) на границе области выражаем функцию z как функцию одной

переменной, изменяющуюся на $[a, b]$. Находим точки $N_1, N_2, \ldots N_k$, в которых производная этой функции равна нулю или не существует;

3) вычисляем значения функции $z_1 = f(M_1)$, $z_2 = f(M_2), \ldots$ для точек $M_1, M_2, \ldots M_n \in M$ и $z^1 = f(N_1)$, $z^2 = f(N_2) \ldots$ для точек $N_1, N_2, \ldots N_k \in [a, b]$, $z(a)$, $z(b)$. Выбираем среди полученных значений наибольшее и наименьшее. Эти числа и будут искомыми.

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4x^2 + 16y^2 + 2x + 1$ на множестве $M = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, -x \le y \le 0\}$.

Решение.

1) Найдем z'_x, z'_y.
$$\begin{cases} z'_x = 8x + 2 = 0 \\ z'_y = 32y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 0. \end{cases}$$

Тогда $(-\frac{1}{4}, 0) \in M$.

Точек, в которых z'_x и z'_y не существуют, нет. Таким образом, наибольшее и наименьшее значения достигаться внутри области M не могут.

2) Рассмотрим участок границы $\begin{cases} y = 0 \\ x \in [0, 2] \end{cases}$. На этом участке
$$z = 4x^2 + 2x + 1, \quad z'_x = 8x + 2 = 0, \quad x = -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{4} \notin [0, 2].$$

Так как z'_x существует при всех $x \in]-\infty, +\infty[$, а точка $-\frac{1}{4} \notin [0, 2]$, то внутри этого отрезка границы наибольшее и наименьшее значения функции не достигаются. Они могут достигаться лишь в точках (0; 0) и (2; 0).

Рассмотрим участок границы $\begin{cases} x = 2 \\ y \in [-2, 0] \end{cases}$.
$$z = 16 + 16y^2 + 4 + 1 = 21 + 16y^2, \quad z'_y = 32y = 0, \quad y = 0.$$

Производная z'_y существует при всех $y \in]-\infty, \infty[$, следовательно, точками, в которых могут достигаться наибольшее и наименьшие значения на этой части границы являются точки (2; 0) и (2; -2).

На участке границы $\begin{cases} y = -x \\ x \in [0, 2] \end{cases}$
$$z = 4x^2 + 16x^2 + 2x + 1 = 20x^2 + 2x + 1, \quad z'_x = 40x + 2 = 0,$$

$x = -\frac{1}{20} \notin [0,2]$, $\quad z'_x$ существует при всех $x \in]-\infty, +\infty[$. Точки, соответствующие концам промежутка изменения $x \in [0,2]$, есть (0; 0) и (2; -2).

Итак, наибольшее и наименьшее значения могут достигаться лишь в одной из точек (0; 0), (2; -2), (2; 0). Вычислим значения функции в каждой из этих точек и выберем наибольшее и наименьшее из них. Так как $z(0,0) = 1$, $z(2,0) = 16+4+1=21$, $z(2,-2) = 16+64+4+1=85$, то $z = 1$ – наименьшее, $z = 85$ – наибольшее значения данной функции.

Для работы над типовым расчетом рекомендуем пользоваться следующими учебными пособиями.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.I. – М.: Наука, 1978.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.I. – М.: Наука, 1970.
4. Виленкин Н.Я. Задачник по курсу математического анализа. Часть II. – М.: Просвещение, 1971.

Теоретические вопросы

1. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
2. Частные производные функции нескольких переменных. Геометрический смысл частной производной.
3. Полное приращение и полный дифференциал функции двух переменных.
4. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.
5. Производная сложной функции.
6. Производная от функции, заданной неявно.
7. Производная по направлению. Градиент.
8. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой.
9. Касательная плоскость и нормальная прямая к поверхности.
10. Экстремумы функции двух переменных.

Теоретические упражнения

1. Показать, что функция $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

является непрерывной в точке $(0;\,0)$ по каждой переменной x и y в отдельности и не является непрерывной в точке $(0;\,0)$ по совокупности переменных.

2. Доказать, что если $F(x,y,z)=0$ и функция F дифференцируема, то $\frac{\partial y}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial y}=-1$.
Можно ли символ "$\frac{\partial y}{\partial x}$" понимать как частное от деления величин ∂y и ∂x ?

Указание: найти производные $\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$ по правилу дифференцирования неявно заданной функции.

3. Найти $f(x,y)$, если $f(x+2y,\,x-2y)=xy$.
Указание: ввести новые переменные $u=x+2y$, $v=x-2y$.

4. Установить, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } xy=0\\ 1, & \text{если } xy\neq 0\end{cases}$$

имеет в точке $M(0,0)$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_M=\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_M=0$, но не дифференцируема в точке по совокупности переменных.

5. Показать, что для функции

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{при } x=y=0\end{cases}$$

в точке $M(0,0)$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_M\neq\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\Big|_M$.

6. Найти все производные второго порядка функции $\int\limits_x^{x^2+y^2} e^t\,dt$ в точке $M(1,2)$.

7. Показать, что функция $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$, где $a\in R$, $x_0\in R$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

8. Показать, что функция $u=A\sin\lambda x\cos\lambda a t$, где $a\in R$, $\lambda\in R$ удовлетворяет уравнению колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

9. Почему нельзя определить касательную плоскость к поверхности по аналогии с определением касательной к кривой как предельное положение плоскости, проходящей через единую точку и две другие точки, достаточно близкие к данной?

10. Функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Имеет ли поверхность $z=f(x,y)$ касательную плоскость в точке (x_0,y_0,z_0)?

Вариант I

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции
$$z=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x-2y}.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=e^{x^2+3y^5}$, где $x=\sin 2t,\ y=t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно $x^2+z^2-2y^2-5x^z+10z^3-5=0.$

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции
$$z=\sin^2(2x+y).$$

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^y$ в точке (I,04; 2,05).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии
$x=t,\ y=t^2,\ z=1-\frac{t}{2}$ в точке $(2;\ 4;\ 0)$.

8. Исследовать на экстремум функцию
$$z=2xy-6x^2-y^2+4y.$$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=(x-2)^2+2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1.$

Вариант 2

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\ln x+\ln(y^2-4x).$

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=3z^2+zy^5+y^3$, где $z=\sin t,\ y=e^{2t^2}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $x^y-5xyz=20x^z.$

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции

$z = \cos^2(3x + 5y)$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (4,05; 2,95).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = \sin t$, $y = 2\cos t$, $z = 4t$ в точке (0, 2, 0).

8. Исследовать на экстремум функцию

$z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$.

Вариант 3

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \sqrt{x - 2\sqrt{y}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln \arcsin(x - y)$, где $x = 3t^2$, $y = \frac{1}{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно

$z^3 + 5 \cdot yz = a^3$, $a = const$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции

$z = tg(x + 7y)$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ в точке (I,98; I,02).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ в точке (I; 0; I).

8. Исследовать на экстремум функцию

$z = 2x^2 + 4y^2 + y - xy$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + 4xy - 2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Вариант 4

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 - \frac{1}{2}y^2}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = 5x^3 + 4x^2 - y$, где $x = \cos t, y = e^{2t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $e^z - xyz = 3x^4$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = e^{xy}$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = x^{y+1}$ в точке (0,98; 2,02).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ в точке (2; 0; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + 3y - xy + 4$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$.

Вариант 5

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \ln(y^2 - 4x + 8)^{-1}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1} - 1}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \cos(x^2 + 5y)$, где $x = e^{3t}$, $y = \sin 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $\sin(xyz) - x^2y + z = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = x\sin^2 y$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное

значение функции $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$
в точке (I,03; 0,98).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=\ln\cos t$
в точке $(a;0;0)$.

8. Исследовать на экстремум функцию
$z=x^2-2y^2+4xy+4y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=3$.

Вариант 6

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arccos\frac{x^2+y^2}{9}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\sin(2x^3+y^3)$, где $x=\ln 2t$, $y=t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно
$\cos(x^2yz)+xy+5z=0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции
$z=y\cos^2 x$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^3y^4+1$ в точке (2,02; 0,97).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=\sqrt{t}$, $y=t^3$, $z=\ln t$
в точке (I; I; 0).

8. Исследовать на экстремум функцию
$z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$z=2x^3-xy$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $y=2x$, $y=x$, $x=1$.

Вариант 7

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+2xy)^{\frac{5}{xy}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\ln(e^x+e^y)$, где $x=t^5$, $y=\cos 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $(x^2+y^2+z^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции

$$z=\sin^2(x-y).$$

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y})$ в точке (0; 3; 5).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, $z=5$ в точке (0; 3; 5).

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z=3x^2+y^2+3x-4y+1.$$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3\ln x+xy^2-y^3$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $y=0$, $y=2$, $x=1$, $x=3$.

Вариант 8

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$z=\sqrt{\ln\frac{9}{x^2+y^2}}.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{dy}{dt}$, если $u=\ln(e^t+e^x)$, где $x=t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $zxe^y+z^2xy=0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции

$z = \ln(x^2 - y^2)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \ln(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})$ в точке (4,02; I,03).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z = 3x^2 + 4xy - y^2$ в точке (0; I; -I).

8. Исследовать на экстремум функцию

$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0,\ x = -2,\ y = 2,\ y = -2$.

Вариант 9

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$z = \arcsin\frac{x}{5} + \sqrt{xy}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x,\ k = const$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln \operatorname{arctg}(x)$ где $x = e^t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции

$ye^{zx} + 2z^3x^2y = 0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции

$z = \ln(xy)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \ln(\sqrt[3]{x} - \sqrt{y})$ в точке (8,03; I,02).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z^2 = 2x^2 + 3y^2$ в точке (I;-I;5).

8. Исследовать на экстремум функцию

$z = (x-1)^2 - 2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 3,\ y = 0,\ y = x$.

Вариант 10

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\sqrt{y\sin x}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\arcsin(5t^3+x)$, где $x=\sqrt{t^2+1}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $x^2e^{zy}+xyz=3$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\operatorname{arctg}(xy)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^{2y}$ в точке (1,02; 2,02).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2-2y^2-z^2=3$ в точке (-2; 0; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=(x-1)^2+2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x^2+18xy+18y-8x+8$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=2,\ y=x^2,\ y=0$.

Вариант 11

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4-2y^4}{3x^4+y^4}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\operatorname{tg}(3t^2+4x^3-y)$, где $x=\frac{1}{t}, y=\sqrt{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z\sin(x^2y)+xyz=5$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции

$z=(x-y)e^{xy}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\sqrt{2x+y^2}$ в точке (8,0I; 3,03).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2-y^2-5z=0$ в точке (0;5;-5).

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z=3x^2+18xy+18y-8x+8.$$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=(x-1)^2+2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $(x-1)^2+y^2=1$.

Вариант I2

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arcsin\frac{y}{x}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{xy}}{\sqrt{x}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\frac{e^{at}(y-z)}{a^2}$, где $y=a\sin t,\ z=a\cos t,\ a=const.$

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $e^{xyz}+\sin(xy)+zx=0.$

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции

$$z=y\ln\frac{x}{y}.$$

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^3y^2$ в точке (I,02; 0,98).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z^2+x^2=5$ в точке (-I; 6; 2).

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z=7x^2-6xy+3y^2-4x+7y-12.$$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=(x-1)^2-2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $(x-1)^2+y^2=1.$

Вариант I3

I. Найти и изобразить на плоскости область опеределения функции $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + x^2 y^2}}{x^2 + y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \sin(t^3 + 5x^2 + y)$, где $x = e^t$, $y = 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $e^{zx} - \cos(2xz) + y^2 = 0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции
$z = \operatorname{arctg}(x + 2y)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x, y) = x^5 y^4$ в точке (I,03; 0,99).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ в точке $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию
$z = xy - 3x^2 - y^2 + x - 12$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Вариант I4

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right)^{-1/2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta y}$, $\alpha = const$, $\beta = const$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln \sin(xy)$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции
$e^{zy} + 2\sin(x^2 y) + z = 0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции
$z = \arcsin(xy)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x, y) = x^2 \sqrt{21 + y^2}$ в точке (2,03; 2,0I).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z + 2x - 3y + 4 = 0$ в точке (I;4;6).

8. Исследовать на экстремум функцию

$z = 6 - 3x^2 - 4y^2 + x - y.$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x^2 + y^2 - 4y + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{3} = \frac{1}{3}$.

Вариант I5

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin (1-y).$

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{1+x+y} - 1}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln\cos(xy)$, где $x = \sqrt[5]{t^3}$, $y = e^t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции

$x^y + zx - yz = 0.$

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции

$z = \sin (xy).$

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \ln(x^3 + y^2)$ в точке (0,04; I,04).

7. Найти градиент функции $z = \sin^2 3x + e^{-y}$ в точке $(\frac{\pi}{6}; 2)$.

8. Исследовать на экстремум функцию

$z = 3\ln x + xy^2 - y^3.$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 4y = 0$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0,\ y = 0,\ y + 2x = 2.$

Вариант I6

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \arccos \frac{x}{x^2+y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{2^{\frac{1}{m}} + 1}{2^{\frac{1}{n}} + 1}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = e^{x^2+3y^4+t}$, где $x = \sin t$, $y = 2t+5$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z\ln(x+z) - \frac{xy}{3} = 0$

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = 3x^2+5xy+4y^2$ в точке (I,04; I,94).

7. Найти градиент функции $z = \ln\sqrt{x-y}$ в точке (2; I).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x - x^2 + 3y - 4y^2 + 234$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2+4y^2+4y+1$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $x^2+4y^2=1$.

Вариант I7

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+x}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{(x^2-1)(xy+1)}{x^3y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \operatorname{arctg}(3x^2+5\sqrt{y})$, где $x = e^{2t}$, $y = 3t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z^2\ln(y+z) - \frac{xz}{2} = 1$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = 2x^3+3yx^2+y^2$ в точке (I,02; I,05).

7. Найти градиент функции $z = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}$ в точке (2; I).

8. Исследовать на экстремум функцию

$z = yx - 2x^2 + 6y - y^2 + 394.$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + 3y - xy + 4$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0,\ y=0;\ y=x+1.$

Вариант I8

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \operatorname{arctg}\sqrt{e^{-xy}-1}.$

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x^2y^3-\sqrt{x}}{y\sqrt{x}-1}.$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \arcsin(5x+3y^2)$, где $x = 2t^4+1,\ y = \frac{1}{t}.$

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $xz - e^{z/y} + x^3 + y^3 = 0.$

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции $z = \sqrt{x^2+2y}.$

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = x^4 + 2yx^2 + y^4$ в точке (I,0I; I,97).

7. Найти градиент функции $z = \sqrt{\dfrac{z-y}{\sin 3x}}$ в точке $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 8x - 6x^2 + 12y - y^2 + 343.$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 9x^2 + 4y^2 + y - 3$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $9x^2 + 4y^2 = 1.$

Вариант I9

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \ln(-x) + \sqrt[3]{\sin xy}.$

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2\arcsin(x^2+y^2)}{x+y}.$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \operatorname{arctg}(t x y)$, где $x = e^t$, $y = \sqrt{2t+1}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции
$yz - e^{x/y} + z^2 + x^3 + 4y^3 = 0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции
$z = (x^2 + y^2)^{-1/2}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ в точке (I,02; I,97).

7. Найти градиент функции $z = \ln(y^2 - \sqrt{x})$ в точке (I; 2).

8. Исследовать на экстремум функцию
$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

Вариант 20

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = x + 2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\sin(xy)}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \operatorname{tg}(t + 3x^4 + y)$, где $x = \ln t$, $y = e^{2t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции
$xyz - e^{x/5} + x^2 + y^2 = 0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции
$z = x \ln \frac{y}{x}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^3}$ в точке (I,02; I,98).

7. Найти градиент функции $z = \cos^3(2y - x)$ в точке $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-2)^2 + 2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2-4x^2-y^2+4y$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $4x^2+y^2=1$.

Вариант 21

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\ln(5x^2+9y^2-30x+9)$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{xy+\sin x}{xy+\sin y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\operatorname{ctg}(tx-2y^3)$, где $x=\sqrt{t+1}$, $y=\ln(2t)$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z^3\ln(x+y)-\dfrac{x^2y}{3}=10$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции $z=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y}$ в точке (2,025;117,15).

7. Найти градиент функции $z=\arcsin(\ln(1-x)+\sqrt{y})$ в точке $(0;\frac{3}{4})$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=x^4+4xy-2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy-3x^2+x+1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=1$, $y=0$, $y=2$, $xy=1$.

Вариант 22

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=x^2y\sqrt[4]{x^2+y^2+y}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos xy}{x^2+y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\frac{1}{5}e^{2t^2}(x^3-y)$, где $x=\sqrt{t+1}$, $y=t^2+1$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $x^2 \ln(yz) + \frac{y}{z} - 1 = 0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции $z = (x+y)e^{xy}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \sqrt{12+x^2}\,y^3$ в точке (2,02; 2,98).

7. Найти производную функции $z = 3\cos^2 3x + \ln(1-y)$ в точке (0; 0) в направлении биссектрисы первого координатного угла.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 6 - 3x^2 + x - y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0,\ y = 2,\ x = y$.

Вариант 23

I. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \sqrt{x + \sqrt{6-2y} - 2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \frac{(m^2 + 3n + 4)n}{m^2(2n^3 + 1 - n)}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $x = e^t,\ y = \sin t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $\operatorname{arctg}(x-y) - zy + x = 0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции $z = \operatorname{arctg}(3x-y)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = x^2\sqrt{13+y}$ в точке (3,02;3,03).

7. Найти производную функции $z = e^{-x^2}(1-3y)$ в точке (I; I) в направлении вектора $\bar{a} = \{I; -3\}$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 9x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 10 - x^2 + 6y - 4y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $x^2 + 4y^2 = 1$.

Вариант 24

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \ln(3 - 4\sqrt{x-1} - y)$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (1+xy)^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \arcsin(ty)$, где $y = t^{-1/2}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $\operatorname{arctg}(2x-3y) + xyz = 8$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции $z = e^y \sin x$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = y\sqrt{7+x^2}$ в точке (3,02; 0,04).

7. Найти производную функции $z = \operatorname{tg}(2\sqrt{x} - 3y)$ в точке (4; I) в направлении вектора $\vec{i} = \{I; 0\}$.

8. Исследовать на экстремум функцию
$$z = e^{x/2}(x+y^2).$$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4x - 2x^2 + 6y - y^2 + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 1$, $y = x$, $y = 2x$.

Вариант 25

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \arccos\frac{x^2}{y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(x+y)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \arcsin(5\sqrt{x} + 2y)$, где $x = e^t$, $y = \sqrt{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $\operatorname{arctg}(x+z) - xy + 5 = 0$.

5. Найти дифференциалы I-го и 2-го порядков функции $z = e^x \sin y$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ в точке (I,04;0,04).

7. Найти производную функции $z=\frac{3x^3-4y}{x+y}$ в точке (I; I) в направлении вектора $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^3-xy$.

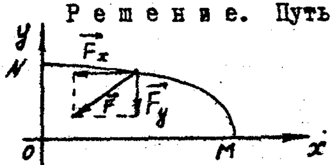
9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=8x-2x^2+12y-y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $2(x-2)^2+(y-6)^2=1$.

3. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Продемонстрируем решение некоторых задач типового расчета, связанных с приложениями кратных и криволинейных интегралов.

Задача I. Найти работу упругой силы $\vec{F}$, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащую в первом квадранте.

Решение. Путь интегрирования $L:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



от $M(a,0)$ до $N(0,b)$.

По условию $|\vec{F}|=k\sqrt{x^2+y^2}$.

Очевидно, $\vec{F}=kx\vec{i}+ky\vec{j}$.

Тогда работа силы может быть найдена по формуле $A=\int\limits_L F_x\,dx+F_y\,dy=\int\limits_L kx\,dx+ky\,dy=$

$=k\int\limits_L x\,dx+y\,dy.$

Уравнение эллипса в параметрической форме

$$\begin{cases} x=a\cos t\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

Точке M соответствует $t=0$, N — $t=\frac{\pi}{2}$.

$$A=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\cos t\,(a\cos t)'+b\sin t\,(b\sin t)']\,dt=$$

$$=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-a^2\cos t\sin t+b^2\cos t\sin t)\,dt=\frac{k(b^2-a^2)}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=$$

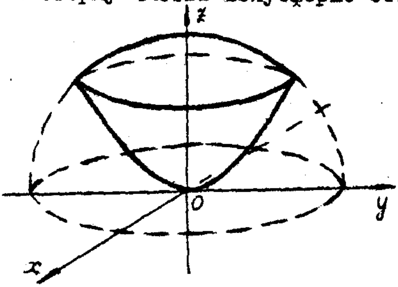
$$=\frac{k(b^2-a^2)}{2}\,\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{k(a^2-b^2)}{2}.$$

Задача 2. Вычислить массу тела, ограниченного параболоидом $x^2+y^2=2az$ и полусферой $x^2+y^2+z^2=3a^2$, $z>0$, $(a>0)$, если плотность в каждой точке $\mu(x,y,z)=5z$.

Решение. Масса тела M определяется по формуле

$$M=\iiint\limits_{(V)}\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V)}5z\,dx\,dy\,dz,$$

где V $^{(V)}$ – область 3 – мерного пространства, определяемая данным телом. Оно ограничено снизу параболоидом $x^2+y^2=2az$ и сверху частью полусферы. Эти поверхности пересекаются по



окружности

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3a^2\\ x^2+y^2=2az\end{cases},$$

лежащей в плоскости,

$$\begin{cases}z^2+2az-3a^2=0\\ z>0,\end{cases}$$

т.е. $z=a$.

Следовательно, уравнение этой окружности

$$\begin{cases}z=a\\ x^2+y^2=2a^2.\end{cases}$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z.\end{cases}$$

Тогда уравнение параболы $z=\frac{1}{2a}r^2$, полусферы $z=\sqrt{3a^2-r^2}$, при этом $\varphi\in[0,2\pi]$, $r\in[0,a\sqrt{2}]$ и в подынтегральной функции появляется множитель r (якобиан).

$$M=\iiint\limits_{(V)}5z\,dx\,dy\,dz=5\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sqrt{2}}r\,dr\int_{\frac{1}{2a}r^2}^{\sqrt{3a^2-r^2}}z\,dz=$$

$$=5\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sqrt{2}}r\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2a}r^2}^{\sqrt{3a^2-r^2}}dr=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sqrt{2}}r\left(3a^2-r^2-\frac{r^4}{4a^2}\right)dr=$$

$$= \frac{5}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \left(3a^2 r - r^3 - \frac{r^5}{4a^2}\right) dr =$$

$$= 5\pi \left(3a^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{24a^2}\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{2}} =$$

$$= 5\pi\left(3a^4 - a^4 - \frac{a^4 2^3}{24}\right) = \frac{25}{3}\pi a^4.$$

При выполнении типового расчета рекомендуем пользоваться следующими учебными пособиями:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. – М.: Наука, 1981.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. II. – М.: Наука, 1978.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.3. – М.: Наука, 1969.
4. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике, часть IУ. – Харьков: ХГУ, 1972.

Теоретические вопросы

1. Определение двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.
2. Основные свойства двойных и тройных интегралов.
3. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.
4. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).
5. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).
6. Замена переменных в двойном интеграле.
7. Якобиан, его геометрический смысл.
8. Двойной интеграл в полярных координатах.
9. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
10. Тройной интеграл в сферических координатах.

11. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги кривой), его основные свойства.
12. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.
13. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам), его основные свойства.
14. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.
15. Формула Грина.
16. Интеграл по площади поверхности, его основные свойства.
17. Вычисление интеграла по площади поверхности.

Теоретические упражнения

I. 1. С помощью теоремы о среднем найти

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

где $f(x,y)$ – непрерывная функция.

2. Оценить интеграл

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \quad (x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2),$$

т.е. указать, между какими значениями заключена его величина.

3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$, если область D – прямоугольник $\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, а функция $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$.

4. Доказать равенство

$$\iint\limits_{(D)} f(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy = \int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_c^d \varphi(y)\,dy,$$

если область D – прямоугольник $\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$.

5. Доказать формулу Дирихле

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)\,dx, \quad (a>0).$$

6. Пользуясь формулой Дирихле, доказать равенство

$$\int_0^a dy\int_0^y f(x)\,dx=\int_0^a (a-x)f(x)\,dx.$$

7. Какой из интегралов больше: $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)\,dz$ или $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz$, если $f(x,y,z)>0$?

8. Доказать, что $\oint\limits_{\Gamma} x\,dy-y\,dx=2\int_a^b f(x)\,dx$, где Γ – контур криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $y=f(x)>0$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$.

9. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} [f(y)e^x-my]\,dx+[f'(y)e^x-m]\,dy,$$

где $f'(y)$ – непрерывная функция; Γ – кусочно-гладкая кривая, ограничивающая область, площадь которой равна S, m – постоянная.

Вариант I

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)} (12x^2y^2+16x^3y^3)\,dx\,dy, \quad D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} x\,dx\,dy\,dz, \quad V:\ y=10x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0.$$

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл: $\int_{0}^{2} dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dy.$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=1,\ x+y+z=3,\ z=0.$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=2y,\ z=\frac{5}{4}-x^2,\ z=0.$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $\vec{F}=(x^2-2y)\vec{i}+(y^2-2x)\vec{j}$,

L – отрезок MN, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.

8. Определить момент инерции тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=a\sqrt{2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ относительно оси OZ.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривыми: $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела: $64(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y=0$, $z=0$ $(y\geq 0,\ z\geq 0)$, $\mu=\frac{5}{4}(x^2+y^2)$.

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx.$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (9x^2y^2+48x^3y^3)\,dx\,dy\ ; \quad D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4}\ ; \quad V:\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$$\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z=x^2+y^2,\quad z=2x.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x^2+y^2=y,\quad x^2+y^2=4y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0.$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N : $\vec{F}=(x^2+2y)\vec{i}+(y^2+2x)\vec{j}$,

$$L:\ y=2-\frac{x^2}{8},\quad M(-4,0),\quad N(0,2).$$

8. Найти момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного сверху полусферой радиуса R, а снизу конусом (высота конуса равна радиусу основания).

9. Найти момент инерции фигуры, ограниченной петлей кривой $\rho=2a\cos 2\varphi$, относительно полярной оси.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=1,\quad (x^2+y^2\le 1),$$

$$x=0\quad (x\ge 0),\quad \mu=4|z|.$$

Вариант 3

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (36x^2y^2-96x^3y^3)\,dx\,dy,\quad D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} 15(y^2+x^2)\,dx\,dy\,dz, \quad V:\ z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$$\int\limits_0^3 dy \int\limits_{3-\sqrt{9-y^2}}^{3+\sqrt{9-y^2}} \sqrt{36-x^2-y^2}\,dx.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$y^2=4-3x,\ y^2=x,\ z=x,\ z=-x.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x^2+y^2=8\sqrt{2}\,x,\ z=x^2+y^2-64,\ z=0,\ (z\geq 0).$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N : $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+2x\vec{j}$,

$$L:\ x^2+y^2=4,\ (y\geq 0),\ M(2,0),\ N(-2,0).$$

8. Радиус основания прямого круглого цилиндра равен a, высота h, плотность в любой точке обратно пропорциональна ее расстоянию от оси. Определить массу цилиндра.

9. Найти момент инерции полукруга радиуса a относительно касательной, параллельной диаметру, ограничивающему полукруг.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V:\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2z,\ x=0,\ y=0,\ z=0,$$

$$(x\geq 0,\ y\geq 0),\ \mu=10x.$$

Вариант 4

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2+32x^3y^3)\,dx\,dy,\quad D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} (3x+4y)\,dx\,dy\,dz,\quad V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=0,\ z=5(x^2+y^2).$$

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$$\int_0^6 dx \int_{-\sqrt{6x-x^2}}^{\sqrt{6x-x^2}} \sqrt{36-x^2-y^2}\,dy.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$y=1-x^2,\ y^2=z,\ z=0,\ y=0.$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$x^2+y^2+4x=0,\quad z=8-y^2,\ z=0.$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N : $\vec{F}=x^3\vec{i}-y^3\vec{j}$,

$L:\ x^2+y^2=4\ (x\geq 0, y\geq 0)$; $M(2,0)$, $N(0,2)$.

8. Найти центр тяжести тела, ограниченного поверхностями:

$y^2+2z^2=4x,\quad x=2.$

9. Для фигуры, ограниченной параболой $y^2=4x+4$ и прямой $x+y=2$, найти статический момент относительно оси симметрии параболы.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела V: $x^2+y^2+z^2=1$,

$x^2+y^2=4z^2,\ x=0,\ y=0\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$,

$\mu=20z.$

Вариант 5

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)\,dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (27x^2y^2+48x^3y^3)\,dx\,dy,\quad D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} (1+2x^3)\,dx\,dy\,dz,\quad V:\ y=9x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми:

$y^2=x+4,\quad y^2=4-2x.$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$x^2+y^2=8z,\quad x^2+y^2=2x,\quad z=0.$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$x^2+y^2=6x$, $x^2+y^2=9x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y=0$ $(y\le 0)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N : $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$, $L: y=x^2$, $M(-1,1)$, $N(1,1)$.

8. Найти массу шара, зная, что плотность в любой точке обратно пропорциональна расстоянию этой точки до центра.

9. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной линиями:

$y=\sqrt{8x}$, $y=0$, $x+y=6$.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела:

$V:$ $36(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $z=0$ $(x\ge 0,\ z\ge 0)$, $\mu=\frac{5}{6}(x^2+y^2)$.

Вариант 6

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1} dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2+32x^3y^3)\,dx\,dy,\quad D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} (27+54y^3)\,dx\,dy\,dz,\quad V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y=\sqrt{a^2-x^2}$ и $x+y=a$, (имеется в виду область, не содержащая начала координат).

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=6\sqrt{2}y$, $z=x^2+y^2-36$, $z=0$, $z\ge 0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N : $\vec{F}=x^2y\vec{i}+y\vec{j}$, L - отрезок MN; $M(-1,0)$, $N(0,1)$.

8. Найти центр тяжести тела, расположенного над плоскостью xOy и ограниченного сферой радиуса a и конусом с углом при вершине осевого сечения 2α, если центр сферы и вершина конуса лежат в начале координат.

9. Найти момент инерции фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно оси Oy.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела:

$V:\ x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4,\ (x^2+y^2\le 4),$

$\mu=2|z|.$

Вариант 7

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1}dy\int_{0}^{\sqrt{2+y}}f(x,y)dx+\int_{-1}^{0}dy\int_{0}^{\sqrt{-y}}f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)}(18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy,\quad D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)}y\,dx\,dy\,dz,\quad V:\ y=15x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0$$

4. Вычислить площадь, ограниченную кривой $\rho\cos\varphi=4$, $\rho=8$ и не содержащую начала координат.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$y+z=2,\ y=x^2,\ z=0.$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=2y,\ z=\frac{9}{4}-x^2,\ z=0.$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $\vec{F}=(2xy-y)\vec{i}+(x^2+x)\vec{j}$,

$L:\ x^2+y^2=9\ (y\ge 0),\ M(3,0),\ N(-3,0).$

8. Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и в вершинах квадрата равна 1.

9. Центр круга радиуса $2a$ лежит на окружности радиуса a. Вычислить момент инерции фигуры, содержащейся между обеими окружностями, относительно общей касательной.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V:\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=8z,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x\geq 0,\ y\geq 0),\ \mu=5x.$$

Вариант 8

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)} (27x^2y^2+48x^3y^3)\,dx\,dy,\ D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$$

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5},\ V:\ \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{16-x^2-y^2}\,dy.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z=4-x^2-y^2,\ x^2+y^2=2y,\ z=0.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=5y,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$,

$$L:\ x^2+\frac{y^2}{9}=1\ (x\geq 0,\ y\geq 0),\ M(1,0),\ N(0,3).$$

8. Вычислить момент инерции пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$ относительно плоскости yOz.

9. Доказать, что статический момент треугольника с основанием a относительно этого основания, зависит только от высоты треугольника.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$V: x^2+y^2+z^2=4, \; x^2+y^2=z^2, \; x=0, \; y=0,$

$(x\geq 0, \; y\geq 0, \; z\geq 0), \; \mu=6z.$

Вариант 9

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)} (4xy+3x^2y^2)\,dx\,dy, \quad D: x=1, \; y=x^2, \; y=-\sqrt{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} (3x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \quad V: z=10y, \; x+y=1, \; x=0, \; y=0, \; z=0.$$

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$z=4-y^2, \; y=\dfrac{x^2}{2}, \; z=0.$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$x^2+y^2+2\sqrt{2}y=0, \; z=x^2+y^2-4, \; x=0, \; z\geq 0.$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N : $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$,

$L: x^2+y^2=1 \; (y\geq 0), \; M(1,0), \; N(-1,0).$

8. Вычислить массу шара радиуса R зная, что плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра.

9. В квадратной пластине плотность пропорциональна квадрату расстояния от одной из ее вершин. Вычислить момент инерции пластины относительно стороны, проходящей через эту вершину.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$V:\ 25(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ x=0,$
$y=0,\ z=0\ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0),\ \mu=2(x^2+y^2).$

Вариант I0

I. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (12xy+9x^2y^2)dx\,dy,\quad D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} (15x+30z)dx\,dy\,dz,\quad V:\ z=x^2+3y^2,\ z=9,\ y=x,$$
$$y=0,\ x=1.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\int_0^{5} dx \int_0^{\sqrt{5^2-x^2}} (2+x^2+y^2)dy,$ перейдя к полярным координатам.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2+y^2=2y,\quad z=y,\quad z=-2y.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x^2+y^2=4x,\quad z=10-y^2,\quad z=0.$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N:
$\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j},\quad L:\ y=\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x, & 1\leq x\leq 2\end{cases};\quad M(2,0),\ N(0,0).$

8. Вычислить массу шара радиуса R, если плотность в любой точке пропорциональна квадрату расстояния от центра шара.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной петлей кривой $\rho=2a\cos 2\varphi.$

I0. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела:
$V:\ x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4\ (x^2+y^2\leq 4),\ y=0\ (y\geq 0),$
$\mu=|z|.$

Вариант II

I. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x,y)\,dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x,y)\,dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (8xy + 9x^2y^2)\,dx\,dy, \quad D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^5.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} (4+8z^3)\,dx\,dy\,dz, \quad V: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} (x^2+y^2)\,dy$, перейдя к полярным координатам.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z=x^2+y^2,\ y=-x^2,\ y=-1,\ x=0,\ z=0\ (x\geq 0).$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=7x$, $x^2+y^2=10x$, $z=0$,

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ y=0\ (y\leq 0).$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N : $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$, $L: x^2+y^2=2$, $(y\geq 0)$, $M(\sqrt{2},0)$, $N(-\sqrt{2},0)$.

8. Вычислить массу шара радиуса a, если плотность в любой точке пропорциональна квадрату расстояния от центра шара.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной петлей кривой $\rho=a\sin 2\varphi$.

IO. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела:

$$V: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=6z,\ x=0,\ y=0,$$

$$z=0\ (x\geq 0,\ y\geq 0),\ \mu=90y.$$

Вариант I2

I. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (24xy + 18x^2y^2)\,dx\,dy, \quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} (1+2x^3)\,dx\,dy\,dz, \quad V: y=36x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0.$$

4. Найти площадь, ограниченную кривыми:

$y=2x-x^2$, $y=x^2$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=2x$, $z\geq 0$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$x^2+y^2=8\sqrt{2}y$, $z=x^2+y^2-64$, $z=0$, $z\geq 0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $\vec{F}=xy\vec{i}+2y\vec{j}$,

$L: x^2+y^2=1\ (x\geq 0, y\geq 0)$, $M(1,0)$, $N(0,1)$.

8. Вычислить массу шара радиуса a, если плотность в любой точке обратно пропорциональна расстоянию ее от центра шара.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осями координат и параболой $y=1-x^2$.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ –плотность. Найти массу тела:

$V: x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=9z^2$, $x=0$,

$y=0$ $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$, $\mu=10z$.

Вариант 13

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x,y)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (12xy+27x^2y^2)\,dx\,dy, \quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)}(12xy+27x^2y^2)\,dx\,dy\,dz \quad V:\ y=x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $\rho=10$, $\rho\sin\varphi=5$ и не содержащую начала координат.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z=x^2+y^2-2,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x^2+y^2=2y,\quad z=\frac{13}{4}-x^2,\ z=0.$$

7. Найти работу силы $\vec F$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N : $\vec F=y\vec i-x\vec j$, $L:\ 2x^2+y^2=1$,

$$(y\geq 0),\quad M\left(\frac{1}{\sqrt2},0\right),\ N\left(-\frac{1}{\sqrt2},0\right).$$

8. Вычислить среднюю плотность прямого кругового цилиндра радиуса r и высоты h, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от плоскости нижнего основания.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V:\ 9(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0,$$
$$z=0\ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0),\ \mu=\frac{5}{3}(x^2+y^2).$$

Вариант 14

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-(2+x)}^{0}f(x,y)\,dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0}f(x,y)\,dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)}(8xy+18x^2y^2)\,dx\,dy,\quad D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^6},\ V:\ \frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную линиями:

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \rho\cos\varphi = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = x^2 + \frac{y^2}{4}, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2 + y^2 = 3y$, $x^2 + y^2 = 6y$, $z = 0$,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N : $\vec{F} = (x^2 + y^2)(\vec{i} + 2\vec{j})$,

$$L: x^2 + y^2 = R^2 \ (y \geq 0), \ M(R,0), N(-R,0).$$

8. Вычислить среднюю плотность прямого кругового цилиндра радиуса r и высоты h, если плотность в каждой его точке прямо пропорциональна расстоянию точки от оси цилиндра.

9. Найти момент инерции сегмента параболы с хордой, перпендикулярной к оси, относительно вершины параболы, если длина хорды равна a и "стрелка" хорды равна h.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ x^2 + y^2 = 1 \ (x^2 + y^2 \leq 1), \ \mu = 6|z|.$$

Вариант 15

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right) dx\,dy, \quad D: x = 1, \ y = x^3, \ y = -\sqrt{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} (x^2 + 3y^2)\,dx\,dy\,dz, \quad V: z = 10x, \ x + y = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0.$$

4. Вычислить площадь общей части двух кругов: $\rho = 2$ и $\rho = 2(\cos\varphi + \sin\varphi)$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2+y^2=1,\ x^2+(y-1)^2=z,\ z=0.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x^2+y^2=6\sqrt{2}x,\ z=x^2+y^2-36,\ z=0,\ z\geq 0.$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N : $\vec{F}=x^2y\vec{i}-xy^2\vec{j}$,

$$L: x^2+y^2=4\ (x\geq 0, y\geq 0),\ M(2,0), N(0,2).$$

8. От цилиндра, радиус основания которого равен a, отрезай клин плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклонной к основанию под углом в 45^0. Найти центр тяжести этого клина.

9. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной окружностями:

$$\rho=a\cos\varphi,\ \rho=b\cos\varphi\ \ (a>b>0).$$

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела:

$$V:\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=z,\ x=0,\ y=0,\ z=0,$$

$$(x\geq 0,\ y\geq 0),\ \mu=10y.$$

Вариант I6

I. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)}\left(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy,\ D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$$

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)}(60y+90z)\,dxdydz,\ V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=x^2+y^2,\ z=0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми:

$$y^2=9+x,\ \ y^2=9-3x.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$y=x^2,\ y=2x^2,\ z+y=2,\ z=0.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=2\sqrt{2}y,\ z=x^2+y^2-4,\ z=0,\ z\geq 0.$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N: $\vec{F}=y^2\vec{i}-x^2\vec{j}$,

$$L: x^2+y^2=9 \quad (x\geq 0, y\geq 0), \; M(3,0), \; N(0,3).$$

8. Вычислить массу прямого кругового цилиндра радиуса r и высоты h, если его плотность в любой точке численно равна квадрату расстояния точки от плоскости нижнего основания.

9. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной эллипсом и его осями симметрии.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V: x^2+y^2+z^2=4, \; x^2+y^2=4z^2, \; x=0, \; y=0,$$
$$(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0), \; \mu=10z.$$

Вариант 17

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (24xy-48x^3y^3)\,dx\,dy, \quad D: x=1; \; y=x^2; \; y=-\sqrt{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{10}{3}x+\frac{5}{3}\right)dx\,dy\,dz, \quad V: y=9x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0$$

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми:

$$y=x^2+1, \quad y=4-2x, \quad y=1.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$y=\cos x, \; z=1-y^2, \; x=0, \; y=0, \; z=0, \quad \left(0\leq x\leq \frac{\pi}{2}\right).$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x^2+y^2=4x, \quad z=12-y^2, \; z=0.$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N: $\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}+y^2\vec{j}$,

L – отрезок MN; $M(2,0)$, $N(0,2)$.

8. Вычислить среднюю плотность шара радиуса a, зная, что плотность в любой точке пропорциональна расстоянию ее от центра шара.

9. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$ и $y=2-x$ и расположенной выше оси OX.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела: V: $16(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$, $\mu=5(x^2+y^2)$.

Вариант I8

I. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy\int_0^{y^3} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)}(6xy+24x^3y^3)\,dx\,dy,\quad D:\ x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)}(9+18z)\,dx\,dy\,dz,\quad V:\ y=4x,\ y=0,\ x=1,\ z=0,\ z=\sqrt{xy}.$$

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить интеграл:

$$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy.$$

5. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=8x$, $x^2+y^2=11x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y=0$ $(y\leq 0)$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N : $\vec{F}=(x+y)^2\vec{i}-(x^2+y^2)\vec{j}$, L – отрезок MN, $M(0,1)$, $N(1,0)$.

8. В теле, имеющем форму полушария, плотность изменяется пропорционально расстоянию точки от центра. Найти центр тяжести этого тела.

9. Найти статический момент прямоугольника со сторонами a и b относительно стороны a, если в каждой точке поверхностная плотность прямоугольника пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=4\ (x^2+y^2\le 4),$$
$$\mu=|z|.$$

Вариант 19

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^{\sqrt{3}}dx\int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0}f(x,y)dy+\int_{\sqrt{3}}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}f(x,y)dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)}(4xy+16x^3y^3)\,dx\,dy,\quad D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)}3y^2dx\,dy\,dz,\quad V:\ y=2x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми:

$$y^2=8x+16,\quad y^2=4x+16.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z=3x,\ z=0,\ x^2+y^2=2x.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x^2+y^2=4\sqrt{2}\,x,\quad z=x^2+y^2-16,\ z=0\ (z\ge 0).$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N: $\vec{F}=(y^2-y)\vec{i}+(2xy+x)\vec{j}$,

$$L:\ x^2+y^2=9\ (y\ge 0),\quad M(3,0),\ N(-3,0).$$

8. Вычислить момент инерции пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$, относительно плоскости XOY.

9. Найти центр тяжести кругового сектора радиуса a с углом при вершине α.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела:

$$V:\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=4z,\ x=0,\ y=0,$$
$$z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0),\ \mu=5y.$$

Вариант 20

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{D} (4xy + 16x^3y^3)\,dx\,dy;\quad D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=\sqrt[3]{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^4},\quad V:\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную линиями:

$$y^2 = x-2,\quad y^2 = x,\quad x = 4.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = x^2+y^2,\quad x^2+y^2+z^2 = 2\quad (z \ge 0).$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=4$, $z = 4-x^2$, $z=0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N : $\vec{F} = (xy-y^2)\vec{i} + x\vec{j}$,

$$L:\ y = 2x^2,\quad M(0,0),\quad N(1,2).$$

8. Найти момент инерции однородного кругового конуса плотности γ с радиусом R и высотой H относительно его оси.

9. Найти момент инерции квадрата со стороной a, поверхностная плотность которого постоянна, относительно одной из вершин.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями: μ - плотность. Найти массу тела:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2=z^2,\ x=0,\ y=0,$$
$$(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0),\quad \mu = 32z.$$

Вариант 21

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)} (44xy + 16x^3y^3)\,dx\,dy,\quad D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 dxdydz, \quad V: z=10(x+3y),\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную гиперболой $y^2-x^2=1$ и двумя прямыми: $x=2$, $x=-2$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$y=e^x$, $y=e^{-x}$, $z=0$, $z=3-y$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=4y$, $x^2+y^2=4y$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N:

$\vec{F}=(xy-x)\vec{i}+\frac{x^2}{2}\vec{j}$; $L: y=2\sqrt{x}$, $M(0,0)$, $N(1,2)$.

8. Найти момент инерции шара радиуса R относительно его диаметра, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от центра шара, а на поверхности шара равна γ_0.

9. Найти момент инерции круга радиуса R относительно точки, лежащей на окружности.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

V: $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$, $\mu=\frac{5}{2}(x^2+y^2)$.

Вариант 22

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} (4xy+176x^3y^3)\,dxdy, \quad D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)} (8y+12z)\,dxdydz, \quad V: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=0,\ z=3x^2+2y^2.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную кривой $\rho=2+\cos\varphi$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z=1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9},\quad x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=1,\quad z=0.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=4\sqrt{2}\,y$, $z=x^2+y^2-16$, $z=0$ $(z\geq 0)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N:

$$\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j},\quad L:\ y=x^3,\quad M(0,0),\ N(2,8).$$

8. Найти массу шара радиуса R, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до одного из диаметров шара и на окружности большого круга, лежащего в плоскости, перпендикулярной к этому диаметру, равна γ_0.

9. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной верхней половиной эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и его большой осью.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=9,\quad x^2+y^2=4,\ (x^2+y^2\leq 4),$$
$$z=0\ (z\geq 0),\quad \mu=2z.$$

Вариант 23

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)\,dy+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\cos x}f(x,y)\,dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)}(xy-4x^3y^3)\,dx\,dy,\quad D:\ x=1;\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)}63\,(1+2\sqrt{y})\,dx\,dy\,dz,\quad V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0.$$

4. Найти площадь одного лепестка кривой $\rho=4\sin^2\varphi$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2+y^2+z^2=4,\quad z^2=x^2+y^2\quad (z\geq 0).$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2+2x=0$, $z=\frac{17}{4}-y^2$, $z=0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N:

$$\vec{F} = -x\vec{i} + y\vec{j},\ L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1\ (x \geq 0, y \geq 0),\ M(1,0), N(0,3)$$

8. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями:

$$z = \frac{H}{R^2}\left(x^2 + y^2\right),\quad z = H.$$

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной цепной линией $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ и прямыми $x = a$, $x = -a$, $y = 0$.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 3z,\ x = 0,\ y = 0$$
$$(x \geq 0,\ y \geq 0),\ z = 0,\ \mu = 15x.$$

Вариант 24

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f(x,y)\,dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)} \left(4xy + 176x^3y^3\right) dx\,dy,\ D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3.$$

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} (x+y)\,dx\,dy\,dz,\ V: y = x,\ y = 0,\ x = 1,\ z = 0,$$
$$z = 30x^2 + 60y^2.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_{(D)} xy\,dx\,dy$, распространенный на область D, ограниченную осью OX и верхней полуокружностью $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 1 - x^2,\ y = \frac{1}{x},\ z = 0,\ y = 2.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2 + y^2 = 9x$, $x^2 + y^2 = 12x$, $z = 0$,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ y = 0\ (y \geq 0).$$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N: $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$,

$$L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\ (y \geq 0),\ M(3,0);\ N(-3,0).$$

8. Найти массу сферического слоя между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$ и $x^2+y^2+z^2=4a^2$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки от начала координат, а наибольшее значение плотности γ_0.

9. Вычислить момент инерции куба относительно его ребра.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=9z^2,\ x=0,\ y=0,$$
$$(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0),\ \mu=5z.$$

Вариант 25

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^3} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint\limits_{(D)}\left(6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy,\ D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$$

3. Вычислить:

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^5},\ V:\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

4. Найти площадь, ограниченную кривыми:

$$\rho=a(1+\cos\varphi),\quad \rho=2a\cos\varphi.$$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z^2=x^2+y^2,\quad z=\frac{x^2+y^2}{4}+1.$$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2+2\sqrt{x}=0,\ z=x^2+y^2-4,\ z=0\ (z\geq 0).$

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N:

$$\vec{F}=(x-y)\vec{i}+\vec{j},\ L:\ x^2+y^2=4\ (y\geq 0),\ M(2,0),\ N(-2,0).$$

8. Найти среднюю плотность шара радиуса R, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до одного из диаметров шара и на окружности большого круга, лежащего в плоскости, перпендикулярной к этому диаметру, равна γ_0.

9. Найти момент инерции круга радиуса R относительно касательной.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

$$V:\ 4(x^2+y^2)=z^2,\quad x^2+y^2=1,\quad y=0,\quad z=0$$
$$(y\geq 0,\ z\geq 0),\quad \mu=10(x^2+y^2).$$

остями,