Министерство высшего и среднего специального
образования СССР

Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола

Кафедра высшей математики № 2



# ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания и контрольные работы

Часть I

Одобрено объединенным научно-методическим
советом по математике



Челябинск
1987

УДК 51(07)

Типовые расчеты по курсу высшей математики: Методические указания и контрольные работы /Составители: В.М.Адуков, В.Л.Дильман, Л.Н.Еремеева, В.Ф.Зиновьев, Л.В.Матвеева, Л.Д.Менихес, Ю.П.Нестеренко, С.Г.Раевская, Г.К.Тарасова, Н.А.Тихомирова, Н.И.Шильникова; Под ред. Е.И.Дергачевой. – Челябинск: ЧПИ, 1987. – Ч.I. – 82 с.

В типовых расчетах предлагаются для самостоятельной работы студентов дневного отделения теоретические вопросы и упражнения, снабженные методическими указаниями и решениями типовых задач. Расчеты составлены в соответствии с программой общего курса высшей математики и охватывают материал первого семестра.

Список лит. 9 назв.

Рецензент А.В.Геренштейн.

В настоящей работе содержится три типовых расчета (ТР) по следующим темам: "Линейная алгебра и аналитическая геометрия", "Пределы", "Исследование функций одной переменной".

Типовые расчеты должны способствовать лучшей организации самостоятельной работы студентов над этими разделами высшей математики. Каждый ТР составлен в соответствии с требованиями новой программы по высшей математике и предназначен для студентов первого курса.

Каждому студенту предлагается индивидуальный вариант типового расчета, который является заданием по целому разделу курса и состоит из трех частей: I) теоретические вопросы; 2) теоретические упражнения; 3) задачи и примеры. Теоретические вопросы и упражнения являются общими для всех студентов, примеры и задачи для каждого студента индивидуальные.

Выполнять ТР следует в установленный кафедрой срок. Студент должен представить решения всех задач и теоретических упражнений в письменной форме. Решение теоретических упражнений предполагает четкое и сжатое изложение рассуждений, ведущих к ответу, со ссылками на соответствующие теоремы и понятия курса. Работа выполняется в тетради в клетку, чернилами одного цвета, аккуратно и разборчиво; необходимо оставлять поля для замечаний.

ТР студент защищает. Во время защиты студент должен уметь отвечать на теоретические вопросы, объяснять решения теоретических упражнений и задач, решать аналогичные примеры. Студенты, не сдавшие своевременно ТР, к экзамену не допускаются.

Приведем примеры оформления решения некоторых заданий.

Пример I. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, найти длину вектора $\bar{c} = 4\bar{a} + \bar{b}$.

Решение. Длину вектора $\bar{c}$ можно найти по формуле $|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}\cdot\bar{c}} = \sqrt{\bar{c}^2}$; $\bar{c}^2 = (4\bar{a}+\bar{b})^2 = 16\bar{a}^2 + 8\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2$. Так как $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = 4$, $\bar{b}^2 = |\bar{b}|^2 = 9$, $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\frac{2}{3}\pi = 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, то $\bar{c}^2 = 16\cdot 4 + 8\cdot(-3) + 9 = 31$. Окончательно, $|\bar{c}| = \sqrt{31} \approx 5{,}57$.

Пример 2. Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в некоторой окрестности точки $a$. Доказать, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен числу $A \neq 0$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ не существует, то и $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ не существует.

Доказательство. Обозначим $\varphi(x)=g(x)\cdot f(x)$ Предположим противное: пусть существует $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$, равный В. По теореме о пределе частного получим $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\dfrac{B}{A}$, $(A\neq 0)$,

что противоречит условию.

Пример 3. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Для построения графика надо сначала исследовать функцию по следующей схеме:

I. Найти область определения функции.

2. Установить, является ли функция четной, нечетной или периодической.

Если функция четная или нечетная, то достаточно рассмотреть поведение функции на интервале $]0,\infty[$. Периодическую функцию можно рассмотреть на любом отрезке, длина которого равна периоду функции.

3. Найти нули функции и промежутки знакопостоянства.

4. Найти асимптоты функции.

5. Найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках. Установить интервалы монотонности функции.

6. Найти точки перегиба графика функции, установить интервалы выпуклости функции.

Исследуем данную функцию по этой схеме.

I. Область определения $]-\infty,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$.

2. Функция общего вида, так как область определения не симметрична относительно начала координат.

3. График функции пересекает оси координат в единственной точке (0,0). Функция положительна при $x>0$, $x\neq I$, отрицательна при $x<0$.

4. Функция разрывна в точке $x$ = I. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$, то прямая $x$ = I вертикальная асимптота графика функции при $x\to I+0$ и при $x\to I-0$. Найдем наклонные асимптоты. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$. Найдем $k$ и $b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=2$$

Следовательно, график функции имеет наклонную асимптоту $y=x+2$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

5. Разобьем область определения функции критическими точками на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет знак. Для этого найдем критические точки, т.е. точки, в которых обращается в нуль или не существует первая производная данной функции. Имеем:

$$y'=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

Производная не существует только при $x=1$, т.е. в точке, где не существует и сама функция, поэтому критическими будут лишь точки, в которых производная обращается в нуль.

$$y'=0 \text{ при } x_1=0 \text{ и } x_2=3.$$

Производная сохраняет знак в каждом из интервалов

$]-\infty,0[;\ ]0,1[\ ;\ ]1,3[\ ;\ ]3,\infty[$

Определим знак производной в каждом из интервалов и составим таблицу.

| $x$ | $-\infty<x<0$ | 0 | $0<x<1$ | 1 | $1<x<3$ | 3 | $3<x<\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | + | Не сущ. | – | 0 | + |
| $y$ | Возрастает | | Возрастает | Не сущ. | Убывает | $y_{min}=\frac{27}{4}$ | Возрастает |

Итак, $y_{min}(3)=\frac{27}{4}$.

6. Разобьем область определения функции на интервалы, на каждом из которых вторая производная сохраняет знак. Для этого определим точки, в которых вторая производная обращается в нуль либо не существует.

Найдем вторую производную

$$y''=\frac{6x}{(x-1)^4}.$$

Вторая производная обращается в нуль при $x=0$. Точек из области определения функции, в которых вторая производная не существует, нет. Определим знаки второй производной в каждом из интервалов

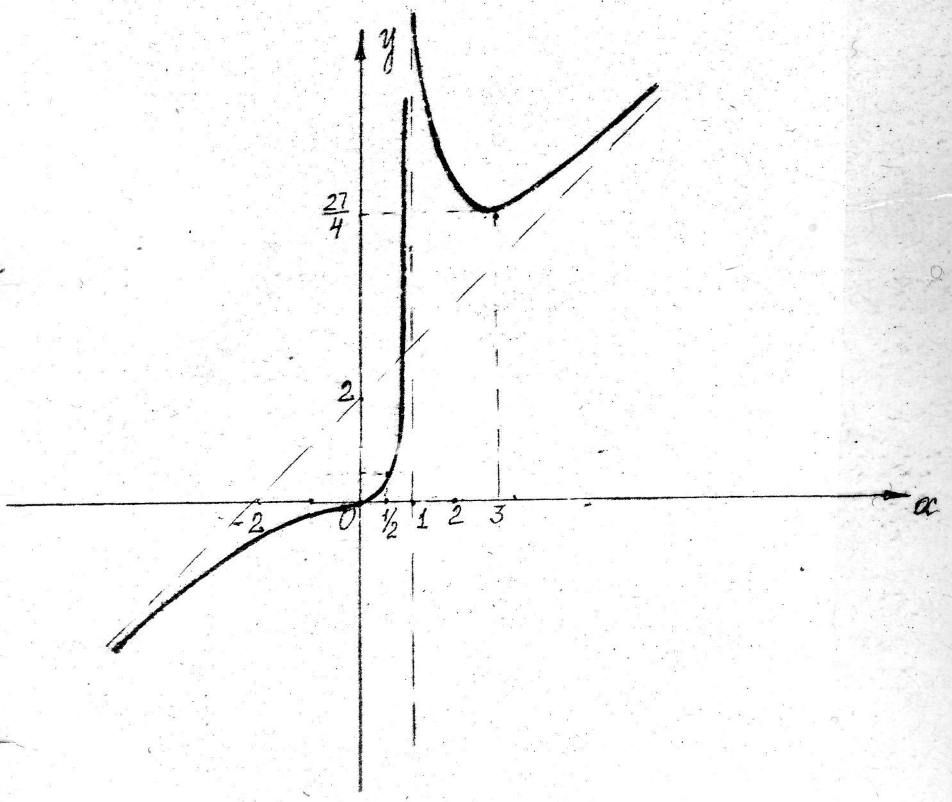
$]-\infty,0[\ ;\ ]0,1[\ ;\ ]1,\infty[$

и составим таблицу

| $x$ | $-\infty < x < 0$ | 0 | $0 < x < 1$ | 1 | $1 < x < \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | - | 0 | + | Не сущ. | + |
| $y$ | Выпуклость вверх ⌒ | $y_{пер} = 0$ | Выпукла вниз ⌣ | Не сущ. | Выпукла вниз ⌣ |

Для более точного построения графика функции вычислим несколько точек графика: $y(-2) = -\frac{8}{9}$, $y(-1) = -\frac{1}{4}$, $y(2) = 8$, $y(4) = \frac{64}{9}$, $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

На основе проведенного исследования строим график функции.



## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1984.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1984.

3. Воеводин В.В. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1974.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для студентов втузов.- В 2-х частях.- М.: Высшая школа, 1986.- Ч. I.

5. Дергачева Е.И., Кацман А.Д., Брин Ф.Ш. Элементы линейной алгебры: Учебное пособие.- Челябинск: ЧПИ, 1981.

6. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. - М.: Наука, 1970.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. : Учебное пособие для втузов. - М.: Наука, 1985.- - Т. I..

8. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для нематематических специальностей вузов /Под ред. А.Н.Тихонова. - М.: Высшая школа, 1985.

9. Шнейдер В.Э., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики.- М.: Высшая школа, 1978.- Т. I.

## ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № I

## ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

I. Понятие об определителе $n$-го порядка. Свойства.

2. Понятие матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Теорема существования обратной матрицы.

3. Ранг матрицы.

4. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

5. Векторы. Линейные операции над векторами. Понятие линейной зависимости.

6. Скалярное произведение векторов. Его свойства.

7. Векторное и смешанное произведения векторов.

8. Общее уравнение прямой на плоскости и плоскости. Доказательство теоремы: уравнению первой степени с двумя переменными соответствует в декартовой системе координат прямая линия (с тремя переменными - плоскость).

9. Прямая в пространстве. Виды уравнений.

I0. Определение линейного пространства. Понятие линейной зависимости. Понятие о базисе и размерности.

II. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразования координат вектора.

I2. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.

### Теоретические упражнения

I. Множество $V$ состоит из одного элемента $\theta$. Операции в $V$ определены следующим образом:

а) $\theta+\theta=\theta$;

б) $\lambda\theta=\theta$ для любого действительного $\lambda$.

Является ли $V$ линейным пространством?

2. Определить, является ли множество векторов, концы которых лежат на данной прямой, линейным пространством.

3. Проверить, является ли множество всех многочленов степени $\leq n$, пополненное нулем, линейным пространством?

4. Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

5. Доказать, что система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, линейно зависима.

6. Доказать, что в линейно независимой системе векторов всякая подсистема также линейно независима.

7. Будет ли в линейно зависимой системе векторов всякая подсистема также линейно зависима? Показать на примере.

8. Найти размерность и построить базис пространства задачи 3.

9. Найти матрицу перехода от базиса $1, x, x^2, \dots, x^n$ к базису $1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n$.

10. Найти какое-либо подпространство пространства задачи 3.

11. Доказать, что для того, чтобы неоднородная система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, была совместна, достаточно, чтобы соответствующая однородная система имела единственное решение. Является ли это условие необходимым?

## Задача 1

Вычислить определитель.

1.1. $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

1.4. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

1.5.✓ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.6. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

1.7. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix}$.

1.8. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$.

1.9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

1.10. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.11. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$

1.12. $\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$

1.13. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$

1.14. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$

1.15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$

1.16. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$

1.18. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

1.19. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

1.20. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 10 & -15 \\ -2 & 7 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 5 & 13 \end{vmatrix}.$

1.21. $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

1.22. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

1.23. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

1.24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$

1.25. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$

## З а д а ч а 2

Найти матрицу C, если

2.1. $C = A^T B - 2B^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2. $C = AB^T - A^T$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3. $C = AB + 4A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.4. $C = A \cdot B^T - 3B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

v2.5. $C = A^T B - BA^T$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

2.6. $C = A^T B - 4B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2.7. $C = 2A^T B - BA^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$.

2.8. $C = (A+B) \cdot (2B-A)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.9. $C = (B + AB)^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.10. $C = (A - BA)^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

2.11. $C = B - A \cdot A^T$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 20 & 19 \\ 18 & 17 \end{pmatrix}$.

2.12. $C = (AB+BA)^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.13. $C = (B-2A) \cdot A^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$.

2.14. $C = 2A \cdot (A-B)^T$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$.

2.I5. $C = 3B - B^T A^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ I & II \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

2.I6. $C = AB^T + A$, $A = \begin{pmatrix} I & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & I & 3 \\ I & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2.I7. $C = A^T(B+A)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ I & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -I & -4 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$.

2.I8. $C = (A-B)\cdot B^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & I \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ I & 2 \end{pmatrix}$.

2.I9. $C = (B^T + A)^3$, $A = \begin{pmatrix} I & -2 \\ -I & -I \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.20. $C = (A+3B)^T\cdot B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & I \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.2I. $C = 3A - 2B^T A^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I & 2 \\ -I & 3 \end{pmatrix}$.

2.22. $C = (A+3B^T)\cdot B$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -22 \\ -2I & -23 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

2.23. $C = 2A(B - A^T)$, $A = \begin{pmatrix} 5 & I \\ 2 & II \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & I8 \end{pmatrix}$.

2.24. $C = A^T\cdot B - 3B$, $A = \begin{pmatrix} I & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.25. $C = (AB-BA)^T$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

## З а д а ч а 3

Решить систему матричным методом.

3.I. $\begin{cases} 2x + 6y + 5z = 1 \\ 5x + 3y - 2z = 0 \\ 7x + 4y - 3z = 2 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = -2 \\ -4x - 3y - 5z = 1 \\ 5x + y - z = 3 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 7x + 9y + 5z = -3 \\ 3x + 4y + 3z = 5 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + z = 9 \\ 2x + 4y + 5z = 6 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y = 1 \\ 3x + 4y + 7z = 1 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 10 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = 7 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + z = 1 \\ 6x + 2y + 5z = 2 \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 3 \\ x + 6y + z = 4 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 6x + 5y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + 5z = 1 \\ 4x - 3y + 7z = 2 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 2y - z = 12 \\ 2x + y - 2z = 15 \\ -3x + 2y + z = 1 \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x + y - 2z = 10 \\ 5x + y + z = 5 \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x + 3y + 2z = -3 \\ 4x + y = 5 \\ 6x + 5y + 2z = 3 \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 0 \\ -5x - 4y - 3z = 7 \\ -x + 5y + z = 1 \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ x + 4z = 1 \\ 5x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} -2x + y + 8z = 2 \\ 5x + 3y + 2z = 3 \\ 6x + y + z = 1 \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} 6x + 2y + 5z = 2 \\ 3x + 5y - 2z = 1 \\ 4x + 7y - 3z = 1 \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 6 \\ 7x + 5y + 9z = 3 \\ 3x + 3y + 4z = 10 \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 2x + y + 3z = -6 \\ 3y + z = 12 \\ 4x + 2y + 5z = 3 \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = -2 \\ -3x - 4y - 5z = 3 \\ x + 5y - z = 1 \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 7 \\ 2y + z = -1 \\ 7x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ -2x + y + 2z = 7 \\ x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ -2x + y + 3z = 3 \\ x + y + 5z = 8 \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 2x+5y+6z=2 \\ 10x+y-3z=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$ 3.24. $\begin{cases} 2x+2y+z=27 \\ -2x+y+2z=9 \\ x-2y+2z=18 \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} -x+2z=1 \\ -2x+2y+z=4 \\ x-3y+2z=-6 \end{cases}$

## З а д а ч а 4

Решить матричное уравнение.

4.1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

4.2. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Решить уравнения $AX = B$ и $YA = B$.

4.3. $Y \cdot \overset{=A}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \underbrace{(29 \quad 16 \quad 49)}_{=B}.$

4.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$ √4.5. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$

4.6. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$

4.7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

4.8. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$

4.9. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$

4.10. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.  4.11. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

4.12. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.13. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

4.14. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$.

4.15. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot y \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.17. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 24 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

4.18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.19. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 7 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$.

4.20. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4.21. $y \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 20 & 18 \end{pmatrix}$.

4.22. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 10\\ -6 & 10\\ -1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$

4.23. $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot Y=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 5\\ 8 & 10 & -3 & 29\end{pmatrix}.$

4.24. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot Y=\begin{pmatrix}10\\ 8\\ -1\end{pmatrix}.$

4.25. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 15\\ -1 & 12\\ 12 & 27\\ 9 & 18\end{pmatrix}.$

## З а д а ч а 5

Используя теорему Кронекера-Капелли, исследовать систему уравнений и в случае совместности решить.

5.1. $\begin{cases}x_1-3x_2+4x_3-x_4=1\\ 7x_1+3x_2-5x_3+5x_4=10\\ 2x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3\end{cases}$

5.2. $\begin{cases}4x_1+2x_2+x_3=7\\ x_1-x_2+x_3=-2\\ 2x_1+3x_2-3x_3=11\\ 4x_1+x_2-x_3=7\end{cases}$

5.3. $\begin{cases}x_1-x_3+x_4=3\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=2\\ 5x_1-3x_4=-6\\ x_1+x_2+x_3+x_4=2\end{cases}$

5.4. $\begin{cases}x_1-x_2+x_3-2x_4=1\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=2\\ 5x_1-5x_2+8x_3-7x_4=3\end{cases}$

5.5. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6\\ 2x_1+3x_2+4x_3=9\\ 3x_1+4x_2+5x_3=12\\ x_1-x_2-x_3=-1\end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1+3x_2+2x_3=5 \\ 6x_1+8x_2+3x_3=11 \\ x_1+x_2=1 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5 \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=6 \\ 6x_1+4x_2+4x_3+6x_4=1 \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2 \\ 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3 \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=3 \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3 \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=-3 \\ x_1+3x_2-5x_3=0 \\ -x_1+4x_2+x_3=3 \\ 3x_1+x_2-13x_3=-6 \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3=-2 \\ x_1-3x_2-2x_3=3 \\ 5x_1+5x_2+16x_3=-5 \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=3 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2+5x_3=4 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ 5x_1+2x_2-x_3=7 \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3 \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=5 \\ 2x_1-x_2-x_3=2 \\ 4x_1-2x_2-2x_3=-3 \\ 5x_1-2x_2+x_3=7 \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3+2x_4=3 \\ 3x_1+5x_2+9x_3-4x_4=-8 \\ 4x_1-3x_2+5x_3+7x_4=14 \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=7 \\ 2x_1+4x_2+5x_3-x_4=2 \\ 5x_1+10x_2+7x_3+2x_4=11 \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=6 \\ x_1-5x_2+x_3=12 \\ 2x_1+4x_2=-6 \\ 2x_1+x_2+3x_3=3 \\ 5x_1+4x_3=9 \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1 \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1 \\ x_1-x_2-x_3=-2 \\ 4x_1+5x_2-13x_3=1 \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7 \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1 \\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0 \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=2 \\ 4x_1+3x_2-5x_3+2x_4=4 \\ 7x_1+4x_2-7x_3+5x_4=7 \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3+x_4-x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+2x_5=3 \\ 4x_1+7x_2+x_3+5x_4+3x_5=1 \\ 5x_1+9x_2+4x_3+7x_4+5x_5=8 \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-4x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4+3x_5=0 \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5 \\ x_1-x_2+3x_3=3 \end{cases}$

## З а д а ч а 6

Даны векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ и вектор $\bar{x}$. Показать, что $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ образуют базис и найти координаты $\bar{x}$ в этом базисе.

6.1. $\bar{e}_1=(1;1;1)$; $\bar{e}_2=(1;1;2)$; $\bar{e}_3=(1;2;3)$; $\bar{x}=(6;9;4)$.

6.2. $\bar{e}_1=(5;4;3)$; $\bar{e}_2=(3;3;2)$; $\bar{e}_3=(8;1;3)$; $\bar{x}=(-1;4;1)$.

6.3. $\bar{e}_1=(4;-3;2)$; $\bar{e}_2=(2;-2;1)$; $\bar{e}_3=(2;-1;0)$; $\bar{x}=(2;-5;3)$.

6.4. $\bar{e}_1=(2;-3;1)$; $\bar{e}_2=(3;-3;1)$; $\bar{e}_3=(2;-1;2)$; $\bar{x}=(6;-8;1)$.

6.5. $\bar{e}_1=(2;-3;1)$; $\bar{e}_2=(1;5;-4)$; $\bar{e}_3=(4;1;-3)$; $\bar{x}=(6;-15;7)$.

6.6. $\bar{e}_1=(2;1;3)$; $\bar{e}_2=(-4;-2;-1)$; $\bar{e}_3=(3;4;5)$; $\bar{x}=(1;3;2)$.

6.7. $\bar{e}_1=(2;3;1)$; $\bar{e}_2=(-1;2;-2)$; $\bar{e}_3=(1;2;1)$; $\bar{x}=(2;-2;1)$.

6.8. $\bar{e}_1=(1;2;1)$; $\bar{e}_2=(2;-1;3)$; $\bar{e}_3=(3;-1;4)$; $\bar{x}=(5;1;6)$.

Найти все значения $\lambda$, при которых вектор $\bar{x}$ линейно выражается через векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

6.9. $\bar{e}_1=(2;3;5)$; $\bar{e}_2=(3;7;8)$; $\bar{x}=(7;-2;\lambda)$.

6.10. $\bar{e}_1=(4;4;3)$; $\bar{e}_2=(2;-1;3)$; $\bar{x}=(5;9;\lambda)$.

Дана система векторов. Выделить максимальную линейно независимую подсистему и выразить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов выделенной подсистемы.

6.11. $\bar{f}_1=(3;2;-5)$; $\bar{f}_2=(3;-1;3)$; $\bar{f}_3=(3;5;-13)$.

6.12. $\bar{f}_1=(2;3;-4;-1)$; $\bar{f}_2=(1;-2;1;3)$; $\bar{f}_3=(5;-3;-1;8)$; $\bar{f}_4=(3;8;-9;-5)$.

6.13. $\bar{f}_1=(2;1;-1;1)$; $\bar{f}_2=(1;2;1;-1)$; $\bar{f}_3=(1;1;2;1)$.

6.14. $\bar{f}_1=(2;1)$; $\bar{f}_2=(3;2)$; $\bar{f}_3=(1;1)$; $\bar{f}_4=(2;3)$.

6.15. $\bar{f}_1=(2;1;-3)$; $\bar{f}_2=(3;1;-5)$; $\bar{f}_3=(4;2;-1)$; $\bar{f}_4=(1;0;-7)$.

6.16. $\bar{f}_1=(2;3;5;-4)$; $\bar{f}_2=(1;-1;2;3)$; $\bar{f}_3=(3;7;8;-11)$; $\bar{f}_4=(1;-1;1;2)$.

6.17. $\bar{f}_1=(2;-1;3;4)$; $\bar{f}_2=(1;2;-3;1)$; $\bar{f}_3=(5;-5;12;11)$; $\bar{f}_4=(1;-3;6;3)$.

6.18. $\bar{f}_1=(2;1;3;1)$; $\bar{f}_2=(1;2;0;1)$; $\bar{f}_3=(0;-3;3;-1)$.

6.19. $\bar{f}_1=(2;0;1;3)$; $\bar{f}_2=(1;1;0;-1)$; $\bar{f}_3=(0;-2;1;5)$; $\bar{f}_4=(1;-3;2;9)$.

6.20. $\bar{f}_1=(4;3;-1;1)$; $\bar{f}_2=(2;1;-3;2)$; $\bar{f}_3=(1;-3;0;1)$; $\bar{f}_4=(1;5;2;-2)$.

6.21. $\bar{f}_1=(5;2;-3;1)$; $\bar{f}_2=(4;1;-2;3)$; $\bar{f}_3=(1;1;-1;-2)$; $\bar{f}_4=(3;4;-1;2)$.

6.22. $\bar{f}_1=(2;-1;3;5)$ ; $\bar{f}_2=(4;-3;1;3)$; $\bar{f}_3=(3;-2;3;4)$;
$\bar{f}_4=(7;-6;-7;0)$.

Даны векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ и вектор $\bar{x}$. Показать, что $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ образуют базис и найти координаты $\bar{x}$ в этом базисе.

6.23. $\bar{e}_1=(2;3;3)$ ; $\bar{e}_2=(-1;4;-2)$ ; $\bar{e}_3=(-1;-2;4)$ ; $\bar{x}=(4;11;11)$.

6.24. $\bar{e}_1=(1;2;4)$ ; $\bar{e}_2=(1;-1;1)$ ; $\bar{e}_3=(2;2;4)$ ; $\bar{x}=(-1;-4;-2)$.

6.25. $\bar{e}_1=(3;2;2)$ ; $\bar{e}_2=(2;3;1)$ ; $\bar{e}_3=(1;1;3)$ ; $\bar{x}=(5;1;11)$.

## Задача 7

7.1. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ к базису $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$. Найти координаты векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ в базисе $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$.

7.2. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ к базису $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$. Найти координаты векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ в базисе $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$.

7.3. Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$. Найти координаты векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ в базисе $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$.

7.4. Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$. Найти координаты векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ в базисе $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$.

7.5. Вектор $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ имеет координаты (1,-2). Найти координаты этого вектора в базисе $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+2\bar{e}_2$ ; $\bar{e}_2'=-\bar{e}_1+\bar{e}_2$.

7.6. Вектор $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ имеет координаты (-3,1). Найти координаты этого вектора в базисе $\bar{e}_1'=-2\bar{e}_1+\bar{e}_2$ ; $\bar{e}_2'=\bar{e}_2$.

7.7. Вектор $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ имеет координаты (-1,2,0). Найти координаты этого вектора в базисе $\bar{e}_1'=2\bar{e}_1-\bar{e}_2+3\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'=-3\bar{e}_1+\bar{e}_2-2\bar{e}_3$ ; $\bar{e}_3'=4\bar{e}_2+5\bar{e}_3$.

7.8. Вектор $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ имеет координаты (4;0;-12). Найти координаты этого вектора в базисе $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'=2\bar{e}_1+3\bar{e}_2+4\bar{e}_3$, $\bar{e}_3'=3\bar{e}_1+4\bar{e}_2+3\bar{e}_3$.

7.9. Вектор $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ имеет координаты (0;I;-I;0). Найти координаты этого вектора в базисе

$\bar{e}_1{}' = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 3\bar{e}_4$, $\bar{e}_2{}' = 2\bar{e}_1 + 8\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 8\bar{e}_4$,

$\bar{e}_3{}' = -\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 - \bar{e}_4$, $\bar{e}_4{}' = -2\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 - 6\bar{e}_4$.

7.10. Даны два базиса:

$\bar{a} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, $\bar{b} = -4\bar{e}_1 + \bar{e}_2$; и $\bar{c} = 5\bar{e}_2$, $\bar{d} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$.

Является ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ матрицей перехода от базиса $\bar{a}$, $\bar{b}$ к базису $\bar{c}$, $\bar{d}$?

7.11. Даны два базиса:

$$\begin{cases} \bar{a} = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{b} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{c} = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} \bar{a}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \\ \bar{b}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_3 \\ \bar{c}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{matrix}.$$

Является ли матрица $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ -0{,}15 & 0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & -0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ матрицей перехода от базиса $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$, $\bar{c}_1$?

7.12. Даны два базиса: $\bar{a} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{b} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ и

$\bar{c} = 5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2$, $\bar{d} = -5\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$.

Является ли матрица $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ матрицей перехода от базиса $\bar{a}$, $\bar{b}$ к базису $\bar{c}$, $\bar{d}$?

7.13. Найти матрицу перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ к базису $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_1$.

7.14. Найти матрицу перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ к базису $\bar{e}_2$, $\bar{e}_4$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_3$.

7.15. Найти матрицу перехода от базиса $\bar{e}_3$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_4$, $\bar{e}_1$ к базису $\bar{e}_2$, $\bar{e}_4$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_3$.

7.16. Даны два базиса:

$$\begin{matrix} \bar{a} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{b} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3 \\ \bar{c} = 2\bar{e}_2 - \bar{e}_1 + \bar{e}_3 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} \bar{a}_1 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_3 \\ \bar{b}_1 = 2\bar{e}_2 + \bar{e}_1 \\ \bar{c}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3 \end{matrix}.$$

Найти матрицу перехода от базиса $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ к базису $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1$.

7.17. Даны два базиса:

$$\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \qquad\qquad \bar{c} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$$
$$\bar{b} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 \qquad \text{и} \qquad \bar{d} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 \,.$$

Найти матрицу перехода от базиса $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ к базису $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1$.

7.18. Даны два базиса:

$$\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \qquad\qquad \bar{c} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2,$$
$$\bar{b} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2. \qquad \text{и} \qquad \bar{d} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2.$$

Найти матрицу перехода от базиса $\bar{a}, \bar{b}$ к базису $\bar{c}, \bar{d}$.

7.19. Вектор $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ имеет координаты (1;-1;0). Проверить, что векторы

$$\bar{e}_1' = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 6\bar{e}_3,$$
$$\bar{e}_2' = 5\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 7\bar{e}_3,$$
$$\bar{e}_3' = -2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$$

образуют базис, и найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$.

7.20. Найти координаты вектора $\bar{x} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$ в базисе $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$, если матрица перехода от базиса $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ к базису $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.21. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ к базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$. Найти координаты векторов $\bar{e}_2, \bar{e}_3$ в базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$.

7.22. Найти матрицу перехода от базиса $\bar{e}$ к базису $\bar{e}'$:

$$\bar{e}_1 = (3,7,1), \qquad \bar{e}_1' = (1,1,-6),$$
$$\bar{e}_2 = (2,2,3), \qquad \bar{e}_2' = (5,1,4),$$
$$\bar{e}_3 = (1,2,3). \qquad \bar{e}_3' = (3,1,4).$$

7.23. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ к базису $\bar{e}_1{}'$, $\bar{e}_2{}'$, $\bar{e}_3{}'$. Найти координаты вектора $\bar{e}_1$ в базисе $\bar{e}_1{}'$, $\bar{e}_2{}'$, $\bar{e}_3{}'$.

7.24. Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ к базису $\bar{e}_1{}'$, $\bar{e}_2{}'$, $\bar{e}_3{}'$. Найти координаты вектора $\bar{e}_2{}'$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

7.25. Вектор $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ имеет координаты (2,-1). Найти координаты этого вектора в базисе $\bar{e}_1{}' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

## З а д а ч а 8

8.1. Дан вектор $\bar{p} = 2\bar{a} - \bar{b}$. Найти углы $(\widehat{\bar{a}, \bar{p}})$ и $(\widehat{\bar{b}, \bar{p}})$, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – орты, образующие угол $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{2}{3}\pi$.

8.2. Найти единичный вектор на диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p} - 2\bar{q}$ и $3\bar{p} - 2\bar{q}$, где $\bar{p} = 2\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{q} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – единичные векторы с углом $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

8.3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{m} = 3\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{n} = \bar{a} - 2\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 5$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{4}$.

8.4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = 3\bar{m} - 2\bar{n}$, если $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 2$, $(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}) = \frac{\pi}{6}$.

8.5. Вычислить угол, который образуют векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$, если известно, что $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$ и $\bar{b} = 5\bar{m} - 4\bar{n}$ взаимно перпендикулярны, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$.

8.6. На векторах $\bar{a} = 2\bar{p} - \bar{q}$ и $\bar{b} = \bar{p} + \bar{q}$ – построен параллелограмм. Вычислить угол между диагоналями параллелограмма, если $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – единичные векторы и угол между ними равен $\frac{\pi}{3}$.

8.7. Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, причем $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 5$, $\bar{a} \perp \bar{b}$, $(\widehat{\bar{c}, \bar{a}}) = \frac{\pi}{3}$; $(\widehat{\bar{b}, \bar{c}}) = \frac{\pi}{3}$. Найти длину вектора $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.

8.8. Найти длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=5\bar{p}+2\bar{q}$ и $\bar{b}=\bar{p}-3\bar{q}$, если $|\bar{p}|=2\sqrt{2}, |\bar{q}|=3$ и $(\widehat{\bar{p},\bar{q}})=\frac{\pi}{4}$.

8.9. При каком значении $k$ векторы $3\bar{p}+k\bar{q}$ и $\bar{p}-2\bar{q}$ будут взаимно перпендикулярны, если $|\bar{p}|=7\sqrt{2}, |\bar{q}|=4$, $(\widehat{\bar{p},\bar{q}})=\frac{\pi}{4}$.

8.10. Найти длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p}=\bar{m}+2\bar{n}$ и $\bar{q}=\bar{m}-3\bar{n}$, если $|\bar{m}|=5, |\bar{n}|=3$ и $(\widehat{\bar{m},\bar{n}})=\frac{\pi}{3}$.

8.11. Найти угол между векторами $\bar{m}=\bar{p}+2\bar{q}$ и $\bar{n}=2\bar{p}-\bar{q}$ если $|\bar{p}|=1, |\bar{q}|=2$, угол между $\bar{p}$ и $\bar{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

8.12. Найти угол, который образуют векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$, если известно, что векторы $\bar{a}=2\bar{p}+\bar{q}$ и $\bar{b}=\bar{p}-3\bar{q}$ взаимно перпендикулярны, а $|\bar{p}|=3, |\bar{q}|=2$.

8.13. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p}+3\bar{q}$ и $3\bar{p}+\bar{q}$, если $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – единичные векторы и $(\widehat{\bar{p},\bar{q}})=\frac{\pi}{6}$.

8.14. Найти длину вектора $\bar{c}=\bar{p}+2\bar{q}$, если $\bar{p}=\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{q}=\bar{a}+2\bar{b}$, $|\bar{a}|=1$; $|\bar{b}|=3$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{2}{3}\pi$.

8.15. Найти проекцию вектора $\bar{p}=2\bar{a}+\bar{b}$ на вектор $\bar{q}=\bar{a}-2\bar{b}$, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – единичные векторы, угол между которыми $\frac{\pi}{3}$.

8.16. Найти координаты единичного вектора в направлении $\bar{p}+\bar{q}$, если $\bar{p}=2\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{q}=\bar{a}-3\bar{b}$, длины векторов $|\bar{a}|=1, |\bar{b}|=2$ и угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $\frac{\pi}{2}$.

8.17. Вычислить длину вектора $\bar{m}=\bar{a}-3\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2\sqrt{2}$, $|\bar{b}|=3$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{4}$.

8.18. Найти проекцию вектора $\bar{b}=2\bar{p}+3\bar{q}$ на вектор $\bar{a}=3\bar{p}-2\bar{q}$, если $|\bar{p}|=2$, $|\bar{q}|=5$, $(\widehat{\bar{p},\bar{q}})=\frac{\pi}{3}$.

8.19. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{q}=2\bar{a}-\bar{b}$, если $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=5$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{3}$.

8.20. Найти проекцию вектора $\bar{p} = 2\bar{a} - \bar{b}$ на вектор $\bar{q} = \bar{a} + \bar{b}$, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - единичные векторы, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{2}{3}\pi$.

8.21. При каком значении $\alpha$ векторы $\bar{p} = \alpha\bar{a} + 5\bar{b}$ и $\bar{q} = 3\bar{a} - \bar{b}$ будут ортогональны, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{4}$.

8.22. Найти угол между векторами $\bar{a} = 3\bar{p} + 3\bar{q}$ и $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, если $|\bar{q}| = 2$, $|\bar{p}| = 5$, $(\widehat{\bar{p},\bar{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

8.23. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{q} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

8.24. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p} = 6\bar{a} + 3\bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} + 2\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 4$ и $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{5}{4}\pi$.

8.25. Вычислить длину вектора $\bar{p} + 2\bar{q}$, если $\bar{p} = \bar{a} - \bar{b}$, $\bar{q} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{2}{3}\pi$.

## З а д а ч а 9

9.1. Вершины пирамиды находятся в точках A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6), Д(2,3,8). Найти объем пирамиды и высоту, опущенную из вершины Д на грань ABC.

9.2. Даны три силы $\bar{F} = (1,-1,3)$, $\bar{P} = (0,-2,5)$ и $\bar{Q} = (1,2,1)$, приложенные к точке A(-3,1,2). Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки B(2,2,3).

9.3. Дана сила $\bar{P} = (-1,1,2)$, приложенная к точке A(2,3,4). Найти ее момент относительно точки B(1,1,0).

9.4. Сила $\bar{P} = (3,4,-3)$ приложена к точке C(2,-1,2). Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

9.5. Проекции силы $\bar{F}$ на оси координат $x = 5$ кг, $y = 4$ кг, $z = 3$ кг. Проекции вектора перемещения $\bar{S}$ движущейся точки на оси координат $x = 2$ м, $y = 1$ м, $z = -2$ м. Вычислить работу силы $\bar{F}$ и угол между $\bar{F}$ и $\bar{S}$.

9.6. Даны две силы $\bar{F}_1 = (5,-1,-3)$ и $\bar{F}_2 = (-4,2,1)$, приложенные к точке A(2,-3,5). Найти работу, которую совершает равнодействующая этих сил, если ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B(3,-4,1).

9.7. При каком $\bar{x}$ точка $M(x,0,0)$ будет лежать в плоскости точек $A(5,2,1)$, $B(3,-1,2)$, $C(2,0,1)$?

9.8. Дан треугольник с вершинами $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$. Найти длину высоты AM треугольника ABC.

9.9. Доказать, что векторы $\bar{a} = -\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - 4\bar{k}$ и $\bar{c} = -3\bar{i} + 12\bar{j} + 6\bar{k}$ линейно зависимы и найти линейную зависимость между ними.

9.10. Даны векторы $\bar{a} = (3,-1,5)$ и $\bar{b} = (1,2,-3)$. Найти вектор $\bar{x}$, если он перпендикулярен к оси $OZ$ и $\bar{x}\bar{a} = 9$, $\bar{x}\cdot\bar{b} = -4$.

9.11. Найти единичный вектор $\bar{p}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a} = (4,3,1)$ и $\bar{b} = (-3,1,2)$.

9.12. Вектор $\bar{x}$, лежащий в плоскости $xoz$, перпендикулярен к вектору $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$. Найти его координаты, зная, что $|\bar{x}| = 2$.

9.13. В плоскости $xoy$ найти вектор $\bar{a}$, перпендикулярный вектору $\bar{b} = (1,0,2)$ и имеющий одинаковую с ним длину.

9.14. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a} = (1,-2,3)$ и $\bar{b} = (2,1,1)$, образует с $OZ$ острый угол. Найти вектор $\bar{c}$, если $|\bar{c}| = 2$.

9.15. Вектор $\bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{a} = (3,0,4)$ и образует тупой угол с осью OX. Найти координаты $\bar{b}$, зная, что $|\bar{b}| = 50$.

9.16. Вектор $\bar{a}$ образует острый угол с осью OX и коллинеарен вектору $\bar{b} = (2,3,-1)$, $|\bar{a}| = 20$. Найти координаты вектора $\bar{a}$.

9.17. Доказать, что векторы $\bar{p} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{q} = 7\bar{i} + 14\bar{j} - 13\bar{k}$, $\bar{r} = 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ линейно зависимы, и найти линейную зависимость, которая их связывает.

9.18. Показать, что векторы $\bar{a} = (5,4,3)$, $\bar{b} = (3,3,2)$, $\bar{c} = (8,1,3)$ компланарны, и найти линейную зависимость, которая их связывает.

9.19. Показать, что векторы $\bar{a} = (3,0,7)$, $\bar{b} = (3,-3,2)$, $\bar{c} = (2,-1,3)$ компланарны, и найти линейную зависимость, которая их связывает.

9.20. Показать, что векторы $\bar{a} = (1,2,-1)$, $\bar{b} = (-3,-1,1)$, $\bar{c} = (1,-3,1)$ компланарны, и найти линейную зависимость, которая их связывает.

9.21. Найти проекцию вектора $\bar{a} = (\sqrt{2},-3,-5)$ на ось, составляющую с координатными осями OX и OZ углы $\alpha = 45^0$, $\gamma = 60^0$, а с осью OY – тупой угол $\beta$.

9.22. Даны три вектора $\bar{\ell}=\bar{k}$, $\bar{m}=\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{n}=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$. Проверить, будут ли $\bar{\ell}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ компланарны; если да, найти линейную зависимость, которая их связывает.

9.23. Вершины тетраэдра находятся в точках A(2,I,-I), B(3,0,I), C(2,-I,3) и Д(4,4,3). Найти высоту тетраэдра, опущенную из точки Д на основание.

9.24. Даны $\bar{a}=(x,1,2)$ и $\bar{b}=(-1,1,1)$. Найти $\bar{a}$, если проекция вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}=(2,6,3)$ равна I.

9.25. Вектор $\bar{a}$ коллинеарен вектору $\bar{b}=(2,-2,1)$, образует тупой угол с осью $0z$. Зная, что $|\bar{a}|=9$, найти координаты $\bar{a}$.

## Задача IO

IO.I. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если даны две вершины треугольника A(-3,3), B(5,-I) и точка пересечения высот M(4,3).

IO.2. Даны координаты вершин треугольника A(-2,3), B(5,6), C(-3,-2). Определить острый угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A.

IO.3. В треугольнике ABC найти координаты центра тяжести, длину и уравнение медианы BK, если A(5,6), B(-2,2), C(-3,-3).

IO.4. В треугольнике ABC известны координаты двух вершин A(2,-2), B(3,-I) и точка пересечения медиан E(I,0). Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.

IO.5. Даны две вершины треугольника A(-4,3) и B(4,-I) и точка пересечения высот M(3,3). Найти третью вершину C.

IO.6. В треугольнике ABC известны координаты вершин A(6,2), B(3,-5), C(2,0). Найти точку пересечения высоты AД и медианы BK.

IO.7. Найти проекцию точки P(-8,I2) на прямую, проходящую через точки A(2,-3) и B(-5,I).

IO.8. Найти точку, симметричную точке A(2,I) относительно прямой $12x+16y+35=0$.

IO.9. Даны вершины треугольника A(-4,4), B(4,-I2) и точка K(4,2) пересечения высот. Найти третью вершину.

IO.IO. В треугольнике ABC известны координаты вершины A(4,0) и уравнения высоты (BE): $2x-3y+15=0$ и медианы (BK): $2x+3y-3=0$. Составить уравнения сторон треугольника.

IO.II. В параллелограмме ABCД известны координаты трех вершин A(-2,2), B(2,4), C(6,I). Составить уравнения сторон, найти координаты вершины Д.

10.12. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известны координаты двух его вершин A(-2,1), B(6,3) и точка пересечения его высот M(5,1).

10.13. Даны уравнения сторон треугольника:
(AB): $x-2y+3=0$ ; (BC): $5x+y-7=0$ ;
(AC): $2x+3y-21=0$.
Найти точку, симметричную вершине B относительно основания AC.

10.14. Даны вершины треугольника A(-4,4), B(4,-12) и точка K(4,2) пересечения высот. Найти третью вершину.

10.15. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину (0,2) и уравнения двух высот: $x+y=4$; $y=2x$

10.16. В треугольнике ABC известны уравнения: стороны (AB) $4x+y-12=0$ ; высоты (BH) $5x-4y-15=0$ и высоты (AM) $2x+2y-9=0$ . Написать уравнения двух других сторон и третьей высоты.

10.17. Даны уравнения $x+2y-3=0$, $x+y-2=0$ двух сторон треугольника и уравнение $5x+6y-15=0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны.

10.18. В треугольнике ABC известны координаты вершин A(3,-7), B(2,-5), C(5,-1). Найти угол между сторонами AB и AC и составить уравнение средней линии, параллельной стороне BC.

10.19. Даны середины сторон треугольника $M_1(1,1)$, $M_2(3,1)$ и $M_3(2,-1)$. Найти уравнения сторон треугольника.

10.20. Даны стороны треугольника $2x+3y+12=0$, $7x-13y+89=0$ и $11x-7y+19=0$. Найти координаты центра тяжести треугольника.

10.21. Составить уравнение сторон треугольника ABC, если известны координаты его вершин A(-2,1), B(6,3) и точка пересечения его высот M(5,1).

10.22. Даны две вершины треугольника $M_1(-10,2)$ и $M_2(6,4)$; его высоты пересекаются в точке $N$ (5,2). Определить координаты третьей вершины $M_3$.

10.23. В параллелограмме ABCД известны уравнения сторон (AД) $y-x+2=0$ и (AB) $5y-x-6=0$ и координаты точки пересечения диагоналей E(0,0). Составить уравнения двух других сторон и диагоналей параллелограмма.

10.24. Вершины треугольника имеют координаты A(2,-2) и B(3,-1). Медианы пересекаются в точке O(1,0). Составить уравнения сторон этого треугольника.

10.25. Даны координаты вершин треугольника $A(-4,-4)$, $B(-3,1)$, $C(4,5)$. Составить уравнение высоты $BK$ и определить острый угол между этой высотой и стороной $BC$.

## Задача 11

Найти угол между плоскостями.

11.1. $x-2y+2z-8=0$, $\quad x+z-6=0$.

11.2. $x+2z-6=0$, $\quad x+2y-4=0$.

11.3. $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $\quad x+y\sqrt{2}-z+3=0$.

11.4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(2,2,-2)$ и параллельной плоскости $x-2y+z-4=0$.

11.5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1,-1,2)$ и перпендикулярной плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

11.6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(0,0,a)$ и перпендикулярной к плоскостям $x-y-z=0$ и $2y=x$.

11.7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,-2,0)$ и $M_2(1,1,2)$ и перпендикулярной к плоскости
$$x+2y+2z-4=0.$$

11.8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1,-1,2)$, $M_2(2,1,2)$, $M_3(1,1,4)$.

11.9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(2,-1,1)$ и перпендикулярной плоскостям $3x+2y-z+4=0$ и $x+y+z-3=0$.

11.10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $(0,-5,0)$ и $(0,0,2)$ и перпендикулярной плоскости $x+5y+2z-10=0$.

11.11. Найти угол прямой $\begin{cases} x=2z-1 \\ y=-2z+1 \end{cases}$ с прямой, проходящей через начало координат и через точку $(1,-1,-1)$.

11.12. Найти угол между прямыми:
$$\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x+3y-z-6=0. \end{cases}$$

11.13. Показать, что прямая $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} x=z+1 \\ y=1-z. \end{cases}$

II.14. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-4,3,0)$ и параллельной прямой

$$\begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}.$$

II.15. Найти проекцию точки $A(-2,3,1)$ на прямую

$$\begin{cases} x+3y+z-1=0 \\ 3x+5y-z+5=0 \end{cases}.$$

II.16. Найти проекцию точки $A(3,2,4)$ на плоскость

$$2x+y+3z-6=0.$$

II.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-3}$ и точку $A(2,3,0)$.

II.18. Найти угол между прямыми:

$$\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ z=3x \end{cases}.$$

II.19. Найти угол между плоскостью $x-y+\sqrt{2}z-5=0$ и плоскостью $(yz)$.

II.20. Найти плоскость, зная, что точка $P(3,-6,2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

II.21. Даны две точки $A(1,3,-2)$ и $B(7,-4,4)$. Через точку $B$ провести плоскость, перпендикулярную к отрезку $AB$.

II.22. Через точку $M(-5,16,12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось $x$, другая - ось $y$. Вычислить угол между этими двумя плоскостями.

II.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям:

$$2x-y+5z+3=0 \quad \text{и} \quad x+3y-z-7=0.$$

II.24. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины $Д(5,2,6)$ треугольной пирамиды $ABCД$ на основание $ABC$, если $A(1,1,6)$; $B(1,2,7)$; $C(3,3,6)$.

II.25. Определить угол между двумя прямыми:

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}.$$

## Задача I2

I2.I. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = -t - 2 \end{cases}$$

параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$

I2.2. Убедиться, что прямые

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

параллельны, и найти расстояние между ними.

I2.3. Найти проекцию прямой $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ на плоскость $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

I2.4. Найти проекцию прямой $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x - y + 3z + 8 = 0$.

I2.5. Найти точку, симметричную точке A(4,3,-I) относительно плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$.

I2.6. Найти плоскость, проходящую через начало координат и через перпендикуляр, опущенный из точки A(I,-I,0) на прямую

$$\begin{cases} x = z + 3 \\ y = -2z - 3. \end{cases}$$

I2.7. Провести плоскость через точку (-3,2,5) и через проекции этой точки на плоскости $4x + y - 3z - 1 = 0$ и $x - 2y + z - 4 = 0$.

I2.8. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2},$$

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

I2.9. На прямой $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$ найти точку, ближайшую к точке B(3,2,6).

12.10. Найти расстояние точки P(7,9,7) от прямой
$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

12.11. Через прямую $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x+y-z+15=0$.

12.12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ и параллельной прямой $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$.

12.13. Даны две параллельные прямые $\frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}$. Написать уравнение плоскости, которая определяется этими прямыми.

12.14. Провести плоскость через перпендикуляры, опущенные из точки A(-3,2,5) на плоскости
$$4x+y-3z+13=0,$$
$$x-2y+z-11=0.$$

12.15. Проверить, что прямые $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$ и $\frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}$ пересекаются, и написать уравнение плоскости, через них проходящей.

12.16. Найти плоскость, проходящую через точку P(4,-3,1) и параллельную прямым $\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$ и $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$.

12.17. Через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x+4y-3z+7=0$.

12.18. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2},\qquad \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}.$$

12.19. Найти точку N, симметричную точке M(4,-3,1) относительно плоскости $x+2y-z-3=0$.

12.20. Найти расстояние от точки P(2,3,-1) до прямой
$$\begin{cases}2x-2y+z+3=0\\3x-2y+2z+17=0.\end{cases}$$

12.21. Найти проекцию точки M(5,2,-1) на плоскость
$$2x-y+3z+23=0.$$

12.22. Найти проекцию точки M(3,2,6) на прямую
$$\frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}.$$

12.23. Найти расстояние от точки B(2,3,-1) до прямой
$$\begin{cases} x=3t+5 \\ y=2t \\ z=-2t-25. \end{cases}$$

12.24. Найти проекцию прямой $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x-y+3z+8=0$.

12.25. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (-1,2,-3) и перпендикулярной к прямой $\begin{cases} x=2 \\ y-z=1 \end{cases}$.

## Задача 13

Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что:

13.1. Расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось равна 3.

13.2. Большая полуось равна 6, $\varepsilon=0{,}5$.

13.3. Расстояния одного из фокусов до концов большой оси равны 5 и 1.

13.4. Малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13.

13.5. Расстояние между директрисами равно 32, $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что:

13.6. Расстояния одной из ее вершин от фокусов равны 9 и 1.

13.7. Расстояние между фокусами равно 10, между вершинами равно 8.

13.8. Вещественная полуось равна $2\sqrt{5}$, $\varepsilon=\sqrt{1{,}2}$.

13.9. Расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось $2b=6$.

13.10. Расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$, $\varepsilon=\frac{3}{2}$.

Написать уравнение параболы:

13.11. Проходящей через точки (1,-3), (0,0) и симметричной относительно оси OX.

13.12. Проходящей через точки $(2,-4)$, $(0,0)$ и симметричной относительно оси $OY$.

13.13. Проходящей через точки $(-1,2)$, $(0,0)$ и симметричной относительно оси $OX$.

13.14. Проходящей через точки $(3,9)$ и $(0,0)$ и симметричной относительно оси $OY$.

13.15. Проходящей через точки $(0,3)$, $(4,-5)$ и симметричной относительно оси $OY$.

13.16. Проходящей через точки $(0,3)$, $(1,0)$ и симметричной относительно оси $OX$.

**Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:**

13.17. $y=-1+\sqrt{x+1}$; 13.18. $x=-3-\sqrt{y-2}$;

13.19. $x=1+\sqrt{4-y}$; 13.20. $y=1+\sqrt{x^2-4x-5}$;

13.21. $x=1-2\sqrt{y^2+4y+8}$; 13.22. $y=1+\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$;

13.23. $y=-1-\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$ 13.24. $x=1+2\sqrt{-5-6y-y^2}$;

13.25. $x=-\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$.

## Задача 14

Составить уравнение линии, точки которой равноудалены от точки $A(x_0, y_0)$ и прямой $y=b$. Полученное уравнение привести к каноническому виду и построить линию.

14.1. $x_0=3$, $y_0=2$, $b=-4$. 14.2. $x_0=-3$, $y_0=-1$, $b=3$.

14.3. $x_0=2$, $y_0=1$, $b=-3$. 14.4. $x_0=-2$, $y_0=5$, $b=1$.

14.5. $x_0=4$, $y_0=-2$, $b=4$.

Составить уравнение линии, отношение расстояний точек которой до данной точки $A(x_0, 0)$ и до данной прямой $x=a$ равно $d$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить линию.

14.6. $x_0=3$, $a=12$, $d=\frac{1}{2}$. 14.7. $x_0=10$, $a=6{,}4$, $d=\frac{5}{4}$.

14.8. $x_0=4$, $a=1$, $d=2$. 14.9. $x_0=8$, $a=4{,}5$, $d=\frac{4}{3}$.

14.10. $x_0=-6$, $a=-\frac{8}{3}$, $d=\frac{3}{2}$. 14.11. $x_0=12$, $a=\frac{16}{3}$, $d=\frac{3}{2}$.

14.12. $x_0=2$, $a=8$, $d=\frac{1}{2}$. 14.13. $x_0=-4$, $a=-9$, $d=\frac{2}{3}$.

I4.I4. $x_0 = -4,\ a = -9,\ d = \frac{2}{3}$. I4.I5. $x_0 = 4,\ a = 16,\ d = \frac{1}{2}$.

I4.I6. $x_0 = -3,\ a = -\frac{25}{3},\ d = \frac{3}{5}$.

Составить уравнение линии, отношение расстояний точек которой до данной точки $A(0, y_0)$ и до данной прямой $y = b$ равно $d$. Полученное уравнение упростить и построить линию.

I4.I7. $y_0 = 10,\ b = 6{,}4,\ d = \frac{5}{4}$. I4.I8. $y_0 = 4,\ b = 1,\ d = 2$.

I4.I9. $y_0 = 8,\ b = 4{,}5,\ d = \frac{4}{3}$. I4.20. $y_0 = 2,\ b = 8,\ d = \frac{1}{2}$.

I4.2I. $y_0 = 2,\ b = 12{,}5,\ d = \frac{2}{5}$. I4.22. $y_0 = -4,\ b = -9,\ d = \frac{2}{3}$.

I4.23. $y_0 = 4,\ b = 16,\ d = \frac{1}{2}$. I4.24. $y_0 = -3,\ b = -\frac{25}{3},\ d = \frac{3}{5}$

I4.25. $y_0 = -6,\ b = -\frac{8}{3},\ d = \frac{3}{2}$.

## Задача I5

Привести уравнение линии к каноническому виду.

I5.I. $34x^2 + 24xy + 41y^2 = 250$.

I5.2. $4x^2 - 20xy - 11y^2 = 288$.

I5.3. $37x^2 - 18xy + 13y^2 = 200$.

I5.4. $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$.

I5.5. $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 100$.

I5.6. $7x^2 - 24xy - 38y^2 = 410$.

I5.7. $11x^2 - 20xy - 4y^2 = 144$.

I5.8. $5x^2 + 4xy + 8y^2 = 72$.

I5.9. $14x^2 - 24xy + 21y^2 = 150$.

I5.I0. $38x^2 + 24xy - 7y^2 = 820$.

I5.II. $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$.

I5.I2. $41x^2 - 24xy + 34y^2 = 500$.

I5.I3. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 64$.

I5.I4. $8x^2 - 4xy + 8y^2 = 144$.

15.15. $21x^2+24xy+14y^2=300.$

15.16. $8x^2-12xy+17y^2=200.$

15.17. $x^2+6xy+y^2=20.$

15.18. $3x^2+2xy+3y^2=24.$

15.19. $7x^2-4xy+7y^2=45.$

15.20. $7x^2+8xy+7y^2=66.$

15.21. $13x^2+18xy+37y^2=400.$

15.22. $x^2-6xy+y^2=48.$

15.23. $7x^2-8xy+7y^2=33.$

15.24. $7x^2+4xy+7y^2=90.$

15.25. $3x^2-2xy+3y^2=16.$

## ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 2

## ПРЕДЕЛЫ

### Теоретические упражнения

1. Сформулировать на языке "$\varepsilon-\delta$" предложение: "Число B не является пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$ (при условии, что $f(x)$ определена в окрестности $x=a$ )".

2. Докажите, что если $f(x)$ - периодическая функция, определенная на всей числовой оси и отличная от постоянной, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ не существует.

3. Докажите, что:

а) если $\lim(f(x)+g(x))$ существует, то предел каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$ может и не существовать;

б) если $\lim g(x)$ существует и отличен от нуля, а $\lim f(x)$ не существует, то $\lim f(x)\cdot g(x)$ не существует.

4. Сформулируйте определение функции, неограниченной вблизи точки $x=a$ ; при $x\to\infty$ . Какие из утверждений верны:

а) всякая бесконечно большая при $x\to a$ ( $x\to\infty$ ) функция неограничена вблизи $x=a$ (при $x\to\infty$ );

б) всякая функция, неограниченная при $x\to\infty$ ( $x\to a$ ), является бесконечно большой при $x\to\infty$ (вблизи $x=a$ ).

5. Исследуйте предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$,

где $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$,

$Q(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$

- многочлены.

6. Исследуйте пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^x$ при различных положительных $a$ и $b$.

7. Какие из утверждений верны:

а) если $f(x)$ - непрерывна в точке $x=a$, а $g(x)$ - разрывна в той же точке, то $f(x)+g(x)$ - разрывна;

б) при тех же условиях - $f(x)\cdot g(x)$ разрывна;

в) если $f(x)$ и $g(x)$ - обе разрывны, то $f(x)+g(x)$ - разрывна;

г) если $f(x)$ - разрывна, то $f^2(x)$ может быть непрерывна;

д) если $|f(x)|$ - непрерывна, то $f(x)$ - непрерывна.

8. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна при $x=a$ и $f(x)>0$, то найдется окрестность точки $x=a$, в которой $f(x)>0$ (теорема о сохранении знака).

9. Докажите непрерывность функций $y=x^n$, $y=\sin x$, $y=e^x$.

10. Нарисуйте схематично графики функций, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $f(x)$ непрерывная, возрастающая и отрицательная на всей числовой оси; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

б) $f(x)$ определена и непрерывна при $x\in\,]-1,1[$ ; нечетна; $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$.

в) $f(x)$ - периодическая, T = 2 (наименьший период), четна, при $x\in\,]-1,1[$ непрерывна, $x = 1$ - точка разрыва типа скачка;

г) $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$,

при $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$ непрерывна;

д) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 4\pm 0} f(x)=1$, $f(4)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$, непрерывна всюду, кроме $x = 1$ и $x = 4$.

11. Постройте графики функций: а) $y=\frac{\sin x}{x}$; б) $y=x\sin x$; в) $y=\sin\frac{\pi}{x}$; г) $y=x\sin\frac{\pi}{x}$. Охарактеризуйте с их помощью поведение функции при $x\to 0$ и при $x\to\infty$.

12. Исследуйте характер точки $x=a$ разрыва функции $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$.

## Вариант 1

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\frac{3}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$; 3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7$.

6. Исследовать функцию на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-5}$; б) $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$;

в) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 1\\ \frac{2}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$. 8. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$. 9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$.

10. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\ln x}$. 11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$. 12. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{4\cos 3x+x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$

## Вариант 2

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n+1}=2$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=6$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, б) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$,

в) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+5), & x\le1\\ x-3, & x>1.\end{cases}$

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$. 8. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$. 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos10x}{e^{x^2}-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$. 11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\sin x-\cos2x}{\sin^2x}$.

12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin x+(2x-\pi)\sin\dfrac{x}{2x-\pi}}$.

## Вариант 3

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+4}{2n+1}=\dfrac{7}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{2n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}=-7$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$;

в) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<2; \\ x^2-1, & x\geq 2. \end{cases}$

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$. 11. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$. 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}$.

## Вариант 4

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}=10$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+3}$; в) $f(x)=2+2^{\frac{1}{x}}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$. 11. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\ln x-\ln a}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x\cdot\cos\frac{1}{x}+\lg(2+x)}{\lg(4+x)}$.

## Вариант 5

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n-1}{n+1} = 7$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2+x-1}{x+\frac{1}{2}} = -5$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{\sin x}, & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}; \\ x^2, & x>\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{5x^2-3x}{2x}$; в) $f(x)=\dfrac{1}{3+3^{\frac{1}{x-1}}}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$. 8. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$. 9. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{4x}{\operatorname{tg}[\pi(2+x)]}$.

10. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$. 11. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

12. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}+\sin\frac{n}{n^2+1}\cos n}{1+\cos\frac{1}{n}}.$$

## Вариант 6

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2} = \dfrac{4}{3}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{9+n^2}}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2-x-1}{x-\frac{1}{2}} = 5$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер очек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}$; б) $f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x, & x<0; \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

в) $f(x) = \frac{2\,|x-1|}{x^3 - x^2}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$. 8. $\lim\limits_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{tg[2\pi(x+\frac{1}{2})]}$.

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{tg\,3x}{tg\,x}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x}$.

Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{2+n^5} - \sqrt{2n^3+3}}{(n+\sin n)\sqrt{n}}.$$

## Вариант 7

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9-n^3}{1+2n^3} = -\frac{1}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+3} - n\right]$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{x+\frac{1}{3}} = -6$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x\leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$; б) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-2}}}$; в) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$. 8. $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + (4x-\pi)\cos\frac{x}{4x-\pi}}{\lg(2+\operatorname{tg} x)}$.

## Вариант 8

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-3}{2n+1} = 2$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^4-2}}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right]$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; б) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2-2x+1}, & x<1; \\ 2x+1, & x>1; \end{cases}$

в) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2}-1}{x}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x-e^{-x})}{e^{x^2+1}-e}$.

12. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n^2+1}\cdot \operatorname{arctg}\frac{n}{n^2+1}\right).$$

## Вариант 9

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{2+4n^2} = -\frac{1}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$.  3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \frac{3x^2-2x-1}{x+\frac{1}{3}} = -4$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$; б) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$; в) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$. 9. $\lim\limits_{x\to0} \frac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.  11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

12. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-\sqrt{3n^5-7}}{(n^2-n\cos n+1)\sqrt{n}}.$$

## Вариант 10

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-5n}{n+1} = -5$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$.  3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\,(n-1)}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to-1} \frac{7x^2+8x+1}{x+1} = -6$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$; б) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$; в) $f(x)=\dfrac{1}{3-3^{\frac{1}{x}}}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin[2\pi(x+10)]}$. 10. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

12. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sin n+\sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n+1}}.$$

## Вариант II

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{1-2n}=-\dfrac{1}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=2$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5-x}$; б) $f(x)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{x+\frac{1}{x}}$;

в) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1\\ \dfrac{2}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin[\pi(x+7)]}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$. 11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$.

12. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\cos n)\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}.$$

## Вариант 12

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-5}=\dfrac{2}{3}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^5+5n+7}{2n^5+5n+3}\right)^n$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-\frac{1}{2}}=-5$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\ln\frac{1}{x}}$; в) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+5), & x\le 1\\ 3-x, & x>1\end{cases}$

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\frac{5}{2}\pi\right)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x^2}$. 10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(2+\sqrt{\operatorname{arctg}x\,\sin\frac{1}{x}}\right)$.

## Вариант 13

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n^2}{n^2+3}=-2$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right]$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-5x+1}{x-\frac{1}{3}}=-1$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}$, б) $f(x)=-\dfrac{x^3+1}{x+1}$, в) $f(x)=\begin{cases}2-x, & x<2\\ x^2-1, & x\geq 2\end{cases}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\,\mathrm{arctg}\,3x}$. 10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$.

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2x}{x\sin 3x}$. 12. $\lim\limits_{x\to-2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\pi x}{4+(x+2)\sin\frac{x}{x+2}}}$.

## Вариант 14

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{2-n^2}=-3$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{n}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to-\frac{7}{5}}\dfrac{10x^2+9x-7}{x+7/5}=-19$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\frac{|x+2|}{x+2}-x$ ; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{-3-x}$ ; в) $f(x)=2+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$. 8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right]}$.

10. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$.

12. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^4-3}+\sin n}.$$

## Вариант 15

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{2}}\frac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\frac{1}{2}$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\begin{cases}\frac{|\cos x|}{\cos x}, & 0<x<\pi\\ x^2, & x>\pi\end{cases}$ ; б) $f(x)=\frac{3x-5x^2}{2x}$; в) $f(x)=\frac{1}{7+3^{\frac{1}{7-x}}}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$. 8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}\pi x}$  11. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$ $(x>0)$

12. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+\cos n}+\sqrt{3n^2+2}}{\sqrt[5]{n^6+1}}.$$

## Вариант 16

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3}{n^3-1}=3$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt[4]{n})\sqrt{n^2-5}}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3-x}$; б) $f(x)=\begin{cases}4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x, & x>0\\ 2-x, & x\le 0\end{cases}$ в) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$. 8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg}x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$. 11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_x a}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+3}{2-\lg(1+\sin x)}$.

## Вариант 17

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+2n}{1-3n}=-\dfrac{2}{3}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+2}{1+2+3+\ldots+n}-\dfrac{2}{3}\right]$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{6x^2+x-1}{x-\frac{1}{3}}=5$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x<1 \\ \frac{1}{1-x}, & x>1 \end{cases}$ б) $f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{2-x}}}$; в) $f(x)=\frac{\cos x}{|\cos x|}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.

8. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5}{2}x\cos x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg}x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\operatorname{arctg}x\sin^2\frac{1}{x}+5\cos x}$.

## Вариант 18

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+15}{6-n}=-5$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[6]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{6x^2-75x-39}{x+\frac{1}{2}}=-81$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^2-2x+1}, & x<1, \\ 1-2x, & x\geq 1. \end{cases}$

в) $f(x)=\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$; $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$. 8. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$. 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x-\cos x}{1-\cos x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos2x}$. 11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$. 12. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{4\cos x+\sin\frac{1}{x}\ln(1+x)}$.

## Вариант 19

1. Доказать, что $\lim\dfrac{3-n^2}{1+2n^2}=-\dfrac{1}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}=23$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-1}$; в) $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x\le1,\\ x-3, & x>1.\end{cases}$

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$. 8. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{x}{4}}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}-\sqrt{2x}}$. 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$.

10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin5x-\sin6x}$. 11. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

12. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{2\cos^2x+(e^x-1)\sin\frac{1}{x}}$.

## Вариант 20

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2-3n}=-\dfrac{2}{3}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$ ), что $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5x^2-24x-5}{x-5}=26$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$, $-\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}$ в) $f(x)=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x}}-3}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{\sqrt[3]{\frac{x}{9}}-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$. 10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+\ln\left(e+x\sin\frac{1}{x}\right)}{\cos x+\sin x}$.

## В а р и а н т 21

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{5n+1}=\dfrac{3}{5}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}\right]$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$ ), что $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}=-13$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\begin{cases}6-5x, & x\le 1;\\ x-3, & x>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-3)}$; в) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x+1}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.
8. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{x}{16}}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2}x-\sqrt{3x^2-5x+2})}$

11. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[(e^{x^2}-\cos x)\cos\frac{1}{x}+\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{3})\right]$.

## Вариант 22

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-3}{2n+1}=2$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\ldots+(5n-3)}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x+4}=-10$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}e^{x-2}, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$; в) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\ln(1+x)\sqrt{2+\cos\frac{1}{x}}}{2+e^x}$.

## Вариант 23

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}=-\dfrac{1}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^{2/7}(n-5)^2}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{9}{64}+\ldots+\dfrac{1+2^n}{4^n}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-x-1}{3x+1}=-\dfrac{5}{3}$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1,\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}-1}$;

в) $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 1, & x>0;\end{cases}$

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin\left[\pi\left(\frac{x}{2}+1\right)\right]}$.

10. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$.

11. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin\pi x}$.

12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos 2\pi x}{2+\left(e^{\sqrt{x-1}}-1\right)\operatorname{arctg}\frac{x+2}{x-1}}$.

## Вариант 24

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{10n-3}=\dfrac{1}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-\sqrt{n(n-1)}\right]$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^n$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+2x-15}{x+5}=-8$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 1;\\ x^2+1, & x>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$; в) $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8+3x-x^2}-2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$. 10. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{(e^{\sin x}-1)\cos\frac{1}{x}+4\cos x}$.

## Вариант 25

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-2n}{3+4n}=-\dfrac{1}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+5+9+13+\ldots+(4n-3)}{n+1}-\dfrac{4n+1}{2}\right]$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.

5. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}=8$.

6. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и сделать схематический чертеж:

а) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+5)}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+1}; & x\le 0\\ 1; & x>0\end{cases}$ в) $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{x-1}$.

Найти пределы функций:

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$.

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(1+x)}{\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)+2}$.

## ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

### Теоретические вопросы

1. Понятие производной. Производная функция $x^n$.

2. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

3. Понятия дифференцируемости функции и дифференциала. Условие дифференцируемости. Связь дифференциала с производной.

4. Непрерывность дифференцируемой функции.

5. Геометрический смысл дифференциала.

6. Производные высших порядков. Формула Лейбница.

7. Инвариантность формы дифференциала.

8. Условия возрастания функции на замкнутом промежутке.

9. Условия убывания функции на замкнутом промежутке.

10. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума.

11. Достаточный признак экстремума функции (изменение знака первой производной).

12. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на замкнутом промежутке.

13. Выпуклость и вогнутость графика фунции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости.

14. Точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.

15. Исследование функций на экстремум с помощью высших производных.

16. Асимптоты графика функции.

### Теоретические упражнения

1. Доказать, что если $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$

то производная $f'(0)$ не существует.

2. Доказать, что производная от функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$.

3. Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x)+g(x)$ в точке $x=x_0$, если в этой точке:

а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ не дифференцируема;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы.

4. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ и $f(x_0)\neq 0$ а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке.

Доказать, что произведение $f(x)\,g(x)$ является недифференцируемым в точке $x_0$.

5. Что можно сказать о дифференцируемости произведения в предположениях задачи 3?

Рассмотреть примеры:

а) $f(x)=x$; $g(x)=|x|$, $x_0=0$;

$f(x)=x$, $g(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \; x_0=0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

б) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|$, $x_0=0$;

$f(x)=|x|$, $g(x)=|x|+1$, $x_0=0$.

6. Исходя из определений минимума и максимума, доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ минимум, а функция

$$f(x)=\begin{cases} x\,e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

не имеет в точке $x = 0$ экстремума.

7. Исследовать знаки максимума и минимума функции $x^3-3x+q$ и выяснить условия, при которых уравнение $x^3-3x+q=0$ имеет:

а) три различных действительных корня;

б) один действительный корень.

## Вариант I

I. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y=\frac{4x-x^2}{4}, \quad x_0=2.$$

2. Вычислить приближенно $y=\sqrt[3]{x}$ при $x = 7{,}99$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на замкнутом промежутке

$$y=x^2+\frac{16}{x}-16 \; ; \qquad 1\le x\le 4.$$

4. Число 150 разложить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как I:4, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

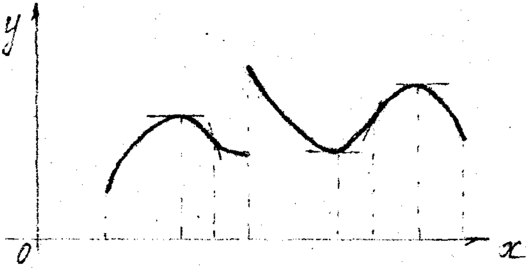
$$y=4x-x^2-2\cos(x-2)\; ; \qquad x_0=2.$$

6. Найти асимптоты $\quad y=\dfrac{17-x^4}{4x-5}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y=x^4e^{-2x^2}$; б) $y=\dfrac{x}{(x+2)^2}$; в) $y=2x-3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант 2

I. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y=2x^2+3x-1\; ; \qquad x_0=-2.$$

2. Вычислить приближенно $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$ при $x = 1{,}012$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$, $1 \le x \le 4$.

4. Число 204 разложить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:7, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

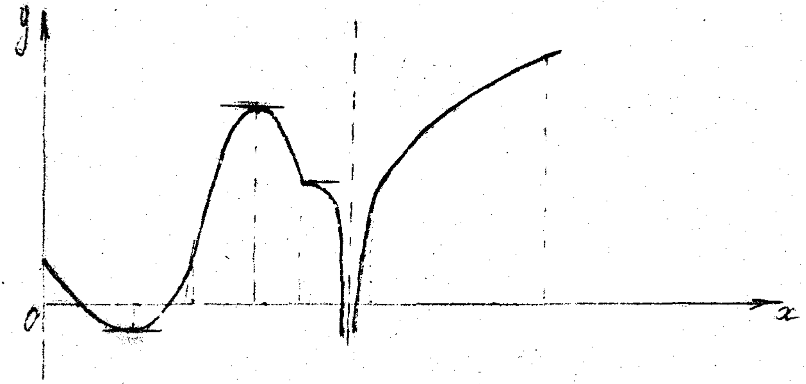
$$y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x, \quad x_0 = 2.$$

6. Найти асимптоты $y = \frac{x^2+1}{4x^2-3}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \frac{x^3}{12(x-2)}$; в) $y = \sin x + \cos 2x$ $[0; \frac{\pi}{2}]$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




Вариант 3

1. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = x - x^3; \quad x_0 = -1.$$

2. Вычислить приближенно $y = \frac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2}$ при $x = 0{,}98$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$; $0 \le x \le 6$.

4. Число 300 разложить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:9, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

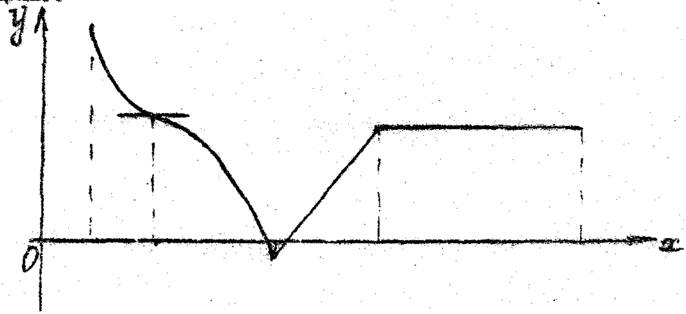
$$y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1, \qquad x_0 = 0.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = \sqrt[3]{x^2}\, e^x$; б) $y = 1 + \dfrac{4x-1}{x^2}$; в) $y = x e^{-x}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




Вариант 4

1. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32; \qquad x_0 = 4.$$

2. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 27{,}04$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = \dfrac{2(x^2+3)}{x^2 - 2x + 5}$; $-3 \le x \le 3$.

4. Две капли с начальными массами 5 и 6 начинают падать под действием силы тяжести, равномерно испаряясь с коэффициентом пропорциональности $k = \frac{1}{3}$. В какой момент времени общая кинетическая энергия этих капель будет наибольшей?

5. Исследовать поведение функции в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

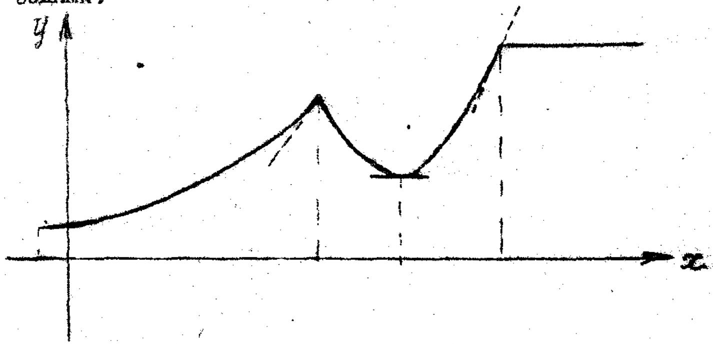
$$y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1);\quad x_0 = 1.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{4x^2+9}{4x+8}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = e^{-x}(x+4)$; б) $y = x\sqrt[3]{(x-1)^2}$; в) $y = 2\sin x + \cos 2x$, $[0; 2\pi]$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## В а р и а н т 5

1. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = x + \sqrt{x^3},\quad x_0 = 1.$$

2. Вычислить приближенно $y = \arcsin x$ при $x = 0{,}08$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = 2\sqrt{x} - x$, $0 \le x \le 4$.

4. Две капли с начальными массами 2 и 5 начинают падать под действием силы тяжести, равномерно испаряясь с коэффициентом про-

порциональности $k = \frac{1}{3}$. В какой момент времени общая кинетическая энергия этих капель будет наибольшей?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

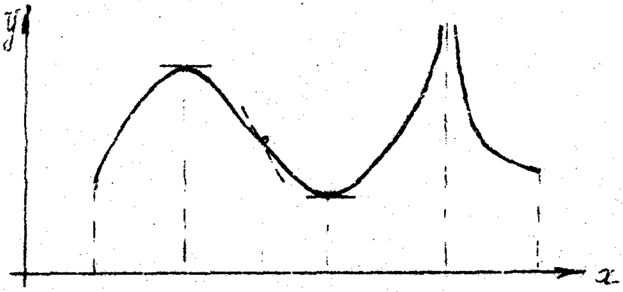
$$y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x, \quad x_0 = -1.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = 1 - \sqrt[3]{(x+4)^2}$; б) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$; в) $y = \sin x - \frac{1}{2}\cos 2x$, $[-\pi; \pi]$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант 6

1. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = \sqrt[3]{x^2} - 2, \quad x_0 = -8.$$

2. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$ при $x = 0{,}97$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке

$$y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}; \qquad -1 \le x \le 5.$$

4. Две капли с начальными массами 3 и 7 начинают падать под действием силы тяжести, равномерно испаряясь с коэффициентом про-

порциональности $k = \frac{1}{3}$. В какой момент времени общая кинетическая энергия этих капель будет наибольшей?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

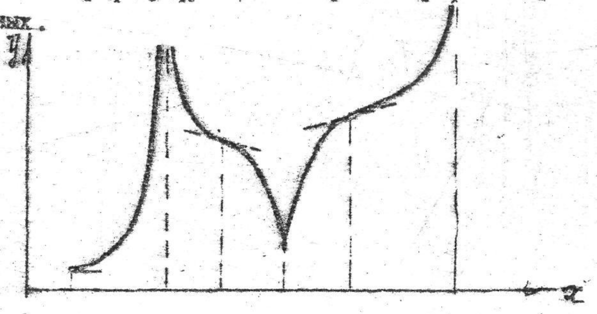
$$y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3, \quad x_0 = 1.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{x^2 - 3x}{3x^2 - 2}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$; б) $y = \dfrac{x - 0{,}5}{(x+2)^2}$; в) $y = 2 + \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант 7

1. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 4.$$

2. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 26{,}96$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке

$$y = x - 4\sqrt{x} + 5, \qquad 1 \le x \le 9.$$

4. Через точку P(1;4) провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

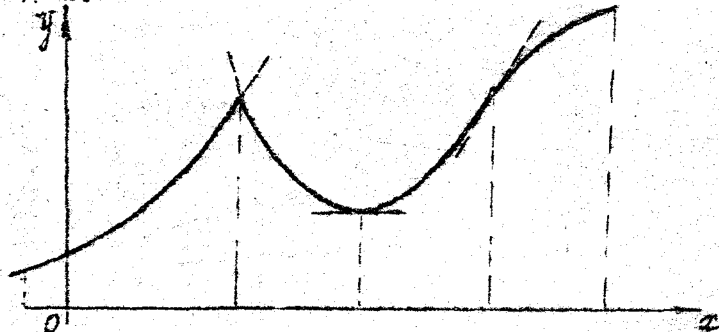
$$y=1-2x-x^2-2\cos(x+1),\quad x_0=-1.$$

6. Найти асимптоты $y=\dfrac{2x^2-6}{x-2}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=x+\dfrac{4}{x+2}$; в) $y=e^x(x^2+1)$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант 8

1. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y=8\sqrt[4]{x}-70,\quad x_0=16.$$

2. Вычислить приближенно $y=\sqrt{x^2+x+3}$ при $x$ = 1,97.

✓ 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке

$$y=\frac{10x}{1+x^2};\qquad 0\le x\le 3.$$

4. Через точку P(1;9) провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

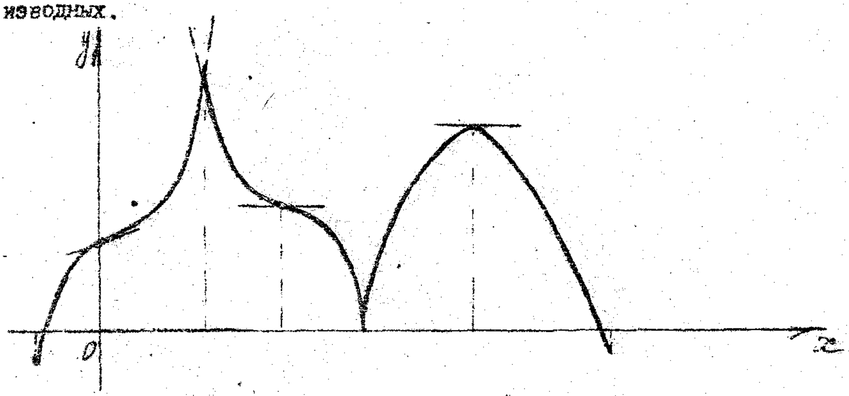
$$y = x^2+6x+8-2e^{x+2}; \quad x_0=-2.$$

✓ 6. Найти асимптоты $y=\dfrac{2x^3+2x^2-3x-1}{2-4x^2}$.

✓ 7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y=3\sqrt[3]{(x+1)^2}-2x$; б) $y=\dfrac{x^3}{2-3x}$; в) $y=x^2(\ln x-1)$.

✓ 8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант 9

1. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $y=2x^2-3x+1$; $x_0=1$.

2. Вычислить приближенно $y=x^{11}$ при $x=1,021$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$; $2\le x\le 4$.

4. Через точку P(6;1,5) провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

$$y=(x+1)\sin(x+1)-2x-x^2;\quad x_0=-1.$$

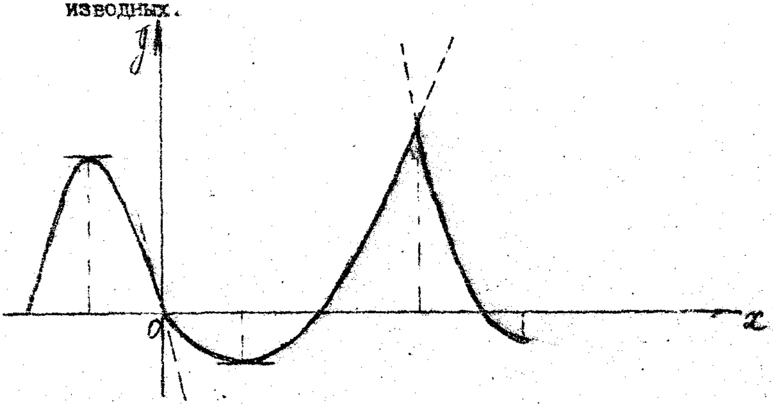
6. Найти асимптоты $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}+1$; б) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$;

в) $y=x^2(\ln x-3)$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант 10

1. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y=\frac{x^2-3x+6}{x^2};\quad x_0=3.$$

2. Вычислить приближенно $y=\sqrt[3]{x}$ при $x=1{,}01$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке

$$y=3-x-\frac{4}{(x+2)^2};\quad -1\le x\le 2.$$

4. Через точку P(0,5;2) провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

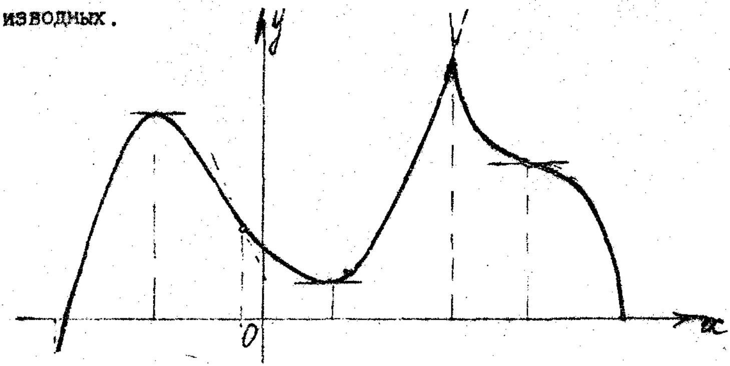
$$y = 6e^{x-1} - 3x - x^3; \quad x_0 = 1.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = (x+1)^3 \sqrt[3]{x^2}$; б) $y = 2x - 1 + \dfrac{1}{x+2}$; в) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант II

I. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}; \quad x_0 = 64.$$

2. Вычислить приближенно $y = x^{21}$ при $x = 0{,}998$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$; $-1 \le x \le 6$.

4. По взаимно перпендикулярным улицам к перекрестку движутся две машины со скоростями 30 км/ч и 40 км/ч. В некоторый момент времени они находились на расстоянии I0 км от перекрестка. Через какое время после этого расстояние между машинами будет наименьшим?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков.

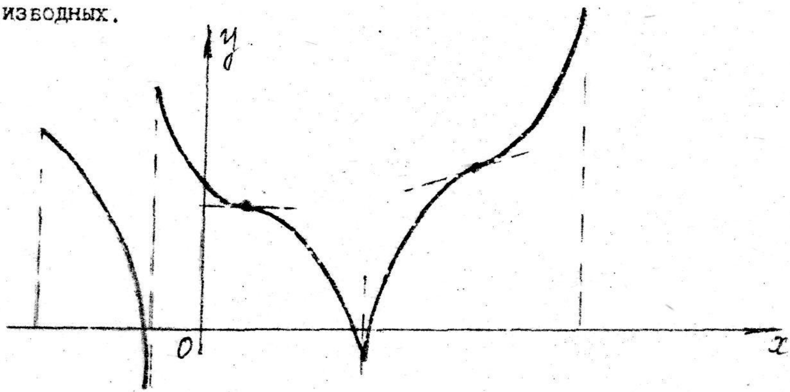
$$y = 2x + x^2 - (x+1)\ln(x+2); \quad x_0 = -1.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{2 - x^2}{9x^2 - 4}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = 2x - 3\sqrt[3]{(x-1)^2}$; б) $y = \dfrac{x-2}{(x+3)^2} - 1$; в) $y = x^2 e^{-x}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант I2

I. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2}; \quad x_0 = 2.$$

2. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x^2}$ при $x = 1{,}03$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = 2\,\dfrac{-x^2 + 7x - 7}{x^2 - 2x + 2}; \; 1 \le x \le 4$.

4. По взаимно перпендикулярным улицам к перекрестку движутся две машины со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. В некоторый момент времени они находились на расстоянии 10 км от перекрестка. Через какое время после этого расстояние между машинами будет наименьшим?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

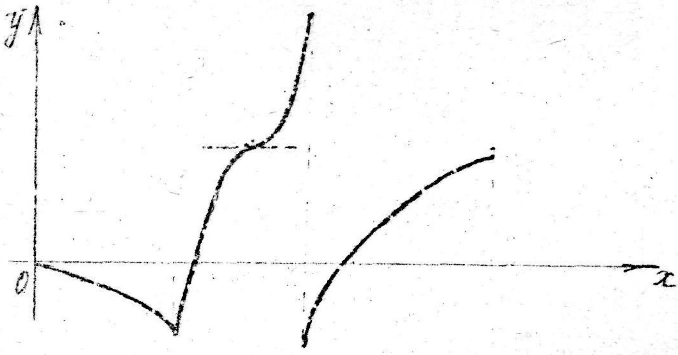
$$y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2; \qquad x_0 = -1.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = x^2 \ln x$; б) $y = \dfrac{e^x}{x-2}$; в) $y = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




Вариант 13

1. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = 2x^2 + 3; \qquad x_0 = 1.$$

2. Вычислить приближенно $y = x^6$ при $x = 2{,}01$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$, $-1 \le x \le 7$.

4. По взаимно перпендикулярным улицам к перекрестку движутся две машины со скоростями 30 км/ч и 50 км/ч. В некоторый момент времени они находились на расстоянии 10 км от перекрестка. Через какое время после этого расстояние между машинами будет наименьшим?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

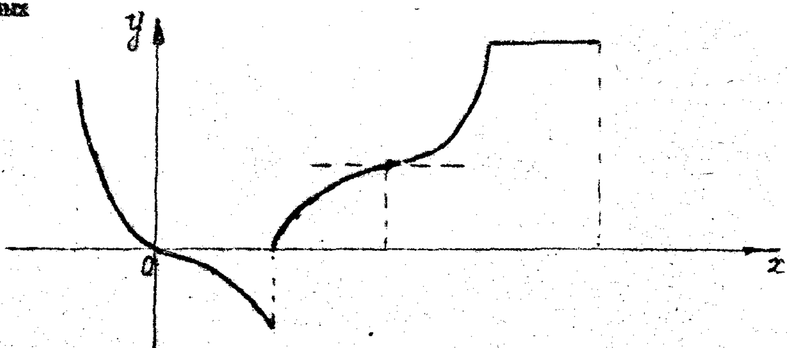
$$y = x + 4x + \cos^2(x+2); \qquad x_0 = -2.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{3x^2-7}{2x+1}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график

а) $y = (1-x^2)^{2/3}$; б) $y = \dfrac{x^3}{2-3x}$; в) $y = x^2(\ln x - 1)$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных




## Вариант 14

1. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = \frac{x^{2l}+6}{x^4+1}, \qquad x_0 = 1.$$

2. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 8{,}04$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$; $1 \le x \le 5$.

4. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 36 см$^3$, причем стороны основания относились бы как 1:3. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

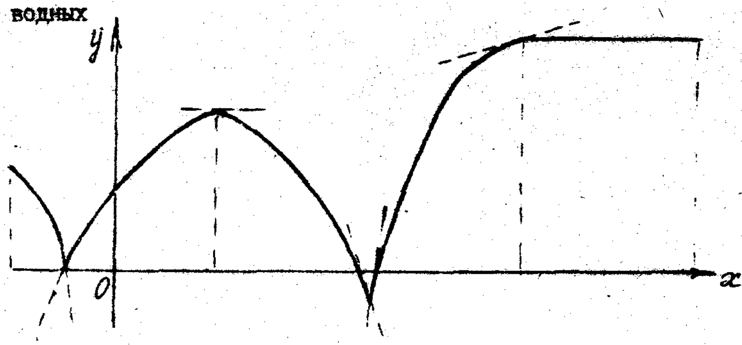
$$y = x^2 + 2\ln(x+2)\ ; \quad x_0 = -1 .$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{x^2+16}{9x^2-8}$ .

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = \dfrac{e^x}{x}$ ; б) $y = \dfrac{4x}{(x-2)^2}$ ; в) $y = 2\sin x + \cos 2x$ , $[0, 2\pi]$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных




## Вариант 15

1. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$ $\quad y = 2x + \dfrac{1}{x} \qquad x_0 = 1.$

2. Вычислить приближенно $y = x^7$ при $x$ = 1,998.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на замкнутом промежутке $\quad y = \dfrac{4x}{4+x^2}$ ; $\quad -4 \le x \le 2.$

4. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см$^3$, причем стороны основания относились бы как I:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

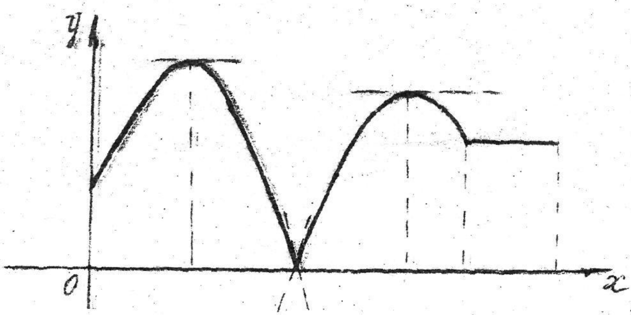
$$y = 4x - x^2 + (x-2)\sin(x-2); \qquad x_0 = 2.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = (x+1)^2 \cdot e^{2x}$; б) $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; в) $y = e^{\sqrt[3]{x^2}}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант Iа

1. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = -\frac{2(x^3+2)}{3(x^4+1)}; \qquad x_0 = 1.$$

2. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 7,94$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8; \qquad -4 \le x \le -1.$$

4. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 288 см$^3$, причем стороны основания относились бы как I:3. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

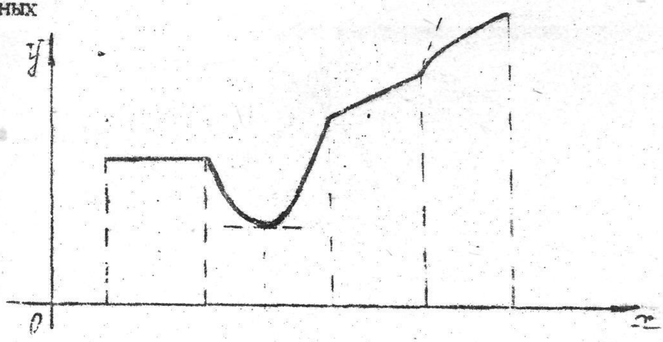
$$y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5\ ; \quad x_0 = 0.$$

6. Найти асимптоты $\quad y = \dfrac{21 - x^2}{7x + 9}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = xe^{-2x}$; б) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 9}$; в) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных




## Вариант I7

I. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}\ ; \qquad x_0 = 1.$$

2. Вычислить приближенно $y = \sqrt{4x - 1}$ при $x = 2{,}56$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $\quad y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}\ ; \qquad -2 \le x \le 4.$

4. Напряжение на клеммах электрической цепи, равное первоначально нулю, равномерно возрастает; одновременно в цепи вводится сопротивление, пропорциональное квадрату времени с коэффициентом пропорциональности I Ом/мин. Первоначальное сопротивление цепи равно 4 Ом. В какой момент времени ток в цепи наибольший?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

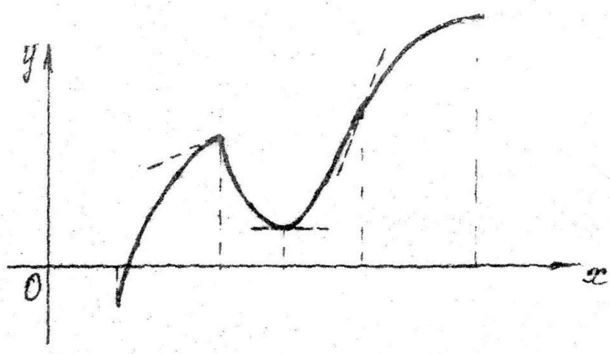
$$y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}\ ; \quad x_0 = 2.$$

6. Найти асимптоты $\quad y = \dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график

а) $y = 2x - \frac{3}{2}\ln(1+x^2)$; б) $y = \dfrac{2-x^2-2x}{x+3}$; в) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$

8. По графику функции построить графики первой и второй производных




## Вариант I8

I. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = \frac{x^{16} - 9}{1 - 5x^2}\ ; \quad x_0 = 1.$$

2. Вычислить приближенно $\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ при $x$ = I,0I6.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $\quad y = \dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}\ ; \quad -2 \le x \le 1.$

4. Напряжение на клеммах электрической цепи, равное первоначально нулю, равномерно возрастает; одновременно в цепь вводится сопротивление, пропорциональное квадрату времени с коэффициентом пропорциональности 2 Ом/мин. Первоначальное сопротивление цепи равно 2 Ом. В какой момент времени ток в цепи наибольший?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

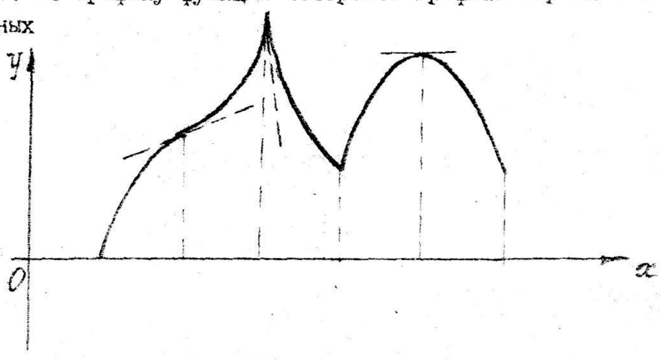
$$y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4\ ; \qquad x_0 = -2.$$

6. Найти асимптоты $\quad y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{1 - 3x^2}.$

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = 2\sqrt[3]{(x-1)^2} - x$ ; б) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$ ; в) $y = x - \operatorname{arctg} x.$

8. По графику функции построить графики первой и второй производных




## Вариант 19

1. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right) \qquad x_0 = 1.$$

2. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 8,06$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $\quad y = -2\,\dfrac{x^2+3}{x^2+2x+5}\ ; \qquad -5 \le x \le 1.$

4. Напряжение на клеммах электрической цепи, равное первоначально нулю, равномерно возрастает; одновременно в цепь вводится сопротивление, пропорциональное квадрату времени с коэффициентом пропорциональности 9 Ом/мин. Первоначальное сопротивление цепи равно I Ом. В какой момент времени ток в цепи наибольший?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

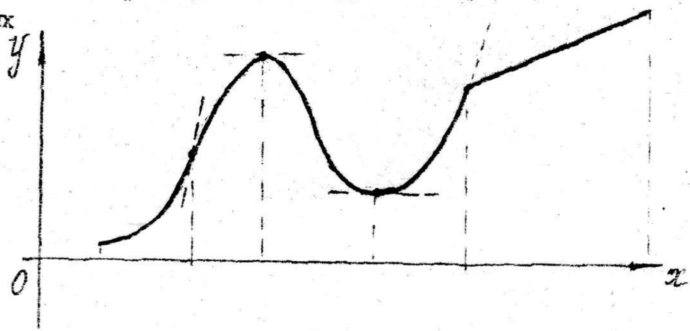
$$y = x^2 - 2x - (x-1)\ln x \; ; \quad x_0 = 1 .$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{x^2 - 11}{4x - 3}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = \ln(1+x^2)$; б) $y = (x+2)^2(x+4)^2$; в) $y = \dfrac{e^{-x}}{2x-3}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных




## В а р и а н т 20

I. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = \frac{1}{3x+2} \; ; \quad x_0 = 2 .$$

2. Вычислить приближенно $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x = 4{,}06$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2 \cdot (x-4)}$ ; $0 \le x \le 4$.

4. Точки A и B с абсциссами I и -I расположены на параболе $y=x^2$. Найти на этой параболе точку, сумма квадратов расстояний которой до точек A и B была бы наименьшей.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

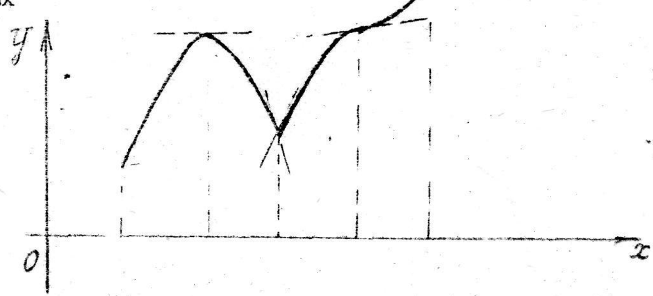
$$y=(x-1)\,tm\,(x-1)+2x-x^2; \quad x_0=1.$$

6. Найти асимптоты $y=\dfrac{2x^2-3}{x^2-1}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y=x-\ln(1+x^2)$; б) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; в) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных




## Вариант 2I

I. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y=\frac{x}{x^2+1}; \quad x_0=-2.$$

2. Вычислить приближенно $y=x^7$ при $x=2{,}002$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке

$$y=x^2-2x+\frac{16}{x-1}-13; \quad 2\le x\le 5.$$

4. Точки А и В с абсциссами 2 и -2 расположены на параболе $y=\frac{1}{2}x^2$. Найти на этой параболе точку, сумма квадратов расстояний которой до точек А и В была бы наименьшей.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

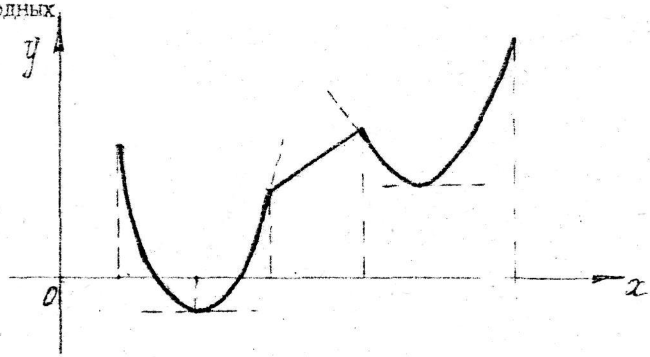
$$y=x^4+4x^3+12x^2+24(x+1-e^x); \quad x_0=0.$$

6. Найти асимптоты $y=\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y=(x-3)\sqrt{x}$; б) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; в) $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант 22

I. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y=\frac{x^2-3x+3}{3}; \quad x_0=3.$$

2. Вычислить приближенно $y=\sqrt{4x-3}$ при $x$ = I,78.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y=2\sqrt{x-1}-x+2$, $1\le x\le 5$.

4. Точки А и В с абсциссами 3 и –3 расположены на параболе $y=\frac{1}{3}x^2$. Найти на этой параболе точку, сумма квадратов расстояний которой до точек А и В была бы наименьшей.

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

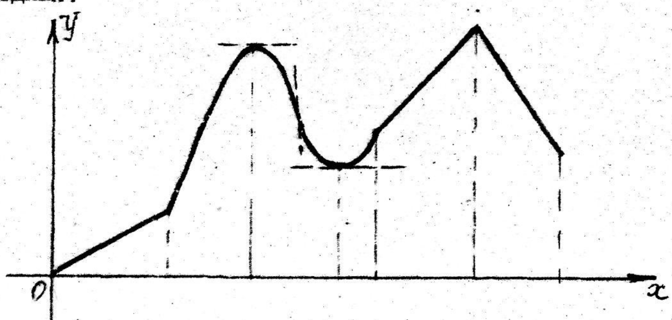
$$y=6e^{x+1}-x^3-6x^2-15x-16;\quad x_0=-1.$$

6. Найти асимптоты $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y=x\sqrt[3]{1-x}$; б) $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$; в) $y=-x\ln^2 x$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант 23

I. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y=\frac{2x}{x^2+1};\quad x_0=1.$$

2. Вычислить приближенно $y=\sqrt{x^3}$ при $x=0{,}98$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y=-\dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{8}{x-2}+5;\quad -2\le x\le 1$.

4. В концах отрезка длины 2 находятся два источника света силы 1 и 8. На каком расстоянии от первого источника находится наименее освещенная точка отрезка?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

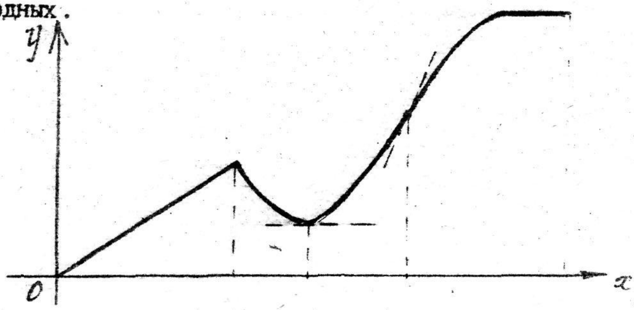
$$y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x; \quad x_0 = 0.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 3x - 1}{2x^2 - 2}$

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$; б) $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x}$; в) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




Вариант 24

1. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = -2\left(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}\right); \quad x_0 = 1.$$

2. Вычислить приближенно $y = x^5$ при $x = 2{,}997$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = 8x + \dfrac{4}{x^2} - 15$; $\dfrac{1}{2} \le x \le 2$.

4. В концах отрезка длины 3 находится два источника света силы I и 27. На каком расстоянии от первого источника находится наименее освещенная точка отрезка?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

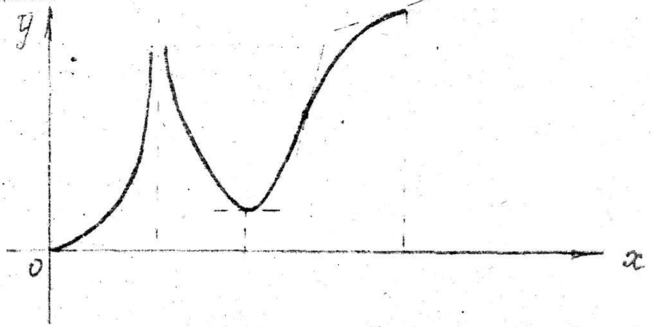
$$y = \cos x + \operatorname{ch} x; \quad x_0 = 0.$$

6. Найти асимптоты $y = \dfrac{x^2+5x+9}{x+4}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$, б) $y = \dfrac{x^3}{x+1}$; в) $y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$.

8. По графику функции построить графики первой и второй производных.




## Вариант 25

I. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x_0$

$$y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}; \quad x_0 = -1.$$

2. Вычислить приближенно $y = \sqrt[5]{x^2}$ при $x$ = I,03.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3$, $-4 \le x \le 2$.

4. В концах отрезка длины $l$ находятся два источника света силы 8 и 27. На каком расстоянии от первого источника света находится наименее освещенная точка отрезка?

5. Исследовать поведение функций в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков

$$y=x^2-2e^{x-1}; \qquad x_0=1.$$

6. Найти асимптоты $y=\dfrac{3x^2-10}{4x^2-1}$.

7. Провести полное исследование функции и построить ее график:

а) $y=\dfrac{e^x}{x-1}$; б) $y=(x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$; в) $y=\dfrac{x^2-4}{x^3}$.

8. По графику функции построить график первой и второй производных.