МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

51(07)
З-268

А.А. Замышляева, А.А. Селиванова, С.В. Суровцев

МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов укрупненной
группы «Экономика и управление»

Часть III

Челябинск
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра уравнений математической физики

51(07)
З-268

А.А. Замышляева, А.А. Селиванова, С.В. Суровцев

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ
для студентов укрупненной
группы «Экономика и управление»

Часть III

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2015

УДК 510(022)(076.5)
З-268

Одобрено
учебно-методической комиссией факультета
Математики, механики и компьютерных наук

Рецензенты: Н.Д. Пазий, С.И. Кадченко.

Замышляева, А.А.
З-268 Математика: практикум для студентов укрупненной группы "Экономика и управление" / А.А. Замышляева, А.А. Селиванова, С.В. Суровцев. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – Ч. III. – 46 с.

Практикум предназначен для студентов очной и заочной форм обучения направлений и специальностей укрупенной группы "Экономика и управление".

Практикум состоит из 2 частей: интегралы и дифференциальные уравнения. В первой части отражены темы: "Вычисление неопределенных и определенных интегралов", "Вычисление площади плоской фигуры". Во второй части содержатся темы: "Дифференциальные уравнения первого порядка", "Дифференциальные уравнения второго порядка с постояными коэффициентами", "Системы линейных дифференциальных уравнений". В начале каждого раздела приводятся минимальные теоретические сведения, необходимые для решения задач по данной теме. Для каждого упражнения приводится алгоритм решения с пропусками для заполнения. В конце практикума приведены варианты условий к упражнениям.

УДК 510(022)(076.5)

ПРАКТИКУМ
СТУДЕНТА

Вариант ______________________________

Ф.И.О. ______________________________

Факультет ______________________________

Направление ______________________________

Группа ______________________________

Преподаватель ______________________________

Указания к выполнению

Каждому студенту предлагается индивидуальный вариант. Решение задач следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, заполняя соответствующие пропуски. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием. При оформлении рабочей тетради студент должен переписать условие соответствующей задачи, написать подробное решение, выделив ответ.

I. Интегральное исчисление

Тема 1. Первообразная функции и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx$, где $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение. Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1.1}$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная для функции $f(x)$, C – произвольная константа.

Свойства неопределенного интеграла:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \tag{1.2}$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \tag{1.3}$$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \tag{1.4}$$

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx,\ \ \alpha = const, \tag{1.5}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx. \tag{1.6}$$

Таблица интегралов **Таблица 1**

$\int 0\,dx = C,$	$\int dx = \int 1 * dx = x + C,$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1,$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,$
$\int e^x\,dx = e^x + C,$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C,\ \ x \neq 0,$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$ $-a < x < a,\ \ a > 0,$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, a \neq 0,$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C, a \neq 0,$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a}\right\| + C,$ $a \neq 0,$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

Пример 1.

$$\int (2x + \sin x)dx = \int 2xdx + \int \sin x\,dx = 2\int xdx + \int \sin x\,dx = x^2 - \cos x +$$

$+C$

Упражнение 1.

Найти интеграл

$$\int \qquad\qquad dx.$$

Решение:

$$\int \qquad\qquad dx =$$

Тема 2. Инвариантность формул интегрирования

а) Теорема (об инвариантности формул интегрирования)

Если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C,$$

где $\varphi(x)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Пример 2.

$$\int \sin(4x - 2)\,d(4x - 2) = -\cos(4x - 2) + C.$$

Упражнение 2.

Найти интеграл

$\int (\qquad\qquad) d(\qquad)$

Решение:

$\int (\qquad\qquad) d(\qquad) =$

b) Интегрирование путем внесения под дифференциал

Пусть необходимо вычислить неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$. Допустим, что существуют дифференцируемые функции $u = \varphi(x)$ и $v = g(u)$ такие, что

$$f(x)dx = g\big(\varphi(x)\big)d\varphi(x) = g\big(\varphi(x)\big)\varphi(x)'dx = g(u)du.$$

Тогда

$$\int f(x)dx = \int g\big(\varphi(x)\big)\varphi(x)'dx = \int g(u)du.$$

Данное преобразование подынтегрального выражения называют *интегрированием путем внесения под дифференциал.*

При интегрировании указанным методом полезны следующие равенства для дифференциалов.

Таблица дифференциалов **Таблица 2**

$df(x) = d(f(x) + a), a = const,$	$df(x) = \frac{1}{k}d\big(kf(x)\big), k = const,$ $k \neq 0,$
$x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$	$a^x dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x)$
$e^x dx = d(e^x)$	$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$
$\sin x dx = -d(\cos x)$	$\cos x dx = d(\sin x)$
$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$	$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$
$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$	$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$

Пример 3.

$$\int (2x+3)^2 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^2 d(2x) = \frac{1}{2}\int (2x+3)^2 d(2x+3) = \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^3}{3}$$

$$+C = \frac{(2x+3)^3}{6} + C.$$

Упражнение 3.

Найти интеграл

$$\int \qquad\qquad dx.$$

Решение:

$$\int \qquad\qquad dx =$$

Пример 4.

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Упражнение 4.

Найти интеграл

$$\int \qquad\qquad dx.$$

Решение:

$$\int \qquad\qquad dx =$$

Тема 3. Интегрирование квадратного трехчлена

а) Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$$

сводится к одному из двух табличных интегралов

$$\int \frac{dx}{a^2 + (x+k)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{(x+k)}{a} + C, a \neq 0, \tag{1.7}$$

$$\int \frac{dx}{(x+k)^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{(x+k) - a}{(x+k) + a} \right| + C, a \neq 0, \tag{1.8}$$

путем дополнения квадратного трехчлена до полного квадрата по формуле

$$px^2 + qx + r = p((x+k)^2 \pm a^2) \tag{1.9}$$

Пример 5.

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x^2 - 2\frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) + \left(\frac{7}{2} - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{31}{16}\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{5}{4}\right)}{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{31}{16}\right)} = \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{\left(x - \frac{5}{4}\right)}{\frac{\sqrt{31}}{4}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4x - 5}{\sqrt{31}} + C.$$

Упражнение 5. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\qquad\qquad} = \int \frac{dx}{(\qquad\qquad)\ (\qquad\qquad)} =$$

$$= \int \frac{dx}{(\qquad\qquad)^2\ (\qquad)^2} = \int \frac{d(\qquad\qquad)}{(\qquad\qquad)^2\ (\ \ )^2} =$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

b) Интеграл вида

$$\int \frac{(mx+n)dx}{px^2 + qx + r}$$

сводится к интегралу (1.7) или (1.8) и к интегралу

$$\int \frac{(x+k)\, d(x+k)}{(x+k)^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d\,((x+k)^2 \pm a^2)}{(x+k)^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln|(x+k)^2 \pm a^2| + C.$$

Пример 6.

$$\int \frac{(6x+5)dx}{x^2 + 4x + 9} = \int \frac{(6x+5)dx}{(x+2)^2 + 5} = \begin{bmatrix} x + 2 = t, \\ x = t - 2, \quad dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5} dt = \int \frac{6t-7}{t^2+5} dt = 3\int \frac{2tdt}{t^2+5} - 7\int \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= 3\ln(t^2+5) - \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + C = 3\ln((x+2)^2+5) - \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Упражнение 6. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\qquad\qquad\qquad\qquad} =$$

c) Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}$$

сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x+k)^2}} = \arcsin \frac{(x+k)}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+k)^2+a}} = \ln\left|(x+k) + \sqrt{(x+k)^2+a}\right| + C.$$

Пример 7.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+3x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - (x-\frac{3}{4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{(4x-3)}{5} + C.$$

Упражнение 7. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\qquad\qquad\qquad\qquad} =$$

d) Интеграл вида

$$\int \sqrt{px^2+qx+r}\,dx$$

сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \sqrt{(x+k)^2+m}\,d(x+k) = \frac{(x+k)}{2}\sqrt{(x+k)^2+m}+$$

$$+\frac{k}{2}\ln\left|(x+k)+\sqrt{(x+k)^2+m}\right|+C,$$

$$\int \sqrt{a^2-(x+k)^2}\,d(x+k) = \frac{(x+k)}{2}\sqrt{a^2-(x+k)^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x+k}{a}+C$$

Пример 8.

$$\int \sqrt{-x^2-2x+1}\,dx = \int \sqrt{2-(1+x)^2}dx+1 = \frac{1+x}{2}\sqrt{-x^2-2x+1}+$$

$$+\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}+C.$$

Упражнение 8. Найти интеграл

$$\int \sqrt{\qquad\qquad\qquad\qquad}\,dx =$$

e) Интеграл вида

$$\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}$$

сводится к разобранным выше интегралам.

Пример 9.

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$\sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C.$$

Упражнение 9. Найти интеграл

$$\int \qquad\qquad dx =$$

Тема 4. Метод замены переменной

Пусть определен интеграл $\int f(x)\,dx$. Введем новую переменную $x = \varphi(t)$ такую, что $\varphi(t)$ - дифференцируемая функция, $dx = \varphi'(t)dt$. Подставив эти выражения в исходный интеграл, получим:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt. \qquad (1.10)$$

Пример 10. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx.$$

Примем $\sqrt[4]{x} = t$, $dx = 4t^3dt$, тогда

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{4t^5dt}{t^2-t} = 4\int \frac{t^5dt}{t(t-1)} = 4\int \frac{t^4dt}{(t-1)} = 4\int \frac{t^4-1+1dt}{(t-1)} =$$

$$= 4\int \frac{t^4-1dt}{(t-1)} + 4\int \frac{dt}{(t-1)} = 4\int \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)dt}{(t-1)} + 4\ln(t-1) =$$

$$= 4\int (t+1)(t^2+1)dt + 4\ln(t-1) = 4\int t^3+t^2+t+1dt = 4\ln(t-1) =$$

$$= t^4 + \frac{4t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + 4\ln(t-1) + C = x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left(\sqrt[4]{x}-1\right)$$

$+C.$

Упражнение 10. Найти интеграл

$$\int \qquad\qquad dx = \begin{bmatrix} \text{Примем } t = \\ \\ \end{bmatrix} =$$

$$\int \qquad\qquad dt =$$

Тема 5. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, тогда справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (1.11)$$

Данный метод интегрирования применяется при вычислении интегралов от функций вида:

a) $P_n(x)e^{ax}$, $P_n(x)\sin ax$, $P_n(x)\cos ax$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени. При интегрировании $P_n(x)$ обозначают через u, а $e^{ax}dx, \sin axdx$, $\cos axdv$ через dv;

b) $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin x$, $P_n(x)\arccos x$ и т.п., где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени. При интегрировании $P_n(x)dx$ обозначают через dv, а через u оставшиеся сомножители.

Пример 11. Найти интеграл

$$\int (x+2)\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = (x+2), \Rightarrow du = d(x+2) = dx \\ dv = \sin x\,dx, \Rightarrow v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+2)\cos x - \int (-\cos x)dx = -(x+2)\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= -(x+2)\cos x + \sin x + C.$$

Упражнение 11.

Найти интеграл

$$\int$$

Решение:

$\int$

Тема 6. Интегрирование рациональных дробей

Определение. Выражение вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется рациональной дробью, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены m-ой и n-ой степеней соответственно. Рациональная дробь называется правильной, если $m < n$, и неправильной в случае, если $m \geq n$.

При интегрировании неправильной рациональной дроби производится выделение целой части и остатка.

При интегрировании правильной рациональной дроби используется ее разложение на элементарные дроби, для чего предварительно раскладывается на элементарные множители многочлен $Q_n(x)$.

Пусть знаменатель правильной дроби разлагается на множители $(x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta$, где a – действительный корень $Q_n(x)$ кратности α, x^2+px+q – квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом, при этом множители со степенями $\beta+1, \beta+2, \ldots$ отсутствуют. Правильная дробь разлагается в сумму элементарных дробей по следующей формуле:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta},$$

где коэффициенты уточняются в процессе разложения правильной дроби.

При вычислении интеграла от правильной дроби разложение будет включать выражения:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} + C,$ если $\alpha \neq 1;$

3) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \int \frac{N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) +$$

$$+\frac{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\right)+C.$$

Пример 12.

$$\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}dx=\int\frac{x+2}{(x-1)(x+6)}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\dfrac{x+2}{(x-1)(x+6)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+6}=\dfrac{A(x+6)+B(x-1)}{(x-1)(x+6)},\\ \text{неопределенные коэффициенты найдем, приравняв}\\ \text{их к коэффициентам при одинаковых степенях } x:\\ x+2=A(x+6)+B(x-1)=(A+B)x+6A-B.\\ \begin{cases}A+B=1\\ 6A-B=2.\end{cases}\\ \text{Следовательно,}\qquad \mathrm{A}=\dfrac{3}{7}, B=\dfrac{4}{7}.\end{array}\right]=$$

$$=\frac{3}{7}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x+6}=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C.$$

Упражнение 12. Найти интеграл

$$\int$$

Тема 7. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы от различных тригонометрических функций:

а) $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, $\int R(\cos x)\sin x\,dx$,
где $R(\sin x), R(\cos x)$ некоторые рациональные функции, аргументами которых являются $\sin x$ или $\cos x$ соответственно. Тогда необходимо произвести замену $\sin x=t$ или $\cos x=t$.

Пример 13.

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x + 4} = [\sin x = t, \cos x\, dx = dt] = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\cos x}{2} + C.$$

Упражнение 13. Найти интеграл

$$\int \qquad\qquad dx = [\qquad\qquad\qquad\qquad] =$$

b) $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx$,

где $m,\ n\ \in N$.

В данном случае интегрируемую функцию преобразуем в сумму функций, используя тригонометрические формулы:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin\,(m-n)x),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n) - \cos\,(m+n)x)\,,$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n) + \cos\,(m-n)x)\,.$$

Также удобно использовать формулы понижения степени при нахождении интегралов данного типа:

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}.$$

Пример 14.

$$\int \sin x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin(-4x))dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x - \sin 4x)dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int \sin 6x\, d\, 6x - \frac{1}{8}\int \sin 4x\, d\, 4x = -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 4x}{4} + C.$$

Упражнение 14.

$$\int$$

c) $\int R(\sin x, \cos x)\ dx,$

где $R(\sin x, \cos x)$ рациональная функция.

В этом случае используют стандартную замену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, тогда, используя тригонометрические формулы получим:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 15.

$$\int \frac{dx}{\cos 3x + 2\sin 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d\,3x}{\cos 3x + 2\sin 3x} = \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ 3x = z, \\ d\,3x = dz. \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\cos z + 2\sin z} = \begin{bmatrix} \text{Замена:} \cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin z = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ dz = \dfrac{2dt}{1+t^2}. \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\frac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-t^2+4t} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{5-(t-2)^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+t-2}{\sqrt{5}-t+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{3x}{2} + \sqrt{5} - 2}{\operatorname{tg} \frac{3x}{2} - \sqrt{5} - 2} \right| + C.$$

Упражнение 15. Найти интеграл

$$\int \qquad\qquad\qquad dx =$$

Тема 8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Рассмотрим случаи, в которых замена переменной позволяет рационализировать интеграл от иррациональной функции, т.е. свести его к интегралу от рациональной функций.

а) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx-d}}\right) dx$, где $ad - cb \neq 0$, допускают рационализацию посредством замены переменной $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx-d}}$.

Пример 16.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1+x} = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}, \\ 1+x = \frac{2}{1+t^2}, \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1+t^2}{2}. \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{t(1+t^2)}{2} \left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right) dt = -2 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = -2 \int dt +$$

$$+2 \int \frac{dt}{1+t^2} = -2t + 2\operatorname{arctg} t + C = -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

b) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$, где $R(x, y)$ – рациональная функция, находится подстановкой $x = a \sin t$;

c) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$, где $R(x, y)$ – рациональная функция, находится подстановкой $x = a \operatorname{tg} t$;

d) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$, где $R(x, y)$ – рациональная функция, находится подстановкой $x = \frac{a}{\sin t}$.

Упражнение 16. Найти интеграл

$$\int \qquad dx = \left[\qquad \right] =$$

$=$

Тема 9. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Разобьем данный отрезок на n произвольных частей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b. \tag{1.12}$$

Выберем в каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ произвольную точку ξ_i,

$$x_i < \xi_i < x_{i+1}, \qquad 0 \le i \le n. \tag{1.13}$$

Определение. Сумму произведений:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1.14}$$

будем называть интегральной суммой для функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Обозначим через λ длину максимального частичного отрезка данного разбиения

$$\lambda = \max_{i \le n}\{\Delta x_i\}. \tag{1.15}$$

Определение. Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, если он существует, называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i. \qquad (1.16)$$

Определенный интеграл обозначается:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (1.17)$$

Определение. Если определённый интеграл (1.17) существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, числа a и b – нижним и верхним пределами интегрирования, соответственно, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Свойства определённого интеграла:

1) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

2) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R};$$

3) $$\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{R};$$

4) $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

5) Если $f(x) \le g(x)$ всюду на $[a, b]$, то
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

6) Формула Ньютона – Лейбница:
$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b),$$
где $F(a), F(b)$ первообразные функции $f(x)$ в точках a и b, соответственно.

Пример 17.

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\,|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Упражнение 17. Найти интеграл

$$\int \qquad\qquad\qquad dx = \qquad\qquad\qquad =$$

$=$

Тема 10. Вычисление площади криволинейной фигуры

Пусть $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ – непрерывные на $[a,b]$ функции, и $f_2(x) \geq f_1(x)$ при $\forall x \in [a,b]$. Тогда площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Пример 18. Вычислить площадь, ограниченную графиками кривых

$y = \sqrt{x}, y = x^2, x \in [0;1]$.

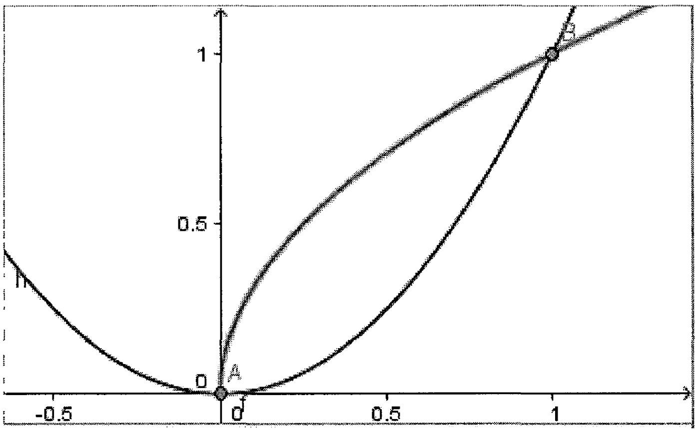

Рис. 1

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Упражнение 18. Вычислить площадь, ограниченную графиками кривых

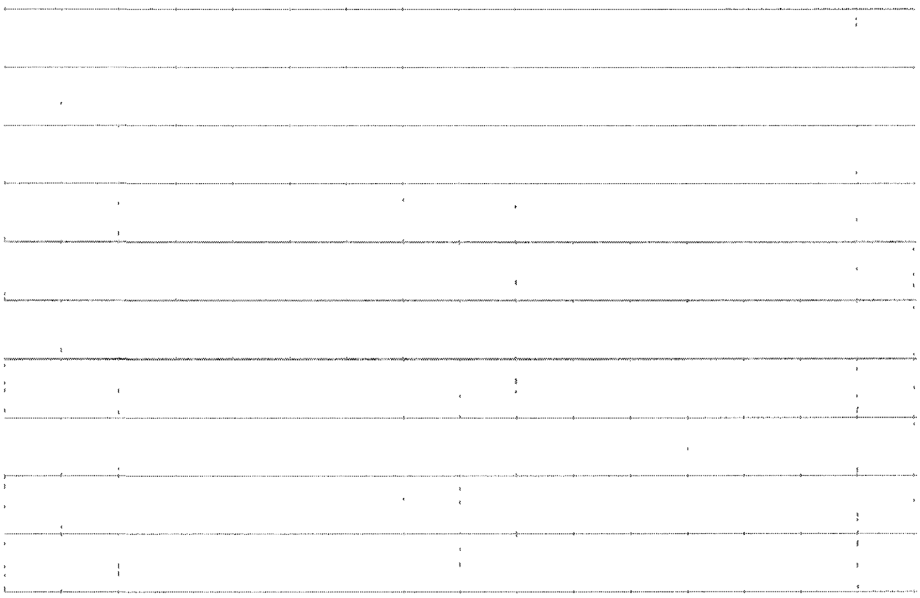

Рис. 2

$$S = \int (\qquad\qquad - \qquad\qquad\qquad)dx =$$

Условия к упражнениям

Вариант 1	Вариант 2
1) $\int(6\cos x + x)dx$; 2) $\int 4^{x^2}dx^2$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+9}}$; 4) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$; 5) $\int \frac{dx}{2x^2-2x+4}$ 6) $\int \frac{x-3}{x^2-8x+20}dx$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$; 8) $\int \sqrt{1-x^2-4x}\,dx$; 9) $\int \frac{x+4}{\sqrt{6-x^2-2x}}dx$; 10) $\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)}dx$; 11) $\int(x+2)e^x dx$; 12) $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$; 13) $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$; 14) $\int \cos^2 3x \sin^4 3x\,dx$; 15) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; 16) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; 17) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}dx$; 18) $y = x^2+4x, y = x+4$;	1) $\int(1-5x)dx$; 2) $\int \frac{d(x\ln x)}{\cos^2(x\ln x)}$; 3) $\int \sin(-x)dx$; 4) $\int \sin 2x * \cos^3 x\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{7-x^2+9x}$; 6) $\int \frac{x-2}{x^2+8x+12}dx$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}$; 8) $\int \sqrt{x^2-3}\,dx$; 9) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx$; 10) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$; 11) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$; 12) $\int \frac{1}{(x+1)(x+3)}dx$; 13) $\int \frac{\cos^5 x\,dx}{\sin^2 x+\sin x}$; 14) $\int \sin 9x\cos x\,dx$; 15) $\int \frac{dx}{-4\sin x-7\cos x}$; 16) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$; 17) $\int_1^2(x^2-2x+3)\,dx$; 18) $y = \ln x,\ y = 0,\ x = e$;
Вариант 3	**Вариант 4**
1) $\int\left(2\sqrt{x}+4e^x\right)dx$; 2) $\int \frac{d\sin x}{\sin^2 x-4}$; 3) $\int \cos(6x+1)dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 5) $\int \frac{dx}{8x-x^2-5}$; 6) $\int \frac{x-5}{x^2+12x+27}dx$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$; 8) $\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx$; 9) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+6x}}dx$;	1) $\int(\cos x+10^x)dx$; 2) $\int 6^{5-x}d(5-x)$; 3) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$; 4) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-3x-4}$; 6) $\int \frac{x+6}{x^2+10x+9}dx$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+14x+5}}$; 8) $\int \sqrt{3-x^2+4x}\,dx$; 9) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$;

10) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx;$ 11) $\int x \sin^2 x \, dx;$ 12) $\int \frac{x-4}{x^2-2} dx;$ 13) $\int \cos^5 x \, dx;$ 14) $\int \cos\frac{x}{2} \sin\frac{x}{4} dx;$ 15) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x};$ 16) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx;$ 17) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$ 18) $y = x^2, \ y = 2 - x^2;$	10) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx;$ 11) $\int \arccos x \, dx;$ 12) $\int \frac{5x+3}{2x^2 3x+1} dx;$ 13) $\int \frac{\sin^3 x \, dx;}{2+\cos x}$ 14) $\int \sin 5x \sin 7x \, dx;$ 15) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x};$ 16) $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx;$ 17) $\int_1^2 x^2 + \frac{1}{x^4} dx;$ 18) $y = x * \sin x, \ y = 0, 0 \le x \le \pi;$
Вариант 5	**Вариант 6**
1) $\int \left(3\sin x - \frac{1}{x}\right) dx;$ 2) $\int \cos(\ln x) d\ln x;$ 3) $\int \frac{dx}{1+4x^2};$ 4) $\int \operatorname{ctg} x \, dx;$ 5) $\int \frac{dx}{16x+4x^2-4};$ 6) $\int \frac{x+2}{x^2-10x+21} dx;$ 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-5}};$ 8) $\int \sqrt{1-x^2+2x} \, dx;$ 9) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx;$ 10) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx;$ 11) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx;$ 12) $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx;$ 13) $\int \sin^3 x \, dx;$ 14) $\int \sin^2 x \sin 4x \, dx;$ 15) $\int \frac{dx}{2+4\sin x};$ 16) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx;$ 17) $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx;$ 18) $y = -2 + 3x - x^2, \ y = 0;$	1) $\int (\sin x - 2x^2) dx;$ 2) $\int 6\sin x^2 \, dx^2;$ 3) $\int (8x+4)^2 dx;$ 4) $\int x \cos x^2 dx;$ 5) $\int \frac{dx}{4+x^2+16x};$ 6) $\int \frac{x+3}{x^2+10x+21} dx;$ 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2-6x}};$ 8) $\int \sqrt{x^2+4x} \, dx;$ 9) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{9-3x^2+6x}} dx;$ 10) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx;$ 11) $\int \ln x \, dx;$ 12) $\int \frac{4x+6}{x^2+3x+2} dx;$ 13) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx;$ 14) $\int \cos^2 4x \sin x \, dx;$ 15) $\int \frac{dx}{5-3\cos x};$ 16) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}};$ 17) $\int_1^3 x^3 \, dx;$ 18) $y = 16 - x^4, \ y = 0;$
Вариант 7	**Вариант 8**
1) $\int \left(\frac{1}{x} + x^{-2}\right) dx;$ 2) $\int \cos(4x+1) \, d(4x+1);$	1) $\int (e^x + x^8) dx;$ 2) $\int \frac{1}{x-4} d(x-4);$

3) $\int \frac{1}{5x-11}dx;$	3) $\int \sqrt{4x-3}dx\,;$
4) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^5+4}};$	4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}};$
5) $\int \frac{dx}{4x+x^2+8};$	5) $\int \frac{dx}{4+x^2-16x};$
6) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+24}dx;$	6) $\int \frac{x-2}{x^2-6x+13}dx;$
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-x^2-35}};$	7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x+35}};$
8) $\int \sqrt{x^2+3x}\,dx;$	8) $\int \sqrt{x^2+2x-1}\,dx;$
9) $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$	9) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx;$
10) $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;$	10) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx;$
11) $\int x\,e^{-x}dx;$	11) $\int x\cos 4x\,dx;$
12) $\int \frac{x+4}{4x^3-x}dx;$	12) $\int \frac{x}{2x^2-3x-2}dx;$
13) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}}{\cos^2 5x}dx;$	13) $\int \frac{\cos x}{\sin x+2}dx;$
14) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx;$	14) $\int \sin 10x\cos 15x\,dx;$
15) $\int \frac{dx}{6-\sin x+2\cos x};$	15) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x};$
16) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$	16) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx;$
17) $\int_0^9 \frac{x-1}{x+1}dx;$	17) $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx;$
18) $y=\operatorname{tg} x\,,\ y=0,\ x=\frac{\pi}{3};$	18) $y=\sin x\,,\ y=0,\ 0\le x\le \pi;$
Вариант 9	**Вариант 10**
1) $\int (x^4+4)dx;$	1) $\int \left(\sqrt{x}+x\right)dx;$
2) $\int \sin x\,d\sin x\,;$	2) $\int \sqrt{1+x}\,d\sqrt{1+x}$
3) $\int \cos(1-2x)dx;$	3) $\int \sin 3x\,dx;$
4) $\int \operatorname{tg} x\,\,dx;$	4) $\int \cos^2 x\sin x\,\,dx;$
5) $\int \frac{dx}{x^2-4x+8};$	5) $\int \frac{dx}{5+x^2-3x};$
6) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx;$	6) $\int \frac{4-3x}{5x^2+6x+18}dx;$
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+20}};$	7) $\int \frac{dx}{\sqrt{10-x^2-24}};$
8) $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx;$	8) $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx;$
9) $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5-x^2+2x}}dx;$	9) $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-x^2-2x}}dx;$
10) $\int \frac{1}{\sqrt{7-5x^2}}dx;$	10) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx;$
11) $\int x\,3^x dx;$	11) $\int x\sin 2x\,dx;$
12) $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\,dx;$	1) $\int \frac{x+3}{x^2+6x-7}dx;$
13) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx;$	13) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{9-\cos^2 x}};$

14) $\int \sin 2x \cos 4x \, dx$; 15) $\int \frac{dx}{9\sin^2 x + 5\cos^2 x}$; 16) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x})}$; 17) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; 18) $y = 4x - x^2, \ y = 0$;	14) $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$; 15) $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$; 16) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$; 17) $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$; 18) $y = 4 - x^2, \ y = 0$.

II. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Тема 1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$f(x)\cdot g(y)\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot g_1(y) \tag{2.1}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Его интегрирование осуществляется следующим образом. Если $f(x)\neq 0$, $g_1(y)\neq 0$ то, разделив (2.1) на $f(x)\cdot g_1(y)$, приходим к уравнению

$$\frac{g(y)dy}{g_1(y)}=\frac{f_1(x)}{f(x)}dx, \tag{2.2}$$

интегрируя которое, получаем

$$\int\frac{g(y)dy}{g_1(y)}=\int\frac{f_1(x)}{f(x)}dx+C,$$

где C – постоянная.

Пример 1. Решить уравнение

$$x(1+y^2)+y(1+x^2)y'=0.$$

Перенесем слагаемое, не содержащее y', вправо

$$y(1+x^2)y'=-x(1+y^2).$$

Тогда

$$y(1+x^2)\cdot\frac{dy}{dx}=-x(1+y^2)\ \left|\begin{array}{l}:(1+x^2)\neq 0\\ \cdot\, dx\\ :(1+y^2)\neq 0\end{array}\right.$$

$$\frac{ydy}{1+y^2}=-\frac{xdx}{1+x^2}.$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$\int\frac{ydy}{1+y^2}=-\int\frac{xdx}{1+x^2}.$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln|1+y^2|+\ln C,$$

$$-\int\frac{xdx}{1+x^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+\ln C.$$

Приравняем полученные выражения, объединив константы

$$\ln|1+y^2|=-\ln|1+x^2|+\ln C.$$

Преобразуем

$$1 + y^2 = \frac{C}{1 + x^2}.$$

Упражнение 1. Решить уравнение

$$.$$

Перенесем слагаемое не содержащее y' вправо

$$y' =$$

Представим в виде:

$$\cdot \frac{dy}{dx} =$$

Разделим переменные

$$\cdot dy = \qquad \cdot dx.$$

Проинтегрируем

$$\int \qquad = \int \qquad .$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int \qquad = \qquad ,$$

$$\int \qquad = \qquad .$$

Приравняем полученные выражения, объединив константы

$$.$$

Преобразуем

$$.$$

Тема 2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.3}$$

называется однородным, если его правая часть является *однородной функцией*, т.е. выполнено условие

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Однородные уравнения интегрируются заменой

$$u(x) = \frac{y}{x}, \qquad y = u(x) \cdot x, \qquad y' = u' \cdot x + u. \tag{2.4}$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}.$$

Выпишем правую часть уравнения

$$f(x, y) = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}.$$

Проверим, является ли она однородной функцией

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y + \sqrt{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}}{\lambda x} = f(x, y),$$

следовательно, $f(x, y)$ – однородная функция.

Значит, уравнение – однородное; в этом можно убедиться, разрешая его относительно производной:

Используя замену (2.4), полагая $y = u(x) \cdot x$, получим

$$u' \cdot x + u = \frac{u \cdot x + \sqrt{x^2 - u^2 \cdot x^2}}{x}.$$

Тогда

$$u' \cdot x + u = \frac{u \cdot x}{x} + \frac{\sqrt{x^2(1 - u^2)}}{x},$$

$$u' \cdot x = \sqrt{1 - u^2},$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{1 - u^2}.$$

Разделим переменные

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{dx}{x},$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Приравняем полученные выражения, объединив константы

$$\arcsin u = \ln|x| + C.$$

Произведя обратную замену $u = \frac{y}{x}$, получим

$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Упражнение 2. Решить уравнение

$$y' = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

$$f(x,y) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = f(x,y),$$

$f(x,y)$ – однородная функция нулевой степени.

Значит уравнение – однородное; в этом можно убедиться, разрешая его относительно производной.

Используя замену (2.4), полагая $y = z(x) \cdot x, y' = z'(x) \cdot x + z(x)$, получим

$$z' \cdot x + z = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

$$z' \cdot x + z = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Тогда

$$z' \cdot x + z =$$

$$z' \cdot x = \qquad\qquad\qquad .$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot x =$$

Разделим переменные

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} dz = \underline{\qquad\quad} dx.$$

Проинтегрируем

$$\int \underline{\qquad\qquad\qquad} dz = \int \qquad\qquad\qquad dx,$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int \underline{\qquad\qquad\qquad} dz =$$

$$\int \qquad\qquad =$$

Приравняем полученные выражения, объединив константы

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Произведя обратную замену $z = \frac{y}{x}$, получим

.

Тема 3. Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{2.5}$$

называется *линейным уравнением первого порядка,* где $p(x)$, $g(x)$ – известные функции.

Если $g(x) = 0$, то получаем уравнение

$$y' + p(x)y = 0, \tag{2.6}$$

которое называют *линейным однородным уравнением*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

Если $g(x) \neq 0$, то уравнение (2.5) называется *линейным неоднородным*.

Метод Бернулли

Решение линейного неоднородного уравнения (2.5) будем искать в виде:

$$y = u(x) \cdot v(x), \tag{2.7}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – пока неизвестные непрерывно дифференцируемые функции. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя (2.7) и выражение для y' в уравнение (2.5), получаем

$$u'v + uv' + uv \cdot p(x) = g(x)$$

или

$$u'v + u\big(v' + v \cdot p(x)\big) = g(x). \tag{2.8}$$

Выберем в качестве функции $v(x)$ одно из решений уравнения $v' + v \cdot p(x) = 0$. Следовательно, уравнение (2.8) эквивалентно системе

$$\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0, \\ u'v = g(x). \end{cases} \tag{2.9}$$

Решая первое уравнение системы (2.9), находим функцию $v(x)$. Подставляя найденную функцию во второе уравнение системы (2.9), находим его общее решение.

Тогда решением исходного уравнения (2.5) будет функция $y = u(x) \cdot v(x)$.

Пример 3. Решить уравнение

$$(1 + x^2)y' = (1 + x^2)^2 + 2xy$$

Приведем уравнение к виду (2.5)

$$y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2$$

Это линейное неоднородное уравнение. Будем искать решение в виде

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Тогда

$$y' = u'v + uv',$$

таким образом

$$u'v + uv' - \frac{2xuv}{1 + x^2} = 1 + x^2$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1 + x^2}\right) = 1 + x^2.$$

Составим систему

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2xv}{1 + x^2} = 0 \\ u'v = 1 + x^2 \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы.

$$v' - \frac{2xv}{1 + x^2} = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{1 + x^2} \Bigg| \begin{matrix} \cdot\, dx \\ : v \neq 0 \end{matrix}.$$

Разделим переменные

$$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1 + x^2}.$$

Проинтегрируем

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2xdx}{1 + x^2}.$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$$

$$\int \frac{2xdx}{1 + x^2} = \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} = \ln|1 + x^2| + C$$

Приравняем полученные выражения, положив $C = 0$.

$$\ln|v| = \ln|1 + x^2|.$$

Тогда

$$v = 1 + x^2.$$

Подставим во второе уравнение системы:

$$u'(1 + x^2) = 1 + x^2,$$

$$u' = 1,$$

$$\frac{du}{dx} = 1 | \cdot dx,$$

Разделим переменные

$$du = dx.$$

Проинтегрируем

$$\int du = \int dx.$$

Приравняем полученные выражения, объединив константы

$$u = x + C.$$

Получим: $y = u \cdot v = (x + C) \cdot (1 + x^2)$.

Упражнение 3. Решить уравнение

$$y' =$$

Приведем уравнение к виду (2.5)

$$y' \qquad =$$

Это линейное неоднородное уравнение. Будем искать решение в виде

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Тогда

$$y' = u'v + uv',$$

таким образом

$$u'v + uv'$$

$$u'v + u\left(v' \qquad\right) = \qquad .$$

Составим систему

$$\begin{cases} v' \qquad = 0, \\ u'v = \qquad . \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы.

$$v' \qquad = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = \qquad .$$

Разделим переменные

$$= \qquad .$$

Проинтегрируем:

$$\int \qquad = \int \qquad .$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int \quad =$$

$$\int \quad =$$

Приравняем полученные выражения, положив $C = 0$.

.

Тогда

$$v = \quad .$$

Подставим во второе уравнение системы:

$$u' \quad = \quad ,$$

$$u' = \quad ,$$

$$\frac{du}{dx} = \quad ,$$

Разделим переменные

.

Проинтегрируем

$$\int \quad = \int \quad .$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int \quad = \quad ,$$

$$\int \quad =$$

Приравняем полученные выражения, объединив константы

$$u = \quad .$$

Получили: $y = u \cdot v = \quad .$

Дифференциальные уравнения высокого порядка

Уравнение

$$F\left(x, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.10}$$

называется *дифференциальным уравнением n-го порядка*.

F – заданная непрерывная функция, x — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция.

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{2.11}$$

называется *дифференциальным уравнением в нормальной форме*.

Тема 4. Дифференциальные уравнения высокого порядка, допускающие понижение порядка

1) В уравнении вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

порядок можно понизить интегрированием

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Повторяя эту процедуру необходимое число раз, найдем решение.

Пример 4. Решить уравнение

$$y'' = 2x + x^3,$$

Проинтегрируем обе части

$$y' = \int (2x + x^3)dx = x^2 + \frac{x^4}{4} + C_1.$$

Проинтегрируем это равенство еще раз. Тогда

$$y = \int \left(x^2 + \frac{x^4}{4} + C_1\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20} + C_1x + C_2.$$

Упражнение 4. Решить уравнение

$$y \quad = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

Проинтегрируем обе части

$$y' = \int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C_1$$

Проинтегрируем это равенство еще раз. Тогда

$$y = \int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C_1x + C_2$$

2) Если уравнение имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots y^{(n)}\right) = 0,$$

т.е. оно явно не зависит от функции y и всех её производных до порядка $k-1$ включительно, то порядок уравнения можно понизить, сделав замену

$$y^{(k)} = z(x),$$

из которой следует, что $y^{(k+1)} = z'(x), \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$.

Пример 5. Решить уравнение

$$y''' - \frac{y''}{x} = 0.$$

Произведем замену $y'' = z(x)$, тогда $y''' = z'(x)$.

Получим уравнение

$$z' - \frac{z}{x} = 0,$$

$$z' = \frac{z}{x},$$

это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}.$$

Разделим переменные

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

Проинтегрируем

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}.$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int \frac{dz}{z} = \ln|z| + \ln C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C.$$

Приравняем полученные выражения, объединив константы

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1.$$

Преобразуем

$$z = C_1 x.$$

Произведем обратную замену:

$$y'' = C_1 x.$$

Проинтегрируем обе части:

$$y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2.$$

Проинтегрируем это равенство еще раз. Тогда

$$y = \int \left(\frac{C_1 x^2}{2} + C_2 \right) dx = \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3.$$

Упражнение 5. Решить уравнение

$$= 0.$$

Произведем замену $= z(x)$, тогда $= z'(x)$

$$= 0$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными

Разделим переменные

Проинтегрируем:

$$\int \qquad = \int$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int \qquad = \qquad ,$$

$$\int \qquad = \qquad .$$

Приравняем полученные выражения, объединив константы

$$.$$

Преобразуем

$$z =$$

Произведем обратную замену

$$=$$

Проинтегрируем обе части

$$y' = \int \qquad dx =$$

Проинтегрируем это равенство еще раз. Тогда

$$y = \int \qquad .$$

3) Если уравнение имеет вид

$$F\left(y, y', \dots y^{(n)}\right) = 0,$$

т.е. оно явно не зависит не зависит от переменной x, то порядок уравнения можно понизить, сделав замену

$$y' = p(y),$$

из которой следует, что $y'' = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p$.

Пример 6. Решить уравнение

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

Произведем замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'(y)y' = pp'$.

$$ypp' + p^2 = 0,$$

$$p(yp' + p) = 0,$$

$$p = 0 \text{ или } yp' + p = 0.$$

Рассмотрим первое уравнение

$$p = 0.$$

Сделав обратную замену, получим

$$y' = 0.$$

Проинтегрировав, получим

$$y = C.$$

Рассмотрим второе уравнение

$$yp' + p = 0$$

$$yp' = -p.$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$y \cdot \frac{dp}{dy} = -p.$$

Разделим переменные

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}.$$

Проинтегрируем

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}.$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей по отдельности:

$$\int \frac{dp}{p} = \ln|p| + \ln C,$$

$$-\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + \ln C.$$

Приравняем полученные выражения, объединив константы

$$\ln|p| = -\ln|y| + \ln C_1.$$

Преобразуем

$$p = \frac{C_1}{y}.$$

Произведем обратную замену:

$$y' = \frac{C_1}{y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}.$$

Разделим переменные

$$ydy = C_1 dx.$$

Проинтегрируем

$$\int ydy = C_1 \int dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2.$$

Тема 5. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка

Уравнение

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0, \qquad (2.12)$$

где p_1, p_2 – действительные числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*.

Квадратное уравнение

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0 \qquad (2.13)$$

называется *характеристическим уравнением* для (2.12).

В зависимости от дискриминанта уравнения (2.13) возможны следующие случаи:

1) Если дискриминант $D > 0$,то λ_1 и λ_2 – действительные и разные корни уравнения (2.13). Тогда общее решение уравнения (2.12) имеет вид
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Найдем дискриминант D

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1.$$

Дискриминант $D > 0$, найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1, \lambda_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Тогда общее решение примет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Упражнение 6. Решить уравнение

$$y'' \qquad y' \qquad y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 \qquad \lambda \qquad = 0.$$

Найдем дискриминант D

$$D =$$

Дискриминант $D > 0$, найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \qquad = \qquad , \lambda_2 = \qquad = \qquad .$$

Тогда общее решение примет вид

$$y = C_1 e \qquad + C_2 e \qquad .$$

2) Если дискриминант $D = 0$,то уравнение (2.13) имеет один действительный корень кратности два: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Найдем дискриминант D

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Дискриминант $D = 0$, найдем корень характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{-2}{2} = -1 \text{ – действительный корень кратности два.}$$

Тогда общее решение примет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Упражнение 7. Решить уравнение

$$y'' \qquad y' \qquad y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 \qquad \lambda \qquad = 0.$$

Найдем дискриминант D

$$D =$$

Дискриминант $D = 0$, найдем корень характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \qquad = \qquad \text{ – действительный корень кратности два.}$$

Тогда общее решение примет вид

$$y = C_1 e \qquad + C_2 x e \qquad .$$

3) Если дискриминант $D < 0$, то $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ – комплексно-сопряженные корни уравнения (2.13). Тогда общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример 9. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Найдем дискриминант D

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

Дискриминант $D < 0$, найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i, \lambda_2 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i.$$

Тогда

$$\alpha = -1, \beta = 2.$$

Тогда общее решение примет вид

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Упражнение 8. Решить уравнение

$$y'' \qquad y' \qquad y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 \qquad \lambda \qquad = 0.$$

Найдем дискриминант D

$$D =$$

Дискриминант $D < 0$, найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \qquad\qquad , \lambda_2 = \qquad\qquad .$$

Тогда

$$\alpha = \qquad , \beta = \qquad .$$

Тогда общее решение примет вид

$$y = e \qquad (C_1 \cos \qquad \cdot x + C_2 \sin \qquad \cdot x).$$

Тема 6. Системы дифференциальных уравнений

Система вида

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases} \tag{2.14}$$

называется *системой дифференциальных уравнений в нормальной форме*. Здесь x – независимая переменная, y и z – неизвестные функции, f_1 и f_2 – заданные непрерывные функции.

Пример 10. Решить систему

$$\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = -y + 2z. \end{cases}$$

Дифференцируя обе части первого уравнения системы, получаем:

$$y'' = 2y' + z',$$

откуда $z' = y'' - 2y'$.

Из первого уравнения системы выразим: $z = y' - 2y$.

Подставим полученное выражение для z и z' во второе уравнение системы, имеем:

$$y'' - 2y' = -y + 2(y' - 2y).$$

Перенесем все в левую часть и приведем подобные:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Найдем дискриминант характеристического уравнения:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4.$$

Дискриминант $D < 0$, найдем корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i,$$

$$\alpha = 2, \beta = 1.$$

Найдем общее решение

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Тогда

$$y' = \left(e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)\right)' = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) +$$

$$+e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Находим $z = y' - 2y$

$z = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x) -$

$-2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_2 e^{2x} \cos x - C_1 e^{2x} \sin x = e^{2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x).$

Запишем найденные функции y и z в систему:

Ответ: $\begin{cases} y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ z = e^{2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x) \end{cases}$

Упражнение 9. Решить систему:

Решить систему:

$$\begin{cases} y' = \\ z' = \end{cases}$$

Дифференцируя обе части первого уравнения системы, получаем:

$$y'' = \qquad ,$$

откуда $z' =$.

Из первого уравнения системы выразим: $z =$.

Подставим полученное выражение для z и z' во второе уравнение системы, имеем:

$$= \qquad ,$$

$$= \qquad .$$

Перенесем все в левую часть и приведем подобные:

$$y'' \qquad y' \qquad y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 \qquad \lambda \qquad = 0.$$

Найдем дискриминант характеристического уравнения

$$D =$$

Дискриминант D , найдем корни:

$$\lambda_{1,2} = \qquad ,$$

Найдем общее решение

$$y = \qquad .$$

Тогда

$y' = (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)' =$

Находим $z =$

$z =$

Запишем найденные функции y и z в систему

Ответ: $\begin{cases} y = \\ z = \end{cases}$

Условия к упражнениям

Вариант 1	Вариант 2
1. $xy^2 + x + (y - x^2y)y' = 0;$ 2. $y' = \dfrac{y - xe^{\frac{y}{x}}}{x};$ 3. $y' = e^{-x}\cos x - y;$ 4. $y'' = x^5 + \cos x\,;$ 5. $y''' + y'' \cdot \operatorname{tg} x = 0;$ 6. $y'' - 5y' + 4y = 0;$ 7. $y'' + 4y' + 4y = 0;$ 8. $y'' + 3y' + 4y = 0;$ 9. $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 2y - 3z \end{cases}.$	1. $xyy' - 1 + x^2 = 0;$ 2. $y' = \dfrac{y^2 + yx + 4x^2}{x^2};$ 3. $y' = \dfrac{4x}{e^{2x}} - 2y;$ 4. $y'' = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3};$ 5. $y''' - y'' \cdot \operatorname{ctg} x = 0;$ 6. $y'' - 13y' + 12y = 0;$ 7. $y'' - 6y' + 9y = 0;$ 8. $y'' - 4y' + 8y = 0;$ 9. $\begin{cases} y' = y - 4z \\ z' = y + z \end{cases}.$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. $x^2y' - y^2 = 0;$ 2. $y' = \dfrac{x + y}{x - y};$ 3. $\cos x \cdot y' = y\sin x + 1;$ 4. $y'' = x^2 + \dfrac{1}{e^x};$ 5. $2x \cdot y''' - y'' = 0;$ 6. $y'' - 7y' + 12y = 0;$ 7. $y'' - 10y' + 25y = 0;$ 8. $y'' + 4y' + 5y = 0;$ 9. $\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = z - 3y \end{cases}.$	1. $x + xy^2 + y'(yx^2 + y) = 0;$ 2. $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x};$ 3. $xy' = e^x - y;$ 4. $y'' = x^2\sqrt[3]{x} - \cos(2x)\,;$ 5. $y''' - y'' = 0;$ 6. $y'' + y' - 6y = 0;$ 7. $y'' - 14y' + 49y = 0;$ 8. $y'' - 6y' + 10y = 0;$ 9. $\begin{cases} y' = 4y - 3z \\ z' = 3y + 4z \end{cases}.$
Вариант 5	**Вариант 6**
1. $(x^2 + 4)y' - 2xy = 0;$ 2. $y' = -\dfrac{x + 2y}{2y - x};$ 3. $xy' = x^2 + 3y;$ 4. $y'' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{e^{2x}};$ 5. $y''' - \dfrac{y''}{x + 2} = 0;$ 6. $y'' + 3y' - 4y = 0;$ 7. $y'' + 6y' + 9y = 0;$ 8. $y'' + 2y' + 2y = 0;$	1. $1 + y^2 + (1 + x^2)y' = 0;$ 2. $y' = \dfrac{y + 2\sqrt{x^2 + y^2}}{x};$ 3. $\dfrac{y'}{x} = y + xe^{\frac{x^2}{2}};$ 4. $y'' = \sqrt[4]{x^3} + 2^x;$ 5. $y''' - y'' \cdot \dfrac{\ln y''}{x} = 0;$ 6. $y'' + 7y' + 10y = 0;$ 7. $y'' - 8y' + 16 = 0;$

9. $\begin{cases} y' = 5z - y \\ z' = 5y + z \end{cases}$.	8. $y'' - 2y' + 2y = 0$; 9. $\begin{cases} y' = -y + 8z \\ z' = y - z \end{cases}$.
Вариант 7	**Вариант 8**
1. $3e^x \operatorname{tg} y + (1 + e^x)y' = 0$; 2. $y' = \dfrac{y^2 + 4xy + 2x^2}{x^2}$; 3. $xy' = x^3 + x - y$; 4. $y'' = -e^{6x} + \sin(5x)$; 5. $(1 + e^x)y''' - e^x y'' = 0$; 6. $y'' - 8y' + 12y = 0$; 7. $y'' + 10y' + 25y = 0$; 8. $y'' - 4y' + 5y = 0$; 9. $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -y + 2z \end{cases}$.	1. $e^{x^2} y' + 2x \cdot e^{-y} = 0$; 2. $y' = \dfrac{y + \sqrt{2x^2 + y^2}}{x}$; 3. $(9 + x^2)y' = 1 - 2xy$; 4. $y'' = -\dfrac{12}{x^4} + 5^x$; 5. $(1 + \sin x)y''' - \cos x \cdot y'' = 0$; 6. $y'' + y' - 12y = 0$; 7. $y'' + 12y' + 36y = 0$; 8. $y'' - 2y' + 5y = 0$; 9. $\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = y + z \end{cases}$.
Вариант 9	**Вариант 10**
1. $x^2 y + (x^3 - 1)(y - 1)y' = 0$; 2. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$; 3. $y' = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x \cdot y$; 4. $y'' = e^{2x} + \cos\dfrac{x}{3}$; 5. $y''' - \sqrt{y''} = 0$; 6. $y'' - 2y' - 3y = 0$; 7. $y'' + 8y' + 16y = 0$; 8. $y'' + 4y' + 8y = 0$; 9. $\begin{cases} y' = y - 8z \\ z' = y + z \end{cases}$.	1. $2x\sqrt{1 - y^2} - yy' = 0$; 2. $y' = \dfrac{y + 3\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$; 3. $y' = y + e^x \operatorname{tg} x$; 4. $y'' = \sqrt[3]{x^7} + \dfrac{2}{(x - 7)^3}$; 5. $y'' \cdot y''' - 1 = 0$; 6. $y'' - 3y' - 10y = 0$; 7. $y'' + 14y' + 49y = 0$; 8. $y'' + 6y' + 10y = 0$; 9. $\begin{cases} y' = z - y \\ z' = 15y + z \end{cases}$.

Библиографический список

1. Высшая математика для экономистов: учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2008.

2. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2007.

3. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов – СПб.: Питер, 2005.

4. Мещерякова Ю.И., Таратута Г.А., Ульянкина Е.Н., Таратута В.А. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 2-х ч. Ч. I : задачник для курсантов ВУНЦ ВВС «ВВА» / Мещерякова Ю.И., Таратута Г.А., Ульянкина Е.Н., Таратута В.А.; ВУНЦ ВВС «ВВА» (филиал, г. Челябинск). – Челябинск, 2011. – 96 с.

5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

Учебное издание

Замышляева Алёна Александровна,
Селиванова Анастасия Андреевна,
Суровцев Сергей Викторович

М А Т Е М А Т И К А

Практикум для студентов укрупненной
группы «Экономика и управление»

Часть III

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 18.12.2015. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 5,58. Тираж 30 экз. Заказ 784/90.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.