МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

51(07)
З-268

А.А. Замышляева, Е.В. Кириллов, А.Н. Шулепов

М А Т Е М А Т И К А

Практикум
для студентов укрупненной
группы “Экономика и управление”

Часть II

Челябинск
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра уравнений математической физики

51(07)
З-268

А.А. Замышляева, Е.В. Кириллов, А.Н. Шулепов

МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов укрупненной
группы “Экономика и управление”

Часть II

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2015

УДК 51(075.8)
З-268

Одобрено
учебно-методической комиссией факультета
математики, механики и компьютерных наук

Рецензенты: С.И. Кадченко, Н.Д. Пазий

Замышляева, А.А.

З-268 Математика: практикум для студентов укрупненной группы “Экономика и управление” / А.А. Замышляева, Е.В. Кириллов, А.Н. Шулепов, – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – Ч. II. – 33 с.

Практикум предназначен для студентов очной формы обучения экономических специальностей.

Содержит 13 заданий по темам «Предел функции», «Непрерывность функции», «Производная функции», «Правило Лопиталя», «Наименьшее и наибольшее значение функции», «Асимптоты функции», «Выпуклость вверх и выпуклость вниз», «Функции двух переменных. Частные производные», «Функции двух переменных. Экстремум», «Аппроксимация функций», «Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве, ограниченном линиями», «Ряды. Признак Даламбера» и «Степенные ряды. Область сходимости».

УДК 51(075.8)

ПРАКТИКУМ

Студента

Ф.И.О.

____

____

Факультет

____

Направление

____

Группа

____

Вариант ____

Преподаватель___________________________________

Указания к выполнению

Каждому студенту предлагается индивидуальный вариант. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи.

При оформлении практикума студент должен переписать условие соответствующей задачи, написать подробное решение, выделив ответ.

Тема 1. Предел функции

Определение. Число C называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$). если для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (\mathrm{C} - \varepsilon, \mathrm{C} + \varepsilon).$$

Можно рассматривать предел в бесконечно удаленной точке:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = C$
   для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0$, такое, что при $x > M \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = C$
   для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0$, такое, что при $x < -M \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$.

Определение. Предел $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ называется первым замечательным пределом.

Определение. Предел $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ называется вторым замечательным пределом.

Теорема.
Пусть $f_1(x) \sim g_1(x)$ и $f_2(x) \sim g_2(x)$ при $x \to a$. Тогда

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

Таблица эквивалентностей при $x \to 0$.

1. $\sin x \sim x$,
2. $arsin\, x \sim x$,
3. $tg\, x \sim x$,
4. $arctg\, x \sim x$,
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$,
6. $\log_a(1 + x) \sim \frac{x}{\ln a} (a > 0, a \neq 1)$,
7. $\ln(1 + x) \sim x$,
8. $a^x - 1 \sim x \ln a\ (a > 0, a \neq 1)$,
9. $e^x - 1 \sim x$.

Упражнение 1.

Найти пределы:

a) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\infty} \frac{\qquad}{\qquad} = \left[\frac{}{}\right] = \qquad\qquad =$

$=$ $=$ $=$

$=$ $=$ $=$

$=$ $=$ $=$

Ответ:

b) $\lim\limits_{x\to} \frac{\quad}{\quad} = \left[\frac{\ }{\ }\right] =$ $=$

Разложим многочлен третьей степени на множетели (поделим уголком):

$=$ $=$

Ответ:

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\quad}{\quad} = \left[\frac{\ }{\ }\right] =$ $=$

$=$ $=$

Ответ:

Тема 2. Непрерывность функции

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если при каком-либо значении x_0 не выполняется указанное условие, то точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Определение. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва I рода, если существуют конечные пределы

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x) \text{ и } f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x).$$

Все остальные точки разрыва называются точками разрыва II рода.

Если $f(x_0-0)= f(x_0+0)$, то точка разрыва I рода x_0 называется устранимой.

Если $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то точка разрыва I рода x_0 называется точкой разрыва с конечным скачком функции.

Упражнение 2.

Исследовать функцию на непрерывность. Построить схематически график.

а) $f(x)=$

Функция не определена в точке $x_0=$ _____.

Вычислим $f($____ $-0)=\lim\limits_{\substack{x<\_\_\_ \\ x\to\_\_\_}}$ $=$

$=$ $=$ $=$

Вычислим $f($____ $+0)=\lim\limits_{\substack{x>\_\_\_ \\ x\to\_\_\_}}$ $=$

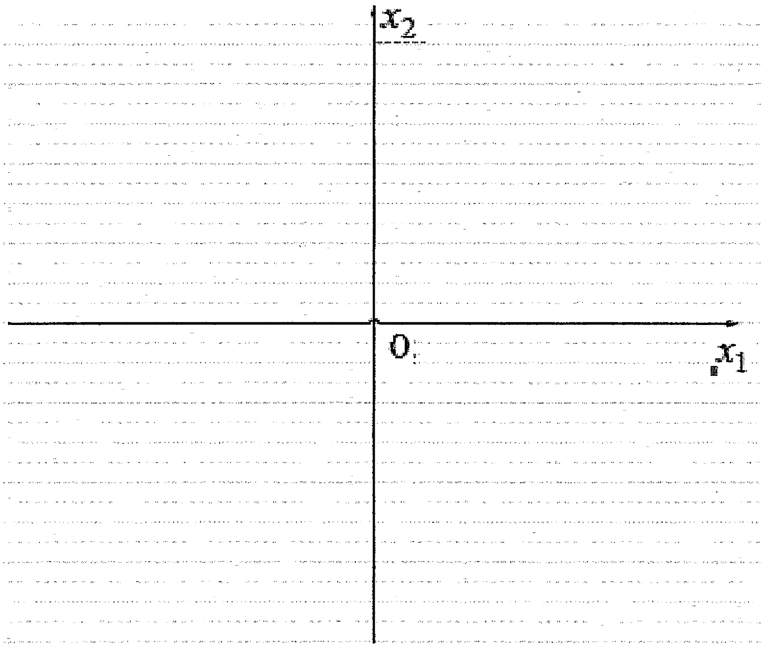
$=$ $=$ $=$

Так как ________________________ (существует \ не существует) конечные(ых) пределы(ов) $f($___ $-0)$ и $f($___ $+0)$,

$f($___ $-0)$ ___ $f($___ $+0)$ то точка $x_0=$ ____ является точкой разрыва ____ рода.

Построим график.

x						
y						



b) Функция $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$ непрерывна на (;)∪(;), т.к. элементарна

на этих промежутках. Исследуем точку $x_0 = \_\_\_\_$.

Вычислим $f(\_\_\_\_ - 0) = \lim\limits_{\substack{x<\_\_\_ \\ x\to\_\_\_}} \qquad =$

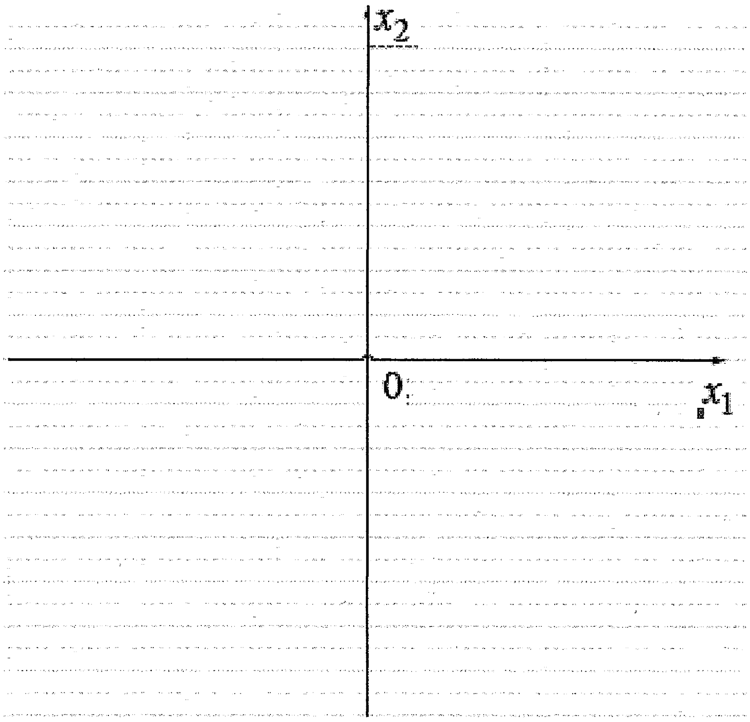
Вычислим $f(\_\_\_\_ + 0) = \lim\limits_{\substack{x>\_\_\_ \\ x\to\_\_\_}} \qquad =$

Так как $\underset{\text{существует \ не существует}}{\underline{\hspace{6em}}}$ конечный(ого) предел(а), $f(\_\_\_ - 0)$ $\underset{\text{существует \ не существует}}{\underline{\hspace{6em}}}$

конечный(ого) предел(а) $f(\_\_\_ + 0)$, $f(\_\_\_ - 0)$ ___ $f(\_\_\_ + 0)$, то точка $x_0 = \_\_\_\_$ является точкой разрыва _____ рода.

Построим график.

x						
y						



Тема 3. Производная функции

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (обозначается $y'(x)$ или $f'(x)$) называется предел отношения приращения функции в этой точке

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует:

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Таблица основных производных:

1) $(C)' = 0$;
2) $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3) $(a^x)' = a^x \ln a$;
   $(e^x)' = e^x$;
4) $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$;
   $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
5) $(\sin x)' = \cos x$;
6) $(\cos x)' = -\sin x$,;
7) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
8) $(\operatorname{ctg} xd)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,;
9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования:

1) $(u+v-w)' = u' + v' - w'$;
2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;
4) если функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке $u = f(x)$, то сложная функция $y = g(f(x))$ дифференцируема в точке x, при этом $y'(x) = y'_u(u)u'_x(x)$.

1) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$;
2) $(a^u)' = a^u \ln a\, u'$;
$(e^u)' = e^u u'$;
3) $(\log_a u)' = \frac{\log_a e}{u} u' = \frac{1}{u \ln a} u'$;
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;
4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$,;
6) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
7) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$,;
8) $(\arcsin u)' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$;
9) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
10) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;
11) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Упражнение 3.

Найти производные функций:

a) $y =$

$y' =$ $\qquad =$ $\qquad =$

$=$ $\qquad =$ $\qquad =$

$=$

Ответ:

b) $y =$

$y' =$ $\qquad =$ $\qquad =$

$=$ $\qquad =$ $\qquad =$

$=$

Ответ:

c) $y =$

$y' =$ $\qquad =$ $\qquad =$

$=$ $=$ $=$

$=$

Ответ:

Тема 4. Правило Лопиталя

Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей:

1) если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, при условии, что предел в правой части выражения существует; аналогично, если $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ и т.д.
2) если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, при условии, что предел в правой части выражения существует; аналогично, если $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g'(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ и т.д.

Упражнение 4.

Вычислите предел, используя привило Лопиталя:

$\lim \quad \frac{\qquad}{\qquad} = \left[\frac{\quad}{\quad}\right] =$

$=$

Ответ:

Тема 5. Наименьшее и наибольшее значения функции. Экстремумы

Определение. Значение $f(x_0)$ называется *локальным максимумом (минимумом)* функции $y = f(x)$, если при любом достаточно малом δ выполняется условие

$$f(x_0) > f(x) \quad \big(f(x_0) < f(x)\big) \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta).$$

Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции.

Теорема (необходимое условие локального экстремума). *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.*

Точки в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими*. Экстремум в таких точках может быть, а может и не быть.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). *Пусть x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$.Если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный максимум (локальный минимум); если же производная $f'(x)$ не меняет знака в окрестности точки x_0, то данная функция не имеет в точке x_0 локального экстремума.*

Теорема (второе достаточное условие экстремума). *Пусть $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, тогда функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, причем x_0 – точка локального максимума (минимума), если $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) < 0$).*

Для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно из значений функции на границах отрезка и в критических точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее или наименьшее.

Упражнение 5.

а) Найдите точки экстремума функции $y =$

Вычислим производную функции.

$y' =$ $=$

Найдем точки в которых $y' = 0$ или не существует.

=0

Ответ: $x_1 =$ ___, $x_2 =$ ____.

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$y =$, [,].

Находим производную функции:

$y' =$

Определяем критические точки, где $y' = 0$ или не существует.

Вычислим значения функции в критических точках, которые попадают в промежуток [... ,]

$f(\quad) =$

$f(\quad) =$

Вычислим значение функции на концах отрезка:

$f(\quad) =$

$f(\quad) =$

Выберем из этих значений наибольшее и наименьшее.

$f_{\text{наим}} =$ ____ , $f_{\text{наиб}} =$ ____ .

Ответ:

Тема 6. Асимптоты функции

Определение. Прямая линия l называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, y)$, лежащей на кривой, до прямой l стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат (т.е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = a$ является *вертикальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является *горизонтальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существуют одновременно пределы:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$$

или

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx).$$

Упражнение 6.

Найдите асимптоты графика функции $y =$

Найдем вертикальные асимптоты функции. Найдем для каких a выполняется

$\lim\limits_{x \to a} \qquad\qquad = \pm\infty$

Найдем наклонную асимптоту справа. Вычислим

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\qquad\qquad}{\qquad} =$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (\qquad\qquad \_\_x\ ) =$

$y = kx + b$. Следовательно, $y =$___$x +$___.

Найдем наклонную асимптоту слева. Вычислим

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} =$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} (\qquad\qquad\qquad \_\_x) =$

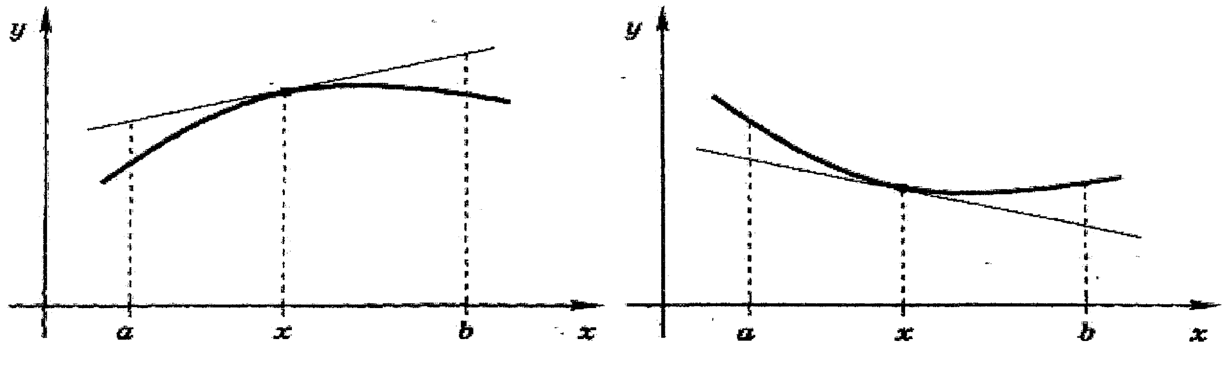
$y = kx + b$. Следовательно, $y =$___$x +$___.

Ответ:

Тема 7. Выпуклость вверх и выпуклость вниз

График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) *выпуклость вверх(вниз),* если на этом интервале график расположен не выше (не ниже) касательной к графику функции, проведенной в любой точке этого интервала.

Выпуклость вверх | Выпуклость вниз



Теорема (достаточное условие выпуклости вверх(вниз)). *Если функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала (a, b) имеет $f'' \le 0$ $(f''(x) \ge 0)$, то график функции имеет на интервале (a, b) выпуклость вверх (вниз).*

Определение. Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции $f(x)$, если в этой точке выпуклость вниз меняется на выпуклость вверх или наоборот.

Теорема (необходимое условие точки перегиба). *Если в точке* $M(x_0, f(x_0))$ *график функции* $y = f(x)$ *имеет точку перегиба, а сама функция имеет непрерывную вторую производную, тогда* $f''(x)$ *в точке* x_0 *обращается в нуль, т.е.* $f''(x_0) = 0$.

Определение. Точки графика функции, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками II рода.*

Теорема (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция* $y = f(x)$ *имеет вторую производную в окрестности точки* x_0 *и пусть в самой точке* $f''(x_0) = 0$ *или не существует. Тогда, если в указанной окрестности* $f''(x)$ *имеет разные знаки слева и справа от точки* x_0*, график функции имеет перегиб в точке* $M(x_0, f(x_0))$.

Упражнение 7.

Определить интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз функции

Вычислим первую производную:

$y' =$

Вычислим вторую производную:

$y'' =$

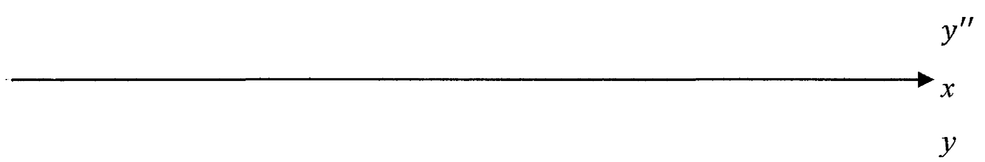
Найдем точки в которых y'' равна нулю или не существует.

Область определения y'':

$y'' = 0$

$y'' = 0$ в точках $x =$

Изобразим точки в которых y'' не существует или $y'' = 0$ на числовой прямой:



Вычислим знак функции y'' на получившихся интервалах.

$y''(\quad) =$

$y''(\quad) =$

$y''(\quad) =$

График функции $y = f(x) =$ является

выпуклым вниз на промежутке(ах) (;)

выпуклым вверх на промежутке(ах) (;)

Ответ:

Тема 8. Функции двух переменных. Частные производные

Определение. Частным приращением по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции$f(M)$, называется величина

$$\Delta_x f = f(M'_x) - f(M_0), \text{ где } M'_x = M(x_0 + \Delta x, y_0).$$

Определение. Частной производной функции $y = f(M)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x f$ к приращению Δx при стремлении последнего к нулю. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = f'_x$

Обозначается так:

f'_x или $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично можно определить частные производные второго порядка:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Упражнение 8

Вычислите частные производные второго порядка функции $z =$

f''

Решение

$z'_x =$

$z''_{xx} =$

$z''_{xy} =$

$z'_y =$

$z''_{yy} =$

z''_{yx}

Тема 9. Функции двух переменных. Экстремум

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$, если найдется такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0)\big(f(x, y) \ge f(x_0, y_0)\big).$$

Точки локального максимума и минимума называются точками экстремума.

Теорема. (Необходимое условие экстремума).

В точках экстремума частная производная первого порядка по всем переменным либо равны 0, либо не существуют.

Теорема. (Достаточное условие экстремума).

Пусть $z'_x(x_0, y_0) = 0$ *и* $z'_y(x_0, y_0) = 0$, *а вторые частные производные функции* z *непрерывны в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0). *Пусть* $A = z''_{xx}(x_0, y_0); B = z''_{xy}(x_0, y_0); C = z''_{yy}(x_0, y_0); D = AC - B^2$..

Тогда, если $D < 0$, *то в точке* (x_0, y_0) *экстремума нет.*

Если $D > 0$, *то в точке* (x_0, y_0) *есть экстремум функции* z, *причем если* $A > 0$, *то в точке* (x_0, y_0) *локальный минимум, а если* $A < 0$, *то в точке* (x_0, y_0) *локальный максимум.*

Упражнение 9

Исследуйте на экстремум функцию $z =$

Решение:

$z'_x =$

$z'_y =$

Далее составим систему, приравняв частные производные к нулю.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ \end{cases}$$

$x =$

$y =$

Получаем точку (,)

Находим частные производные второго порядка.

$A = z''_{xx} =$

$B = z''_{xy} =$

$C = z''_{xy} =$

$D = AC - B^2 = \qquad = 0$

$A \quad 0$

Ответ: точка (,) является точкой

Тема 10. Аппроксимация функций

В результате эксперимента получены несколько значений искомой функции y при нескольких значениях аргумента x.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Пусть необходимо найти зависимость между xи y в виде линейной функции $y = ax + b$.

Составим систему:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right)a + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_ix_i \\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a + b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = M_x, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i = M_y,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_ix_i = M_{xy}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 = M_{x^2}.$$

Тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} M_{x^2}a + M_xb = M_{xy} \\ M_xa + b = M_y \end{cases}$$

Решая эту систему, можно найти числа a и b.

Упражнение 10

x					
y					

a) Найдите зависимость между x и y в виде линейной функции $y = ax + b$.

b) Изобразите в одной системе координат прямую $y = ax + b$ и точки с координатами (x_0, y_0).

Решение:

a) Вычислим

$M_x =$

$M_y =$

$M_{xy} =$

$M_{x^2} =$

Составим систему

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Найдем числа a и b

$$\begin{cases} a + \quad b = \\ a + \quad b = \end{cases}$$

Получим

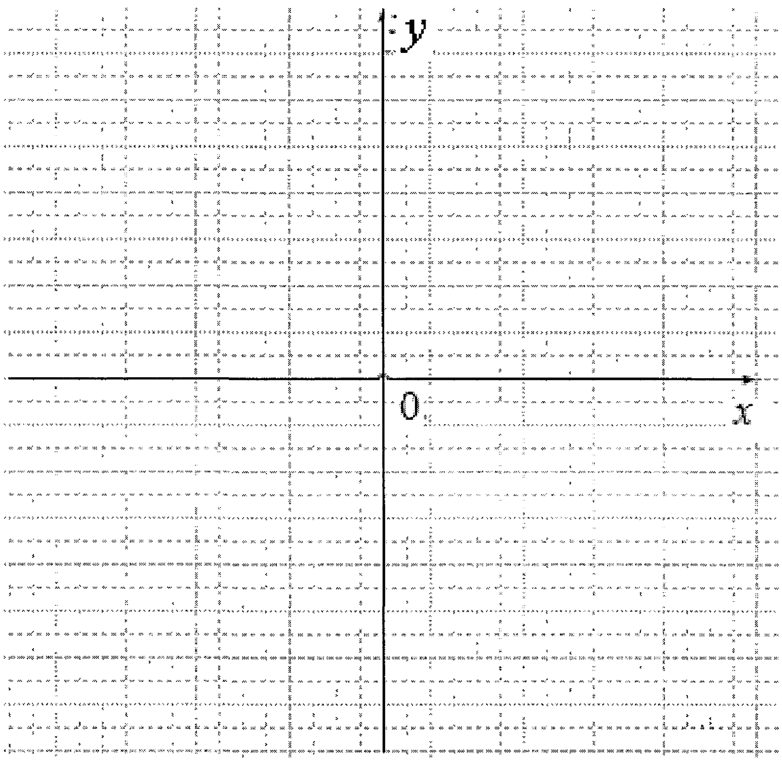
$a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $b =$

$y = \quad x +$

Ответ: $y = \quad x +$

b)
Отметим точки (,), (,)
Изобразим прямую $y = \quad x +$ по двум точкам

x		
y		



Тема 11. Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве, ограниченном линиями

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве D. Напомним, что множество D называется *ограниченным*, если его можно поместить в круг конечного радиуса; замкнутым – если оно содержит все свои предельные точки.
По теореме Вейерштрасса существуют такие точки $(x_1, y_1) \in D$ и $(x_2, y_2) \in D$, что $f(x_1, y_1)$ является наибольшим значением функции на множестве D, а $f(x_2, y_2)$ – ее наименьшим значением на множестве D.

Функция, дифференцируемая в ограниченной области и непрерывная на ее границе, достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо в точках экстремума, либо в граничных точках множества D.

Упражнение 11

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на множестве D, ограниченном линиями.

Решение:

Дана функция $z =$

Построим все границы области D:

1)

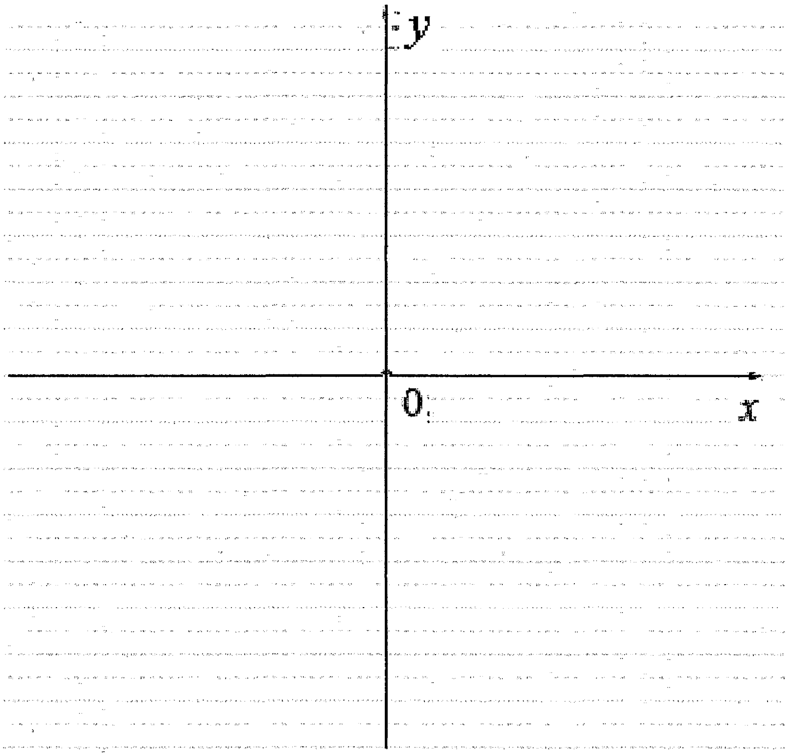
x		
y		

2)

x		
y		

3)

x		
y		



Вычислим частные производные функции z первого порядка

$z'_x =$

$z'_y =$

Находим критические точки, приравняв частные производные к нулю.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$x =$

$y =$

(,), (,)

критические точки функции.
Критическая точка (,) ________________ в область D.
попадает/не попадает

Находим значение функции z в критических точках, которые попадают в область D.

z (,) =

z (,)

Далее изучаем поведение функции z на границе множества D.

1) Из первого уравнения границы выразим переменную и подставим в функцию z.

Получим функцию $z_1 =$
заданную на отрезке ___ $\in$ [,]

Находим критические точки. Для этого вычислим производную полученной функции

$z_1' =$

Приравняем производную к нулю:
$z_1' = 0$

Получим

(,) – критическая точка функции $z_1 =$, которая ________________ внутрь отрезка [,].
попадает/не попадает

Находим значение функции z в критической точке, которая попала внутрь отрезка

z (,) =

2) Из второго уравнения границы выразим переменную и подставим в функцию z.

Получим функцию $z_2 =$
заданную на отрезке ___ $\in$ [,].

Находим критические точки. Для этого вычислим производную полученной функции

$z_2' =$

Приравняем производную к нулю:
$z_2' = 0$

Получим

(,) – критическая точка функции z_2 , которая
_______________ внутрь отрезка [,].
попадает/не попадает

Находим значение функции z в критической точке, которая попала внутрь отрезка

z (,) =

3) Из третьего уравнения границы выразим переменную
и подставим в функцию z.

Получим функцию $z_3 =$,
заданную на отрезке _ ∈[,].

Получим функцию $z_3 =$
заданную на отрезке ___ ∈ [,].

Находим критические точки. Для этого вычислим производную полученной функции
$z_3' =$

Приравняем производную к нулю:
$z_3' = 0$

Получим

(,) – критическая точка функции $z_3 =$, которая
_______________ внутрь отрезка[,].
попадает/не попадает

Находим значение функции z в критической точке, которая попала внутрь отрезка

z (,) =

4) Находим значения функций в угловых точка границы.

$z(\quad,\quad)=$

$z(\quad,\quad)=$

$z(\quad,\quad)=$

Из полученных в пунктах 1)-4) значений функции на различных участках границы и из значений функции в стационарных точках выбираем наибольшее и наименьшее.

Ответ:

Наибольшее значение: $z(\quad,\quad)=$

Наименьшее значение: $z(\quad,\quad)=$

Тема 12. Ряды. Признак Даламбера

Признак Даламбера: Рассмотрим числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$a_n > 0$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то:

a) при $D < 1$ ряд сходится. В частности, ряд сходится при $D = 0$;
b) при $D > 1$ ряд расходится. В частности, ряд расходится при $D = \infty$;
c) при $D = 1$ признак не дает ответа. Нужно использовать другой признак.

Упражнение 12

Установить сходимость (расходимость) ряда с помощью признака Даламбера

Решение:

Дан ряд

$$\sum_{n=}^{\infty} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$a_n =$

$a_{n+1} =$

Находим предел отношения

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Т.к.D, то ряд

$$\sum_{n=}^{\infty} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

____

сходится/расходится

Ответ:

Тема 13. Степенные ряды. Область сходимости

Пусть дан степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

1) Радиус сходимости можно вычислить по одной из следующих формул:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

2) нтервал сходимости определяется формулой:

а) $I = (x_0 - R, x_0 + R)$, если $0 < R < +\infty$;

б) $I = R$, если $R = +\infty$;

в) ряд сходится в единственной точке $x = x_0$, если $R = 0$

3) Областью сходимости называется множество, в каждой точке которого функциональный ряд сходится, а вне этого множества – расходится. Для определения области сходимости степенного ряда необходимо исследовать граничные точки интервала сходимости $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ и включить из них те в область сходимости, в которых ряд сходится.

Упражнение 13

Найдите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$x_0 =$

$c_n =$

$c_{n+1} =$

1) Найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| =$$

1) Интервал сходимости

$I = (x_0 - R, x_0 + R) = (\quad , \quad)$

2) Исследуем поведение ряда на концах интервала при $x =$ и $x =$

а) Подставляя левый конец интервала $x =$ в исходный ряд, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Исследуем его на абсолютную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \sum_{n=1}^{\infty}$$

Исследуем сходимость по признаку Лейбница

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

– знакочередующийся.

$a_n =$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

2) Последовательность $\{a_n\}$ монотонно ____________________ .
убывает/возрастает

Следовательно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

____________________ по признаку Лейбница. Точку $x =$ ____________________ в
сходится/расходится включаем/не включаем

область сходимости.

б) Подставляя правый конец интервала $x =$ в исходный ряд, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad}$$

Исследуем его на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad} \right| = \sum_{n=1}^{\infty}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad} \qquad \underset{\text{сходится/расходится}}{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}$$

Точку $x =$ $\underset{\text{включаем/не включаем}}{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}$ в область сходимости.

Область сходимости $D =$

Ответ:

Вариант 1

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 4x}$;

2. а) $y=\frac{x^2+2x}{x+2}$;

б) $y=\begin{cases}-x, & x\le 1,\\ \frac{2}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

3. а) $y=x^3\ln 3x$;

б) $y=\sqrt{x^3}\operatorname{ctg}(x^2)$;

в) $y=e^{-2x}\operatorname{arctg} 3x$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\ln\sin x}$.

5. а) $y=2x^3+3x^2+6$.

б) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

6. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

7. $y=2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$.

8. $z=\sin^2(2x+y)$.

9. $z=xy-2x^2+6y-y^2+3$.

10.

x	1	3	6	13	20
y	-2,1	-1,1	-1,2	0,2	2,1

11. $z=(x-2)^2y+2y^2$

$D: x=0, y=2-x, y=1$

12.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n(n-1)!}$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n(n+1)}$$

Вариант 2

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{4}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

2. а) $y=\frac{2}{(x-1)^3}$;

б) $y=\begin{cases}\frac{2}{x^2-2x+1}, & x<1,\\ 1-2x, & x\ge 1.\end{cases}$

3. а) $y=2x^3\operatorname{ctg} x$;

б) $y=\frac{\ln\cos 2x}{3x^2+1}$;

в) $y=e^{-x^2}\sin 5x^3$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\operatorname{tg} x}$.

5. а) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$.

б) $f(x)=\frac{6x-x^2}{4x+1}$, $[0;2]$.

6. $f(x)=x+\ln x$.

7. $y=x^4-2x^2+4$.

8. $z=\cos^2(3x+5y)$.

9. $z=2x^2+3y-xy+4$.

10.

x	3	10	15	16	19
y	-1,1	0	1,2	1	1,6

11. $z=3xy-12x^2-3y^2+x$

$D: x=0, y=0, y=1-x$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{2n}(n+3)}$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n}$$

Вариант 3

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+10}\right)^{x^2+8}$;

   б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)}{x^2+x-2}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin\, 3x}$.

2. а) $y=\frac{x^3-4x}{x}$;

   б) $y=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+5\,), & x\le 1,\\ x-3, & x>1.\end{cases}$

3. а) $y=(1+x^2)\mathrm{tg}\, 3x$;

   б) $y=\frac{\arccos x^2}{1-x^4}$;

   в) $y=\mathrm{tg}^2(3x^3)-x$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\mathrm{tg}\, x}{0{,}5-\sin^2 x}$.

5. а) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2$.

   б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3$, $[1;5]$.

6. $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$.

7. $y=2x^3+3x^2+6$.

8. $z=tg^2(x+7y)$

9. $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+3$

10.

x	1	12	16	18	20
y	-2,1	0,7	1	1,6	2,2

11. $z=2x^2+4xy-2y^2$

    $D: x=2, y=2, x+y=2$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{(n+1)}$$

Вариант 4

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$;

   б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)}{x^3+2x^2-x-2}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

2. а) $y=\mathrm{arctg}\frac{1}{5-x}$;

   б) $y=\begin{cases}x^2+1, & x<2,\\ 2-x, & x\ge 2.\end{cases}$

3. а) $y=x^3\sin\, 5x$;

   б) $y=5x^2\sqrt{1-2x^3}$;

   в) $y=\mathrm{arctg}\,(\ln 5x^2)$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

5. а) $y=x^3+6x^2+9x$.

   б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3$, $[-1;2]$.

6. $f(x)=\frac{x}{x^2-4x+3}$.

7. $y=-2x^3-3x^2+3$.

8. $z=e^{xy}$

9. $z=x^2-2y^2+4xy+y^2-2x-y$

10.

x	2	8	9	15	18
y	-1,6	-0,2	0,1	1,2	1,6

11. $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$

    $D: x=2, y=1, x+y=2$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-1}{n!}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{4^n(n+4)}$$

Вариант 5

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$;

   б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x-1)(x+3)}{x^3+4x^2+3x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\operatorname{tg}\left(2\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}$.

2. а) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{-x-8}$;

   б) $y=\begin{cases} x+2, & x<2, \\ x^2-1, & x\geq 2. \end{cases}$

3. а) $y=e^x(x^3-2x+1)$;

   б) $y=3^{2x}\operatorname{ctg}2x^3$;

   в) $y=x^3 2^{-\cos 5x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$.

5. а) $y=2x^3-3x^2+6$.

   б) $f(x)=x^4-8x^2+3, [-2;2]$.

6. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$.

7. $y=x^3-3x^2+3$.

8. $z=x\sin^2 y$

9. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$

10.

x	8	9	11	16	20
y	-0,2	0,1	0,6	1	2,2

11. $z=x^2-2y^2+4xy+4y$

    $D: x=0, y=0, y+2x=2$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n n!}$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^2}{n^2 2^n}$$

Вариант 6

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-6x+7}{3x^2-6x-1}\right)^{-x+1}$;

   б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+2x+1}{3x^2+5x+2}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 4x}$.

2. а) $y=\frac{5x^2+3}{x-4}$;

   б) $y=\begin{cases} x^3-1, & x\leq 1, \\ x-3, & x>1. \end{cases}$

3. а) $y=\frac{\operatorname{tg}x\ln x}{5^x}$;

   б) $y=3^{2x}\operatorname{ctg}2x^3$;

   в) $y=e^{-2x}\ln\operatorname{tg}3x$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$.

5. а) $y=x^3+2x^2-5x-6$.

   б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+12x-1, [1;5]$.

6. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

7. $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+5$.

8. $z=2x^2+4xy-2y^2$

9. $z=2x^2+4xy-2y^2$

10.

x	4	8	9	16	19
y	4,4	7,9	8,9	14,7	16,7

11. $z=2x^3-xy$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n(n-1)}$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{(n+1)}}$$

Вариант 7	Вариант 8
1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x\hat{}2}\right)^{\frac{x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{4x^2}$. 2. а) $y=\frac{x^2-4x}{x+3}$; б) $y=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x^2+5, & x\geq 0.\end{cases}$ 3. а) $y=6^x\arccos x$; б) $y=\sqrt[3]{2\operatorname{tg}3x}$; в) $y=\sin^3 2x\cdot e^{-\cos 5x}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 x}$. 5. а) $y=x^3-x^2-17x-15$. б) $f(x)=x^3-9x^2+15x-3, [0;6]$. 6. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$. 7. $y=x^3-3x+1$. 8. $z=\sin^2(x-y)$. 9. $z=3x^2+y^2+3x-4y+1$. 10. x: 1, 3, 6, 13, 20 y: 1,3; 3,3; 5,8; 10,3; 16,7 11. $z=x^2+xy^2+y^2-2x-y$, $D: y=3, x=3, x+y=3$. 12. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}.$$ 13. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}.$$	1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{(2x+1)(x-1)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$. 2. а) $y=\frac{x^3+1}{x+1}$; б) $y=\begin{cases}e^{x-2}, & x\leq 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$ 3. а) $y=2x^3\log_4 x$; б) $y=e^{-x}\sqrt{3x^2-4x+5}$; в) $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$. 4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}}$. 5. а) $y=x^3+2x^2-13x-10$. б) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+5, [-3;4]$. 6. $f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$. 7. $y=x^3+6x^2+9x$. 8. $z=\ln(x^2-y^2)$. 9. $z=8x-6x^2+12y-y^2+3$. 10. x: 3, 10, 15, 18, 19 y: 2,7; 7,9; 11,9; 14,7; 15,2 11. $z=x^2-xy+y^2+3x-2y$. 12. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}.$$ 13. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^n}{(n+1)}.$$

Таблица к заданию 10 (Вариант 7):

x	1	3	6	13	20
y	1,3	3,3	5,8	10,3	16,7

Таблица к заданию 10 (Вариант 8):

x	3	10	15	18	19
y	2,7	7,9	11,9	14,7	15,2

Вариант 9

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{(x-1)(2x+1)}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{\ln(1-2x)}$.

2. а) $y=\frac{x^2-4x+7}{x-1}$;

б) $y=\begin{cases}1, & x\le3,\\ x^2-8, & x>3.\end{cases}$

3. а) $y=6^x\cos3x$;

б) $y=\sqrt[3]{3\operatorname{tg}^2 5x}$;

в) $y=\operatorname{arctg}(\ln5x^2)$.

4. $\lim\limits_{x\to2\pi}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin x}$.

5 а) $y=x^3-x^2-4x+4$.

б) $f(x)=-2x^3-3x^2+3, [-3;5]$.

6. $f(x)=x-2+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$.

7. $y=\frac{x^3}{3}-x^2$.

8. $z=\ln(xy)$.

9. $z=6-3x^2-4y^2+x-y$.

10.

x	1	5	9	12	18
y	1,3	5,2	7,9	10,3	15,2

11. $z=7x^2-6xy+3y^2-4x+7y-12$.

12.

$$\sum_{n!}^{\infty}\frac{n^2 2^2}{n!}.$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Вариант 10

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4x-1}{3x^2+x-1}\right)^{2x^2+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x+1)(x-2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

2. а) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-3}$;

б) $y=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x\le0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

3. а) $y=2x^3\operatorname{tg}x$;

б) $y=e^{-\sin3x}\ln5x^2$;

в) $y=2\operatorname{tg}^3(3x^2-x-1)$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

5.а) $y=x^3-8x^2+19x-12$.

б) $f(x)=x^3-3x+2, [-2;3]$.

6. $f(x)=e^{-x^2}+2$

7. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$.

8. $z=(x-y)e^{xy}$.

9. $z=x-x^2+3y-4y^2$.

10.

x	5	6	16	17	20
y	5,2	5,8	13,3	14,7	16,7

11. $z=3x^2+18xy+18y-8x+8$.

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}.$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^n}{n}.$$

Учебное издание

Замышляева Алёна Александровна,
Кириллов Евгений Вадимович,
Шулепов Андрей Николаевич

МАТЕМАТИКА

Практикум для студентов укрупненной
группы “Экономика и управление”

Часть II

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 21.12.2015. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 4,18. Тираж 30 экз. Заказ 795/100.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.