МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Замышляева, Е.В. Бычков, О.Н. Цыпленкова

МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов укрупненной
группы "Экономика и управление"

Часть I

Челябинск
2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра уравнений математической физики

51(07)
З-268

А.А. Замышляева, Е.В. Бычков, О.Н. Цыпленкова

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ
для студентов укрупненной
группы «Экономика и управление»

Часть I

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2014

УДК 510(022)(076.5)
З-268

Одобрено
учебно-методической комиссией факультета математики, механики и компьютерных наук

Рецензенты: Т.Г. Сукачева, В.З. Фураев.

Замышляева, А.А.
З-268 Математика. Практикум для студентов укрупненной группы "Экономика и управление" / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков, О.Н. Цыпленкова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – Ч. I. – 29 с.

Практикум предназначена для студентов очной и заочной форм обучения направлений и специальностей "Экономика и управление".

Практикум состоит из 9 разделов по темам «Матрицы», «Определители», «Метод Крамера», «Метод Гаусса», «Собственные векторы матриц», «Векторы. Аналитическая геометрия на плоскости», «Векторы. Аналитическая геометрия в пространстве» и «Графический метод решения задач линейного программирования». В начале каждого раздела приводятся минимальные теоретические сведения, необходимые для решения задач по данной теме. Для каждого упражнения приводится алгоритм решения с пропусками для заполнения. В конце практикума приведены варианты условий к упражнениям.

УДК 510(022)(076.5)

ПРАКТИКУМ
Студента

Вариант ____

Ф.И.О. ____

Факультет ____

Направление ____

Группа ____

Преподаватель ____

Указания к выполнению

Каждому студенту предлагается индивидуальный вариант. Решение задач следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, заполняя соответствующие пропуски. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием. При оформлении рабочей тетради студент должен переписать условие соответствующей задачи, написать подробное решение, выделив ответ.

Тема 1. Матрицы

Определение. Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij}, где $i=1,2,\ldots m,\quad j=1,2,\ldots n$,

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Определение. Произведением λA матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ называется матрица $B=(b_{ij})$, элементы которой $b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$.

Для матрицы размера 2×2 справедливо равенство

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Определение. Суммой (разностью) матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ размера $m\times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij},\quad i=1,2,\ldots m,\quad j=1,2,\ldots n.$$

Для матриц размера 2×2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Определение. Произведением $A\cdot B$ матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $n\times k$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times k$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-ого столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj},\quad i=1,2,\ldots m,\quad j=1,2,\ldots n.$$

Для матриц размера 2×2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Определение. Матрица A^T, полученная из данной матрицы A, заменой строк столбцами с теми же данными, называется транспонированной к данной.

Для матрицы размера 2×2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Упражнение 1

Найдите матрицу C, если

$$C = AB^T - 2A^T, \qquad A = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Решение:

Найдем транспонированные матрицы, используя формулу (1.4),

$$A^T = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \ B^T = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Вычислим произведение матриц по формуле (1.3)

$$AB^T = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Используем формулу (1.1)

$$2A^T = 2\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.2)

$$C = AB^T - 2A^T = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$

Тема 2. Определители

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда определитель матрицы A вычисляется по формуле

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}. \qquad (2.1)$$

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, тогда определитель матрицы A можно вычислить по формуле

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{array}{ccc|cc} + & + & +\ - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+ \qquad (2.2)$$

$$+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}.$$

Упражнение 2

а) Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

Решение:

Используем формулу (2.1)

$$|A|=\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}= \quad - \quad = \quad - \quad = \quad .$$

Ответ: $|A|=\quad$.

б) Вычислить определитель матрицы $B=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

Решение:

Используем формулу (2.2)

$$|B|=\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \quad =$$

Ответ: $|B|=\quad$.

Тема 3. Матричные уравнения

Таблица 1

Вид матричного уравнения	Вид решения
$XA=B$	$X=BA^{-1}$
$AX=B$	$X=A^{-1}B$
$AXC=B$	$X=A^{-1}BC^{-1}$

Обратная матрица A^{-1} для матрицы A порядка 2×2 находится по формуле $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}$, где A^{*} – союзная матрица.

$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$, A_{ij} – алгебраические дополнения, вычисляемые по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} – определитель, получающийся из определителя матрицы A вычеркиванием i-той строки и j-ого столбца.

Упражнение 3

Решить матричное уравнение.

$$X\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Решение:

Введем обозначения. Матрицу в левой части уравнения обозначим через $A=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$, а в правой – через $B=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

Найдем определитель матрицы A:

$$|A|=\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}= \quad - \quad = \quad - \quad = \quad \neq 0,$$

значит A^{-1} существует. По виду матричного уравнения определим вид его решения, используя таблицу 1. Таким образом, $X=BA^{-1}$.

Найдем союзную матрицу

$$A_{11}=(-1)^{\ +\ }|\quad|= \quad, \quad A_{12}=(-1)^{\ +\ }|\quad|= \quad,$$
$$A_{21}=(-1)^{\ +\ }|\quad|= \quad, \quad A_{22}=(-1)^{\ +\ }|\quad|= \quad.$$

Тогда $A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

Обратную матрицу к матрице A, вычислим по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{} \cdot \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Проверка

Подставим полученную матрицу X в исходное уравнение

$$XA = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

Тема 4. Метод Крамера

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Выпишем основную матрицу из коэффициентов перед неизвестными

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и матрицу-столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главный определитель $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Если $|A| \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера. Вычислим определители

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Неизвестные найдем по формулам

$$x=\frac{|A_1|}{|A|},\ y=\frac{|A_2|}{|A|},\ z=\frac{|A_3|}{|A|}.$$

Для проверки правильности решения подставляем найденные неизвестные во все уравнения системы.

Упражнение 4

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} \qquad\qquad = \qquad , \\ \qquad\qquad = \qquad , \\ \qquad\qquad = \qquad . \end{cases}$$

Решение:

Составим матрицу A из коэффициентов при неизвестных

$$A=\begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A

$$|A|=\begin{vmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{vmatrix} \qquad =$$

Составим матрицу B из правой части уравнений системы (столбец свободных членов)

$$B=\begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу A_1, заменив первый столбец матрицы A на матрицу-столбец B, и вычислим ее определитель

$$|A_1|=\begin{vmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{vmatrix} \qquad =$$

Аналогично составим матрицу A_2 и A_3, вычислим их определители

$$|A_2| = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} =$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} =$$

Найдем неизвестные x, y, z по формулам Крамера

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\quad}{\quad} = \qquad ,$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\quad}{\quad} = \qquad ,$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\quad}{\quad} = \qquad .$$

Проверка

$$\begin{cases} \qquad = \qquad = \qquad = \qquad , \\ \qquad = \qquad = \qquad = \qquad , \\ \qquad = \qquad = \qquad = \qquad . \end{cases}$$

Ответ: $x = \qquad , y = \qquad , z = \qquad .$

Тема 5. Метод Гаусса

Метод Гаусса – классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.

Покажем, как методом Гаусса можно решить систему с тремя неизвестными. Пусть исходная система выглядит следующим образом

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Выпишем основную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Матрица $C = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$ называется расширенной матрицей системы.

Теорема Кронекера – Капелли. *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной.*

Для вычисления рангов матриц A и C приведем их к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \tilde{b}_3 \end{array}\right).$$

Если в результате этих преобразований, на каком-либо этапе получается строка вида $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_i \end{array}\right)$, где $\tilde{b}_i \neq 0$, то система несовместна.

Определение. Рангом матрицы A размера $m \times n$ называется количество ненулевых строк в эквивалентной ей ступенчатой матрице.

Получив ступенчатую матрицу, определим, какие переменные будут базисными, а какие свободными. Для этого отбрасываем нулевые строки. Переменная, соответствующая столбцу, в котором стоит первый ненулевой элемент данной строки, является базисной. Остальные переменные – свободные.

Количество базисных переменных равно рангу матрицы. По ступенчатой форме матрицы выписываем соответствующую систему

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}y + a_{23}z = \tilde{b}_2, \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}z = \tilde{b}_3. \end{cases}$$

Решаем ее, выражая базисные переменные через свободные. Придавая свободным переменным произвольные значения $\alpha \in R$, запишем общее уравнение системы.

Для проверки правильности решения подставляем найденные неизвестные в общем виде (с α) во все уравнения исходной системы.

Упражнение 5

Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} \quad = \quad , \\ \quad = \quad , \\ \quad = \quad . \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду

$$C = \left(\begin{array}{c|c} \quad & \quad \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \quad & \quad \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \quad & \quad \end{array}\right)$$

Ранг основной матрицы $r(A) =$, ранг расширенной матрицы $r(C) =$.

Ранги основной и расширенной матриц ___________, следовательно, система

равны(не равны)

_____________.

совместна (несовместна)

Базисные переменные: _________.

Свободные переменные: ________.

Пусть свободные переменные ___$= \alpha \in R$, . Выпишем систему, соответствующую полученной ступенчатой матрице. Решим ее, выражая базисные переменные через свободные.

$$\begin{cases} \quad = \\ \quad = \\ \quad = \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

Тогда общее решение имеет вид (, ,).

Проверка

$$\begin{cases} \quad = \quad = \quad = \quad , \\ \quad = \quad = \quad = \quad , \\ \quad = \quad = \quad = \quad . \end{cases}$$

Ответ: $x= \quad , y= \quad , z= \quad .$

Тема 6. Собственные векторы матриц

Ненулевая матрица-столбец X называется собственным вектором квадратной матрицы A, соответствующим собственному числу λ, если выполнено равенство $AX=\lambda X$. Ненулевое решение этого матричного уравнения существует только, в случае, когда $|A-\lambda E|=0$. Это уравнение называется характеристическим уравнением. Решая его, находим корни λ_k, являющиеся собственными числами матрицы A. Чтобы найти соответствующие собственные векторы, необходимо решить однородную систему $(A-\lambda_k E)\cdot X=0$, найдя любое частное ненулевое решение X.

Задание 5

Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Решение:

Составим матрицу

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель полученной матрицы

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}= \qquad - \qquad =$$

Приравнивая его к нулю, получим характеристическое уравнение для матрицы A.

$$=0.$$

Решим его и найдем корни уравнения λ_1 и λ_2, которые будут являться собственными значениями

$\lambda_1 =$

$\lambda_2 =$

Найдём собственные векторы матрицы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 =$. Запишем матрицу

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} - \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Умножим полученную матрицу на матрицу-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}.$$

Приравнивая к нулевой матрице, получим однородную систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} \qquad = 0, \\ \qquad = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение x_1, x_2, например, методом Гаусса:

Тогда частное ненулевое решение при $\alpha =$ имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$. То есть получим собственный вектор $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 =$.

Аналогично найдем собственные векторы матрицы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 =$. Запишем матрицу

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} - \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Умножим полученную матрицу на матрицу-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \qquad\qquad & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \end{pmatrix}.$$

Приравнивая к нулевой матрице, получим однородную систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} \qquad\qquad = 0, \\ \qquad\qquad = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение x_1, x_2, например, методом Гаусса:

Тогда частное ненулевое решение при $\alpha =$ имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$. То есть получим собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 =$.

Ответ: $\lambda_1 = \quad , X_1 = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \lambda_2 = \quad , X_2 = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}.$

Тема 7. Векторы. Аналитическая геометрия на плоскости

Теорема. *Пусть даны два вектора* $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$, *тогда*

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_a \pm x_b; y_a \pm y_b; z_a \pm z_b\}$, (7.1)

2) $\lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda \cdot x_a; \lambda \cdot y_a; \lambda \cdot z_a\}$, (7.2)

3) два вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:* $\dfrac{x_a}{x_b} = \dfrac{y_a}{y_b} = \dfrac{z_a}{z_b}$.

Длина вектора $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}. \tag{7.3}$$

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \tag{7.4}$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Замечание. Скалярное произведение векторов $\vec{a}=\{x_a;y_a;z_a\}$ и $\vec{b}=\{x_b;y_b;z_b\}$ можно вычислить по формуле

$$(\vec{a},\vec{b})=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b. \qquad (7.5)$$

Координаты точки *E*, середины отрезка AB, находятся по формуле

$$E\left(\frac{x_a+x_b}{2},\frac{y_a+y_b}{2},\frac{z_a+z_b}{2}\right). \qquad (7.6)$$

Замечание. Все формулы приведены для трехмерного пространства. В случае двумерного пространства использовать формулы без пространственной переменной *z*.

Уравнение

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0 \qquad (7.7)$$

определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{A,B,C\}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{l,m,p\}$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{p}. \qquad (7.8)$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (7.9)$$

Упражнение 7

Даны координаты точек *A(, ,), B(, ,), C(, ,),* *D(, ,)*.

Требуется найти:

1) координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ и $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AD}$, длины этих векторов;

2) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

3) уравнение плоскости по вектору нормали $\overrightarrow{AD}$ и точке *A;*

4) уравнение прямой BC.

Решение

1) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Для этого из координат конца вектора вычтем координаты начала

$$\overrightarrow{AB}=\{\quad - \quad ; \quad - \quad ; \quad - \quad \}=\{\quad ; \quad ; \quad \},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{\quad - \quad ; \quad - \quad ; \quad - \quad \}=\{\quad ; \quad ; \quad \},$$
$$\overrightarrow{AD}=\{\quad - \quad ; \quad - \quad ; \quad - \quad \}=\{\quad ; \quad ; \quad \}.$$

Напомним, во-первых, чтобы умножить вектор на число, нужно каждую координату вектора умножить на это число, во-вторых, чтобы сложить два вектора, необходимо сложить их координаты (см. формулы (7.1), (7.2)).

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AD}=\{\quad ; \quad ; \quad \}+2\{\quad ; \quad ; \quad \}-4\{\quad ; \quad ; \quad \}=$$
$$=\{\quad ; \quad ; \quad \}+\{\quad ; \quad ; \quad \}+\{\quad ; \quad ; \quad \}=\{\quad ; \quad ; \quad \}+$$
$$+\{\quad ; \quad ; \quad \}=\{\quad ; \quad ; \quad \}.$$

2) Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по формуле (7.5)

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad = \quad + \quad + \quad = \quad .$$

Найдем длины векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ по формуле

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\quad + \quad + \quad}=\sqrt{\quad} \quad ,$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\quad + \quad + \quad}=\sqrt{\quad} \quad .$$

По формуле (7.4) вычислим косинус угла α между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$$\cos\alpha=\frac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\quad}{\quad \cdot \quad}=\frac{\quad}{\quad}= \quad .$$

Таким образом, угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$$\alpha=\arccos(\cos\alpha)=\arccos(\quad)= \quad .$$

3) Подставим координаты точки *A (,   ,   ),* и вектора $\overrightarrow{AD}=\{\quad ; \quad ; \quad \}$ в формулу (7.7), получим

$$\cdot(x- \quad)+ \quad \cdot(y- \quad)+ \quad \cdot(z- \quad)=0.$$

Приведем полученное уравнение к общему виду:

4) Координаты точек B и C подставим в формулу (7.9)

$$\frac{x-\qquad}{-\qquad}=\frac{y-\qquad}{-\qquad}=\frac{z-\qquad}{-\qquad},$$

$$\frac{x-\qquad}{\qquad}=\frac{y-\qquad}{\qquad}=\frac{z-\qquad}{\qquad}.$$

Ответ:

Тема 8. Векторы. Аналитическая геометрия в пространстве

Уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \tag{8.1}$$

называется общим уравнением прямой. Причем прямая (8.1) проходит перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{A,B\}$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой l, заданной уравнением (8.1) находится по формуле

$$\rho(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{8.2}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{A,B\}$, находится по формуле

$$A\cdot(x-x_1)+B\cdot(y-y_1)=0. \tag{8.3}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{l,m\}$, можно найти по формуле

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}. \tag{8.4}$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, находится по формуле

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{8.5}$$

Уравнение вида

$$y=kx+b \tag{8.6}$$

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

Замечание. С помощью элементарных преобразований можно перейти от одной формы записи уравнения прямой к другой.

Задание 8

Дан треугольник ABC, его вершины имеют координаты $A(\quad,\quad)$, $B(\quad,\quad)$, $C(\quad,\quad)$. Найдите:

1) длину стороны AB;
2) общие уравнения сторон AB и BC, их угловые коэффициенты;
3) косинус внутреннего угла при вершине B;
4) уравнение медианы AE;
5) уравнение и длину высоты CD;
6) точку пересечения прямых AE и CD;
7) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне AB.

Изобразить все прямые, указанные в задании.

Решение

1) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, для этого из координат точки B вычтем координаты точки A:

$$\overrightarrow{AB}=\{\quad-\quad;\quad-\quad\}=\{\quad;\quad\}.$$

Длина вектора находится по формуле (7.3)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\quad+\quad}=\sqrt{\quad}=\quad.$$

2) Аналогично пункту 1, найдем координаты вектора $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BC}=\{\quad-\quad;\quad-\quad\}=\{\quad;\quad\}.$$

Составим уравнение прямой AB по формуле (8.4), используя координаты точки $A(\quad,\quad)$ и координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\{\quad;\quad\}$

$$\frac{x-\quad}{\quad}=\frac{y-\quad}{\quad}.$$

Приведем уравнение полученной прямой к общему виду, используя правило пропорции

$$\quad(x-\quad)=\quad(y-\quad).$$

Перенесем все в правую часть равенства, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$$\quad(x-\quad)-\quad(y-\quad)=0,$$
$$=0,$$
$$=0.$$

Получили общее уравнение прямой AB: .

Полученное уравнение приведем к виду (8.6). Выразим из уравнения прямой AB переменную y через x:

$$y=\quad x$$

Коэффициент перед переменной x является угловым коэффициентом прямой AB: $k_{AB}=\quad$.

Составим уравнение прямой *BC* формуле (8.4), используя координаты точки $B(\quad,\quad)$ и координаты вектора $\overrightarrow{BC}=\{\quad;\quad\}$

$$\frac{x-\qquad}{\qquad}=\frac{y-\qquad}{\qquad}.$$

$$(x-\qquad)-\qquad(y-\qquad)=0,$$
$$=0,$$
$$=0.$$

Общее уравнение прямой *BC*: .

Получённое уравнение приведем к виду (8.6). Выразим из уравнения прямой *BC* переменную y через x:

$y=\qquad x$

Коэффициент перед переменной x является угловым коэффициентом прямой *BC*: $k_{BC}=\quad$.

3) Внутренний угол при вершине образован векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{BA}=\{\quad-\quad;\quad-\quad\}=\{\quad;\quad\}.$$

Из пункта 2: $\overrightarrow{BC}=\{\quad;\quad\}$.

Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ по формуле (6.5)

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\quad\cdot\quad+\quad\cdot\quad=\quad+\quad=\quad.$$

Найдем длины векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{\qquad+\qquad}=\sqrt{\qquad}=\quad,$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{\qquad+\qquad}=\sqrt{\qquad}=\quad.$$

Используя формулу (6.4), найдем косинус внутреннего угла при вершине *B*

$$\cos\angle B=\frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\qquad}{\quad\cdot\quad}=\frac{\qquad}{\qquad}=\quad.$$

4) Точка *E* является серединой отрезка *BC*. Ее координаты найдем по формуле (7.6)

$$E\left(\frac{\quad+\quad}{2},\frac{\quad+\quad}{2}\right)=\left(\frac{\quad}{2},\frac{\quad}{2}\right)=(\quad,\quad).$$

Составим уравнение прямой *AE* по формуле (8.5)

$$\frac{x-\qquad}{\qquad}=\frac{y-\qquad}{\qquad}.$$

Приведем полученное уравнение к общему виду:

5) Используя координаты точки $C(\quad , \quad)$ и координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \{ \quad ; \quad \}$, который перпендикулярен искомой CD, найдем ее уравнение по формуле (8.3)

$$\cdot (x - \quad) + \quad \cdot (y - \quad) = 0 .$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$x \qquad y \qquad = 0$

Уравнение прямой CD: .

Длина высоты это расстояние от точки $C(\quad , \quad)$ до прямой, на которой лежит точка D, то есть до прямой AB.

Выпишем уравнение прямой AB:

Используя формулу (8.2), найдем

$$\rho(C, AB) = \frac{| \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad + \quad |}{\sqrt{\quad^2 + \quad^2}} = \frac{| \quad + \quad + \quad |}{\sqrt{\quad + \quad}} = \frac{| \quad |}{\sqrt{\quad}} =$$

Длина высоты CD = .

6) Для нахождения точки пересечения N прямых AE и CD, составим систему уравнений

$$\begin{cases} \qquad = 0, \\ \qquad = 0. \end{cases}$$

Найдем x, y. Выразим из первого уравнения системы x и подставим его во второе уравнение. Решим уравнение относительно y

$=0$

$y =$,

Подставим $y =$ в первое уравнение и найдем x.

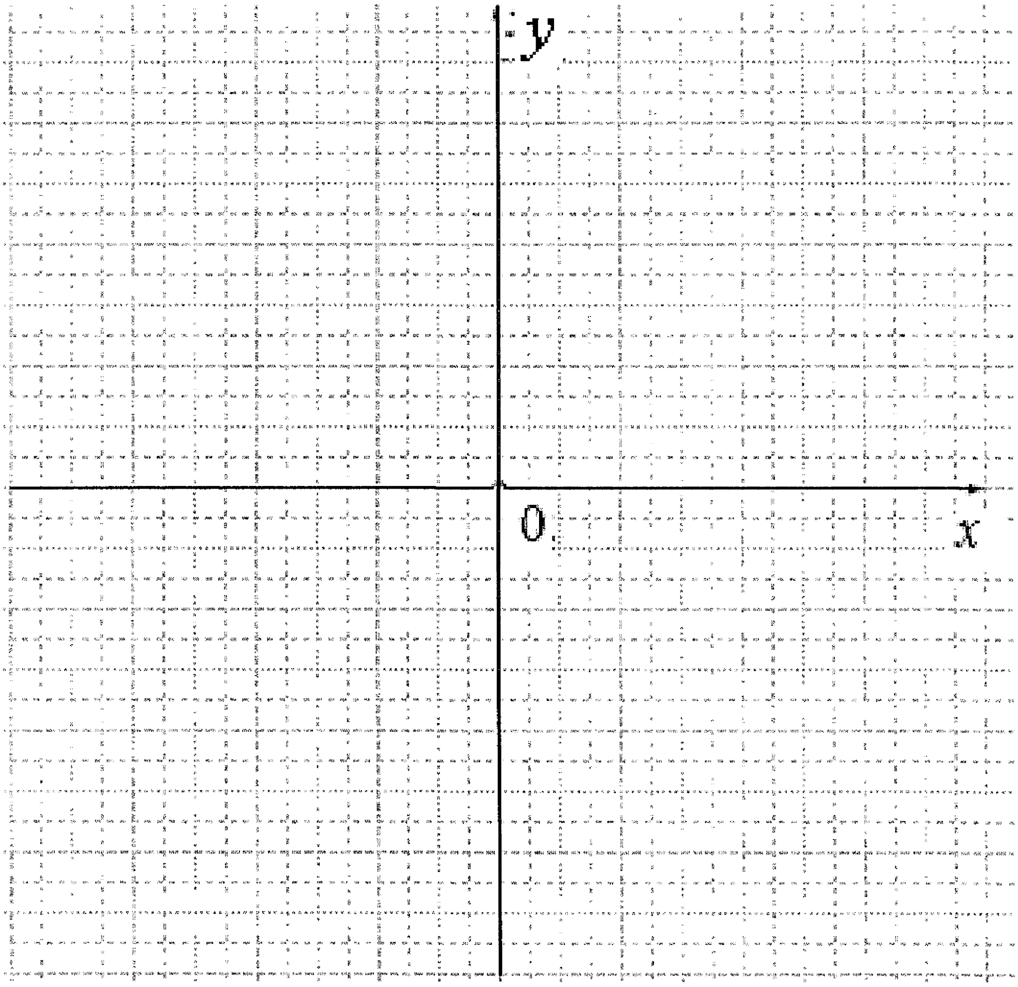
$x =$.

Точка N имеет координаты $(\quad , \quad)$.

7) Так как искомая прямая параллельна вектору $\overrightarrow{AB}=\{\quad;\quad\}$, тогда используя его координаты и координаты точки $C(\quad,\quad)$ по формуле (7.4) найдем уравнение прямой

$$\frac{x-}{\qquad}=\frac{y-}{\qquad}.$$

8) По координатам точек *A(,), B(,),C(,)* построим треугольник *ABC*.



Ответ:

Тема 9. Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\min\ (\max)\ z = c_1x_1 + c_2x_2,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ge b_m. \end{cases}$$

Алгоритм графического метода

1. Изобразить область допустимых решений. Если эта область – пустое множество, то задача недопустимая.
2. Построить вектор $\vec{n} = \{c_1;\ c_2\}$. Его можно отложить от начала координат.
3. Построить линию уровня, т.е. прямую, перпендикулярную вектору $\vec{n}$, пересекающую область допустимых решений.
4. Линию уровня перемещайте по направлению вектора $\vec{n}$ в задаче на максимум, и против направления этого вектора в задаче на минимум до положения опорной прямой (прямая, содержащая только граничные точки фигуры и не имеющая общих внутренних точек с той же фигурой).
5. Если такого положения достигнуть невозможно, т.е. линия уровня уходит на бесконечность, то задача не ограничена: $\min z = -\infty$ или $\max z = +\infty$.
6. Если положение опорной прямой достигнуто, то угловая точка (или точки, если их несколько) области допустимых решений, которая лежит на опорной прямой, является точкой максимума или минимума, соответственно. Найти координаты этой точки (или точек), как точки пересечения прямых, значение целевой функции в этих точках и записать ответ.

Упражнение 9

Решите задачу $\min(\max)\ z =$,

$$\begin{cases} \qquad\qquad , & (1) \\ \qquad\qquad ; & (2) \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение

Построим область допустимых решений. В системе (1), (2) заменим знаки неравенств на знаки равенств

$$\begin{cases} \qquad = \\ \qquad = \end{cases}$$

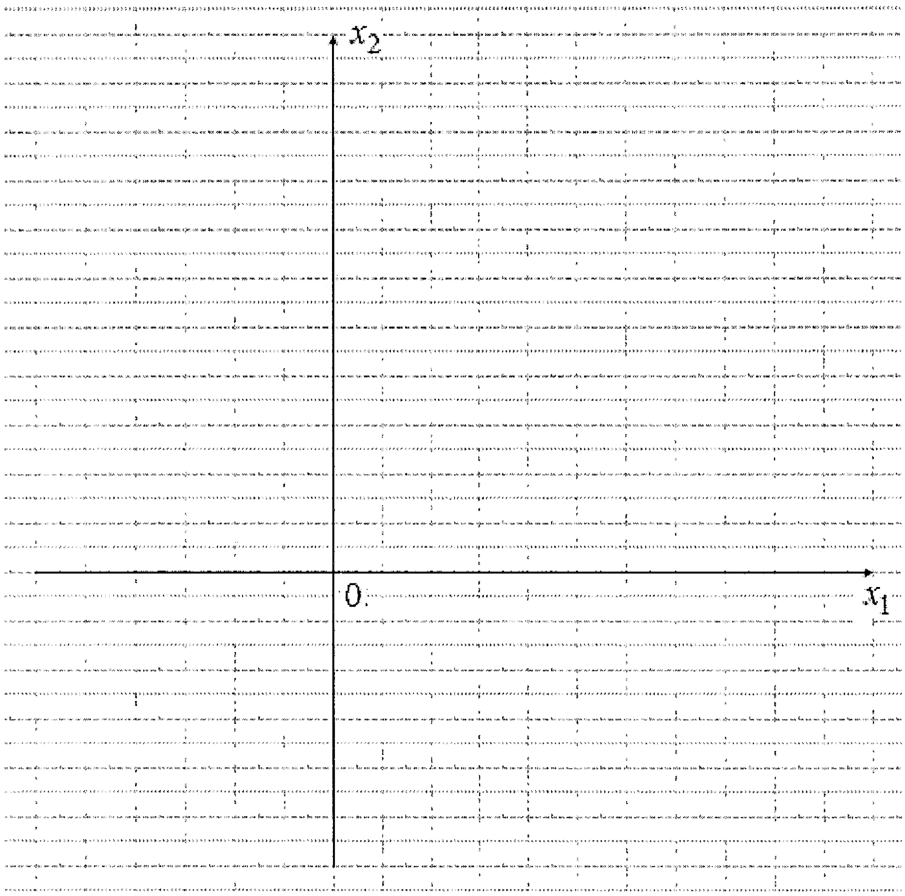
Построим прямые по двум точкам

(1)

x_1		
x_2		

(2)

x_1		
x_2		



Подставим точку (0,0) в ограничение (1), получим _______________

верное (неверное)

неравенство, что является ____________ неравенством, поэтому стрелкой

истинным (ложным)

обозначим полуплоскость, __ содержащую точку (0,0).

(не)

Аналогично подставим точку (0,0) в ограничение (2), получим _________________

верное (неверное)

неравенство, что является _______________ неравенством,

истинным (ложным)

поэтому стрелкой обозначим полуплоскость, __ содержащую точку (0,0).

(не)

Строим вектор $\vec{n}$ из точки (0;0) в точку (;). Изобразим линию уровня, проходящую через допустимое множество. Передвигаем в направлении вектора $\vec{n}$.

Точка E – это крайняя точка области допустимых решений, через которую проходит линия уровня, двигаясь по направлению вектора $\vec{n}$. Поэтому E – это точка максимума целевой функции.

Определим координаты точки E из системы уравнений ограничений.

$$\begin{cases} \quad = \quad , & (1) \\ \quad = \quad . & (2) \end{cases}$$

$$x_1 = \quad , \quad x_2 = \quad , E(\quad ; \quad).$$

Наибольшее значение: $\max z = z(E) = \quad = \quad .$

Если перемещать линию уровня в противоположном направлении, то получим точку минимума $A(\quad , \quad)$: $\min z = z(A) = \quad .$

Ответ: $\max z = z(E) = \quad ,$

$\min z = z(A) = \quad .$

Условия к упражнениям

Вариант 1

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

2.а. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$. 2.б. $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

3. $X\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases}3x+2y+z=5,\\ 2x+3y+z=1,\\ 2x+y+3z=11.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}3x-y-z=1,\\ 2x-5y+2z=1,\\ x+4y-3z=0.\end{cases}$

6. $A=\begin{pmatrix}17 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}$.

7. A (1; 2; 1), B (–1; 5; 1), C (–1; 2; 7), D (1; 5; 9).

8. A (1;–1), B (4; 3), C (5; 1).

9. $z=x_1+x_2$, $\begin{cases}x_1+2x_2\le 4,\\ 5x_1-x_2\le 10,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

Вариант 2

1. $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix}$.

2.а. $A=\begin{pmatrix}7 & 11\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. 2.б. $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & -4\\ 4 & 7 & 0\end{pmatrix}$.

3. $X\begin{pmatrix}2 & 5\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & 2\end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases}x-2y+3z=6,\\ 2x+3y-4z=20,\\ 3x-2y-5z=6.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}x+2y+3z=4,\\ 2x+4y+6z=3,\\ 3x+y-z=1.\end{cases}$

6. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

7. A (2; 3; 2), B (0; 6; 2), C (0; 3; 8), D (2; 6; 10).

8. A (0; –1), B (3; 3), C (4; 1).

9. $z=2x_1-x_2$, $\begin{cases}2x_1+x_2\le 4,\\ 3x_1-2x_2\le 6,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

Вариант 3

1. $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

2.а. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 7\end{pmatrix}$. 2.б. $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 7 & 4 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

3. $X\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases}4x-3y+2z=9,\\ 2x+5y-3z=4,\\ 5x+6y-2z=18.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}3x+2y-z=0\\ 2x-y+3z=0\\ x+3y-4z=0\end{cases}$

6. $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

7. A (0; 3 ; 2), B (–2; 6; 2), C (–2; 3; 8), D (0; 6; 10).

8. A (1; – 2), B (4; 2), C (5; 0).

9. $z=x_1+x_2$, $\begin{cases}5x_1+2x_2\le 10,\\ 4x_1+5x_2\le 20.\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

Вариант 4

1. $A=\begin{pmatrix}9 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

2.а. $A=\begin{pmatrix}8 & 1\\ -13 & 5\end{pmatrix}$. 2.б. $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

3. $X\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases}x+y+2z=-1,\\ 2x-y+2z=-4,\\ 4x+y+4z=-2.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}x+2y+3z=4,\\ 2x+y-z=3,\\ 3x+3y+2z=10.\end{cases}$

6. $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

7. A (2; 1; 2), B (0; 4; 2), C (0; 1; 8), D (2; 4; 10) .

8. A (2; –2), B (5; 2), C (6; 0).

9. $z=2x_1+3x_2$, $\begin{cases}2x_1-3x_2\le 6,\\ 3x_1+4x_2\le 12.\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

Вариант 5

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2.а. $A=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. б. $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $X\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=7. \end{cases}$

6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. A (1; 3; 1), B (–1; 6; 1), C (–1; 3; 7), D (1; 6; 9).

8. A (0; 0), B (3; 4), C (4; 2).

9. $z=-2x_1-4x_2$, $\begin{cases} -x_1+2x_2\le 4, \\ 5x_1+x_2\le 5, \end{cases}$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

Вариант 6

1. $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

2.а. $A=\begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. 2.б. $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $X\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x-y-z=-4, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 4x+2y+3z=-2, \\ 2x+8y-z=8, \\ 9x+y+8z=0. \end{cases}$

6. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

7. A (1; 2; 2), B (–1; 5; 2), C (–1; 2; 8), D (1; 5; 10).

8. A (0; 1), B (3; 5), C (4; 3).

9. $z=2x_1-x_2$, $\begin{cases} x_1+3x_2\le 9, \\ 3x_1-4x_2\le 12. \end{cases}$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

Вариант 7

1. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2.а. $A=\begin{pmatrix} -13 & 2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$. 2.б. $B=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $X\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=2, \\ 4x+y-3z=3. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x+z=2, \\ 3x+2y+2z=-2, \\ 5x+2y+3z=0. \end{cases}$

6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. A (2; 3; 0), B (0; 6; 0), C (0; 3; 6), D (2; 6; 8).

8. A (3; –2), B (6; 2), C (7; 0).

9. $z=7x_1+2x_2$, $\begin{cases} 5x_1+3x_2\le 15, \\ -4x_1+x_2\le 4, \end{cases}$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

Вариант 8

1. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

2.а. $A=\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. 2.б. $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $X\begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} x-4y-2z=-3, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=-9. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x+y-z=5, \\ x-2y+2z=-5, \\ 7x+y-z=11. \end{cases}$

6. $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. A (2; 2; 1), B (0; 5; 1), C (0; 2; 7), D (2; 5; 9).

8. A (3; –3), B (6; 1), C (7; –1).

9. $z=4x_1-6x_2$, $\begin{cases} x_1+x_2\le 5, \\ 4x_1+7x_2\le 28, \end{cases}$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

Вариант 9	**Вариант 10**
1. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. 2.а. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 9 & 4\end{pmatrix}$. 2.б. $B=\begin{pmatrix}0 & -5 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 9 & -1\end{pmatrix}$. 3. $X\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$. 4. $\begin{cases}7x-5y=31,\\ 4x+11z=-43,\\ 2x+3y+4z=-20.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}2x-y+3z=0,\\ x+2y-5z=0,\\ 3x+y-2z=0.\end{cases}$ 6. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. 7. A (2; 3; 1), B (0; 6; 1), C (0; 3; 7), D (2; 6; 9). 8. A (–1; 1), B (2; 5), C (3; 3). 9. $z=4x_1+4x_2$, $\begin{cases}3x_1+7x_2\le 21,\\ 5x_1+4x_2\le 20.\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0.$	1. $A=\begin{pmatrix}9 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. 2.а. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}$. 2.б. $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 4 & 6 & -1\\ 3 & 10 & 2\end{pmatrix}$. 3. $X\begin{pmatrix}5 & 8\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. 4. $\begin{cases}x+2y+4z=31,\\ 5x+y+2z=20,\\ 3x-y+z=9.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}2x-3y+z=2,\\ x+5y-4z=-5,\\ 3x+2y-3z=5.\end{cases}$ 6. $A=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$. 7. A (2; 2; 2), B (0; 5; 2), C (0; 2; 8), D (2; 5; 10). 8. A (4; 0), B (7; 4), C (8; 2). 9. $z=3x_1-4x_2$, $\begin{cases}x_1+3x_2\le 9,\\ 4x_1+x_2\le 4.\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

Библиографический список

1. Высшая математика для экономистов: учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2008.

2. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2007.

3. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник; под ред. Н.В. Ефимова. – СПб: Профессия, 2003.– 199 с.

4. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов – СПб.: Питер, 2005.

5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

Учебное издание

Замышляева Алёна Александровна,
Бычков Евгений Викторович,
Цыпленкова Ольга Николаевна

МАТЕМАТИКА

Практикум для студентов укрупненной группы
«Экономика и управление»

Часть I

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 24.12.2014. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 3,72. Тираж 50 экз. Заказ 763/618

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.